



Ingeniería en automática y electrónica industrial
Asignatura: Optimización y control óptimo
Soluciones comentadas del examen de Septiembre 97

- (a) Llamamos x_j a la producción de motocicletas de 500cc, 250cc, 125cc y ciclomotores respectivamente. En ese caso las restricciones son las siguientes. Restricciones temporales

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 25 \times 8 \end{aligned}$$

Estas desigualdades expresan que el tiempo empleado en cada sección para la producción de motocicletas no puede ser superior a la capacidad de producción de dicha sección.

Producción Vendida

Las restricciones debidas a las condiciones de mercado sobre la producción son

$$x_4 \geq 0.5 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

que nos indican que el número de ciclomotores (x_4) tiene que ser al menos el 50% de la producción total. También podríamos expresar esta ecuación como

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4$$

Que indica que la producción de ciclomotores tiene que ser superior a la producción restante.

Imagen de Marca

Debido a la imagen que tiene que mantener la marca

$$x_1 \geq 3$$

No negatividad

Obviamente, todas las variables del problema son positivas o cero.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Función objetivo

El objetivo es maximizar el beneficio total, que estará compuesto por los beneficios producidos por la venta de cada motocicleta

$$180.000x_1 + 160.000x_2 + 80.000x_3 + 40.000x_4$$

El problema lineal sería por tanto

$$\text{Maximizar } 180.000x_1 + 160.000x_2 + 80.000x_3 + 40.000x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\leq 25 \times 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 25 \times 8 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4$$

$$x_1 \geq 3$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4$$

- (b) El modelo en forma estándar sería, teniendo en cuenta que las restricciones deben ser de igualdad, que todas las variables son no negativas y que los términos independientes también tienen que ser no negativos.

$$\text{Maximizar } 180.000x_1 + 160.000x_2 + 80.000x_3 + 40.000x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5^h &= 200 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6^h &= 200 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_7^h &= 200 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8^h &= 96 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_9^h = 0$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4$$

También se podía haber hecho previamente el cambio $x'_1 = x_1 - 3$, eliminando, por tanto una restricción. El problema después de este cambio queda

$$\text{Maximizar } 180.000x'_1 + 160.000x_2 + 80.000x_3 + 40.000x_4 + 540.000$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 8x'_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5^h &= 176 \\ 6x'_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6^h &= 182 \\ 4x'_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_7^h &= 188 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8^h &= 84 \end{aligned}$$

$$-x'_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_9^h = 3$$

$$0 \leq x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5^h, x_6^h, x_7^h, x_8^h, x_9^h$$

Donde se le ha cambiado el signo a la última restricción para que tenga el coeficiente independiente positivo.

A partir de la tabla anterior un método para obtener la primera solución factible básica podría ser el método de la M-grande (también mediante el método de las 2 fases). En este caso habrá que incorporar una variable artificial a la última restricción, ya que en las demás restricciones, podemos utilizar las variables de holgura. Cambiando el signo de la función objetivo y añadiendo dicha variable artificial, tenemos

$$\text{Minimizar} \quad -180.000x'_1 - 160.000x_2 - 80.000x_3 - 40.000x_4 - 540.000 + My_1$$

Sujeto a

$$8x'_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5^h = 176$$

$$6x'_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6^h = 182$$

$$4x'_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_7^h = 188$$

$$4x'_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_8^h = 84$$

$$-x'_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_9^h + y_1 = 3$$

$$0 \leq x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5^h, x_6^h, x_7^h, x_8^h, x_9^h, y_1$$

Y la primera solución factible básica, que corresponde a la base $(x_5^h, x_6^h, x_7^h, x_8^h, y_1)$, es

$$x_B = (0, 0, 0, 0, 176, 182, 188, 84, 0, 3)$$

1. Para resolver cualquiera de los apartados del problema (análisis de la sensibilidad) necesitamos B^{-1} y c_B^T , que se pueden extraer de la tabla óptima. La base B está formada por los vectores R_1, S_4, S_3, C y R_2 . Si ponemos el problema según el método de la M-grande, cambiando el signo de la función objetivo tenemos:

$$\text{Minimizar} \quad -700R_1 - 900R_2 - 620R_3 + MA_4 + MA_5$$

Sujeto a

$$2R_1 + 3R_2 + 5C + S_1 = 500$$

$$R_1 + 2R_2 + 2C + S_2 = 240$$

$$R_1 + R_2 + C + S_3 = 200$$

$$R_1 + R_2 + C - S_4 + A_4 = 100$$

$$R_1 + R_2 - C + A_5 = 0$$

$$0 \leq R_1, R_2, C, S_1, S_2, S_3, S_4, A_4, A_5$$

Siendo la primera base: $(S_1, S_2, S_3, A_4, A_5)$, y por tanto en esas columnas donde se encuentra la identidad, estará la matriz B^{-1} en la tabla óptima

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

el vector c_B^T se obtiene directamente de la función objetivo, como hemos considerado el problema de minimizar $-f$ estos coeficientes aparecen cambiados de signo

$$c_B^T = (-700, 0, 0, -620, -900)$$

- (a) Se trata de una variación en el coeficiente independiente b_2 , $b_2 = 240 \rightarrow b'_2 = 228$. Por tanto, tenemos que comprobar si este cambio afecta a la base óptima actual, para ello tenemos que comprobar si la nueva solución básica, es factible

$$\begin{aligned} x'_B &= B^{-1}b' = B^{-1} \begin{bmatrix} 500 \\ 228 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \\ &= B^{-1} \begin{bmatrix} 500 \\ 240 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 36 \\ 64 \\ 68 \\ 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La nueva solución sigue siendo factible, y portanto, óptima. La base no cambia, pero los valores sí, es decir, cambia la producción diaria:

$$44R_1, 24R_2, 68C$$

- (b) De nuevo se trata de una variación en el coeficiente independiente. Cambiamos $b_4 = 100$ por $b'_4 = 140$. Tenemos que comprobar de nuevo, si este cambio afecta a la base óptima actual, para ello tenemos que comprobar si la nueva solución básica, es factible

$$\begin{aligned} x'_B &= B^{-1}b' = B^{-1} \begin{bmatrix} 500 \\ 240 \\ 200 \\ 140 \\ 0 \end{bmatrix} = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \\ &= B^{-1} \begin{bmatrix} 500 \\ 240 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 70 \\ 65 \\ 45 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución, que sigue siendo básica, ha dejado de ser factible, uno de los términos es negativo. Como los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas no han cambiado con esta modificación, siguen siendo positivo, nos encontramos con una solución factible dual. Para encontrar la nueva solución tenemos por tanto que aplicar el método simplex dual. La tabla

actual, después del cambio, es:

	R_1	R_2	C	S_1	S_2	S_3	S_4	A_4	A_5	b
R_1	1	0	0	1	-2	0	0	0	1	20
S_4	0	0	0	1/2	-1/2	0	1	-1	1/2	-10
S_3	0	0	0	-1/2	1/2	1	0	0	-1/2	70
C	0	0	1	1/4	-1/4	0	0	0	-1/4	65
R_2	0	1	0	-3/4	7/4	0	0	0	-1/4	45
	0	0	0	180	20	0	0	M	$320 + M$	94800

Teniendo en cuenta el método simplex dual, el elemento pivote es el que se encuentra recuadrado, y dando un paso del método simplex dual obtenemos la tabla

	R_1	R_2	C	S_1	S_2	S_3	S_4	A_4	A_5	b
R_1	1	0	0	-1	0	0	-4	4	-1	60
S_2	0	0	0	-1	1	0	-2	2	-1	20
S_3	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	60
C	0	0	1	0	0	0	-1/2	1/2	-1/2	70
R_2	0	1	0	0	0	0	7/2	-7/2	3/2	10
	0	0	0	200	0	0	40	$M - 40$	$340 + M$	94400

que ya es óptima (teniendo en cuenta, que el valor de M puede ser cualquier número) y da como solución factible óptima

$$\mathbf{x}_B = (60, 10, 70, 0, 20, 60, 0, 0, 0)$$

La producción óptima es por tanto

$$60R_1, 10R_2, 70C$$

- (c) En este caso se trata de averiguar que variación puede existir en el término independiente b_4 (que es la cantidad máxima de mesas que puede suministrar la empresa), de forma que se sigan produciendo los tres tipos de mesas. Se trata de un análisis de la sensibilidad en dicho término independiente. Si queremos que se siga produciendo de los tres tipos de mesa, el coeficiente b_4 tiene que variar de forma que la solución óptima siga formada por las mismas variables, es decir, que la tabla inicial siga siendo óptima

$$x'_B = \mathbf{B}^{-1}b' = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} 500 \\ 240 \\ 200 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \iff \begin{bmatrix} 20 \\ 130 - b_4 \\ 70 \\ 65 \\ 45 \end{bmatrix} \geq 0 \iff 130 - b_4 \geq 0 \iff b_4 \leq 130$$

Por tanto la cantidad máxima que puede suministrar la empresa son 130 mesas en total: 20 R_1 , 65 R_2 y 45 C .

2. Extremales. Utilizamos en ambos casos las ecuaciones de Euler

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y^0} = 0$$

(a)

$$F_y = -2x$$

$$F_{y^0} = 2y' \implies \frac{\partial}{\partial x} F_{y^0} = 2y''$$

La ecuación de Euler en este caso es

$$-2x - 2y'' = 0 \iff y'' = -x$$

que es fácilmente resoluble

$$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración. Utilizando ahora las condiciones iniciales: $y(1) = 0$; $y(2) = -1$,

$$y(1) = 0 \iff -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0$$

$$y(2) = -1 \iff -\frac{8}{6} + 2C_1 + C_2 = -1$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{6} \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

La función extremal queda como

$$y(x) = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

(b) Para este apartado

$$F_y = 3x - 2y$$

$$F_{y^0} = 0$$

La ecuación de Euler en este caso es

$$3x - 2y = 0 \iff y = \frac{3}{2}x$$

que ya nos da la expresión de $y(x)$. Utilizando ahora las condiciones iniciales: $y(0) = 0$; $y(1) = 1$, se comprueba que para la función anterior

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= \frac{3}{2} \neq 1 \end{aligned}$$

y por tanto no se cumple una de las condiciones iniciales, y el problema no tiene solución

3. Programación No Lineal

Comprobamos en primer lugar los puntos que no son regulares para este problema, en caso de no existir ningún punto con estas características, es decir, ningún punto irregular, podremos decir que la solución del problema, esto es, los máximos y mínimos del problema los vamos a encontrar en los puntos estacionarios de la función lagrangiana. Calculamos en primer lugar los gradientes de cada una de las restricciones

$$\begin{aligned} \nabla h_1(x, y, z) &= (2x, 2(y-2), 2z) \\ \nabla h_2(x, y, z) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Como ambas restricciones tienen que ser activas, estamos en un problema con restricciones de igualdad, un punto, P , es regular cuando los vectores $\{\nabla h_1(P), \nabla h_2(P)\}$ sean linealmente independientes. Por tanto, para que los vectores anteriores sean linealmente dependientes tiene que ocurrir una de las dos cosas siguientes

- $\nabla h_1(x, y, z) = (2x, 2(y-2), 2z) = 0$ (el otro nunca puede ser 0), y esto ocurre, para el punto $P = (0, 2, 0)$, que no cumple la segunda restricción, y por tanto no es factible.
- $\nabla h_1(P) = \mu \nabla h_2(P) \Rightarrow (2x, 2(y-2), 2z) = \mu(1, 1, 1) \Rightarrow \mu = 2x = 2(y-2) = 2z \Rightarrow$

$$x = z = y - 2 \Rightarrow P = (x, x + 2, x)$$

pero ninguno de esos puntos cumple la segunda restricción, y por tanto tampoco son factibles

De lo anterior se deduce que todos los puntos factibles son regulares, y por tanto las soluciones del problema tienen que encontrarse entre los puntos estacionarios, los puntos que cumplan las condiciones de primer orden.

- (a) Planteamos la función Lagrangiana del problema y aplicamos las condiciones de primer orden

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda_1 \left(x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 \right) + \lambda_2 (x + y + z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2(y-2) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} &= x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} &= x + y + z = 0 \end{aligned}$$

- (b) Donde las dos últimas ecuación son las restricciones del problema. Para resolver el sistema anterior podemos darnos cuenta que las ecuaciones 1 y 3 son prácticamente equivalentes, cambiando x por z . Luego si restamos ambas, obtenemos

$$2(x-z) + 2\lambda_1(x-z) = 0 \Leftrightarrow (x-z)(1+\lambda_1) = 0$$

Ecuación que nos da dos soluciones

$$x = z$$

$$\lambda_1 = -1$$

Distinguimos ambos casos

- i. $x = z$

Si vamos a la primera restricción del problema con esta igualdad, obtenemos

$$x + y + z = 0 \Rightarrow y = -2x$$

que sustituida en la 2ª restricción

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 &= 1 \Rightarrow 2x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow 2x^2 - \frac{(-2x)^2}{4} = 1 \\ 2x^2 - x^2 &= 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1 \end{aligned}$$

que nos proporciona 2 puntos

$$P_1 = (1, -2, 1)$$

$$P_2 = (-1, 2, -1)$$

Los multiplicadores, λ_1 y λ_2 , asociados a cada uno de los dos puntos anteriores, se obtienen sustituyendo en las ecuaciones 1 y 2 del sistema inicial (el proporcionado por las condiciones de primer orden), dando como resultados

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, -2, 1) \quad \lambda_1 = -10 \quad \lambda_2 = 18 \\ P_2 &= (-1, 2, -1) \quad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2 \end{aligned}$$

ii. $\lambda_1 = -1$

Sustituyendo en la primera ecuación (o en la tercera) obtenemos $\lambda_2 = 0$. Si ahora incorporamos estos valores en la segunda ecuación podemos calcular el valor de y

$$2(y - 2) - \frac{\lambda_1}{2}y + \lambda_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{5}$$

Y junto con las restricciones del problema

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x + z = -\frac{8}{5} \Rightarrow z = -x - \frac{8}{5}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1 + \frac{(8/5)^2}{4} = \frac{41}{25} \Rightarrow x^2 + \left(-x - \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{41}{25}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{64}{25} + \frac{16}{5}x = \frac{41}{25} \Rightarrow 2x^2 + \frac{16}{5}x - \frac{23}{25} = 0$$

Ecuación de 2º grado con soluciones

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{110} \\ x_2 &= -\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{110} \end{aligned}$$

y sustituyendo para encontrar el valor de z

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{110} \\ z_2 &= -\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{110} \end{aligned}$$

Tenemos por tanto 2 nuevos puntos

$$P_3 = \left(-\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{110}, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{110}\right) \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 0$$

$$P_4 = \left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{110}, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{110}\right) \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 0$$

Queda por comprobar que tipo de puntos son los calculados anteriormente. Para ello utilizamos el Hessiano

$$\mathbf{H}\Phi = \mathbf{H}f + \lambda_1 \mathbf{H}h_1 + \lambda_2 \mathbf{H}h_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\frac{1}{2}\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\lambda_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto depende solamente del valor de λ_1 para cada punto.

i. Para $P_1 = (1, -2, 1)$ con $\lambda_1 = -10$

$$\mathbf{H}\Phi(P_1) = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no es definida y hay que ir al espacio tangente para averiguar la naturaleza de P_1 . Calculamos el valor de $\nabla h_1(P_1)$ y $\nabla h_2(P_1)$

$$\nabla h_1(P_1) = (2x, 2(y-2), 2z)_{P_1} = (2, -8, 2)$$

$$\nabla h_2(P_1) = (1, 1, 1)$$

Recordamos la definición de espacio tangente en un punto P_1

$$M(P_1) = \{h \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla h_j(P_1) \cdot h = 0 \quad \forall j\}$$

En este caso

$$\begin{aligned} M(P_1) &= \{h \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla h_1(P_1) \cdot h = 0 \quad \nabla h_2(P_1) \cdot h = 0\} \\ &= \{h \in \mathbb{R}^3 \mid (2, -8, 2) \cdot (h_1, h_2, h_3) = 0; \quad (1, 1, 1) \cdot (h_1, h_2, h_3) = 0\} \\ &= \{h \in \mathbb{R}^3 \mid 2h_1 - 8h_2 + 2h_3 = 0; \quad h_1 + h_2 + h_3 = 0\} \\ &= \{h \in \mathbb{R}^3 \mid h_1 - 4h_2 + h_3 = 0; \quad h_1 + h_2 + h_3 = 0\} \end{aligned}$$

Restando estas dos últimas ecuaciones nos sale $h_2 = 0$, y por tanto $h_1 = -h_3$. El valor de la forma cuadrática $\mathbf{H}\Phi(P_1)$ en estos puntos es

$$\Psi(h_1, h_2, h_3) = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = -18h_1^2 + 7h_2^2 - 18h_3^2$$

que en los puntos de la forma $(h_1, 0, -h_1)$

$$\Psi(h_1, 0, -h_1) = -36h_1^2 \leq 0$$

y por tanto la forma cuadrática es definida negativa $\Rightarrow P_1$ es un máximo.

ii. Para $P_2 = (-1, 2, -1)$ con $\lambda_1 = -2$

$$\mathbf{H}\Phi(P_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tampoco es definida y hay que ir al espacio tangente para averiguar la naturaleza de P_2

iii. Para P_3 con $\lambda_1 = -1$

$$\mathbf{H}\Phi(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva y por tanto P_3 es un mínimo.

iv. Para P_4 con $\lambda_1 = -1$

$$\mathbf{H}\Phi(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva y por tanto P_4 es un mínimo.

(c) Este apartado se resuelve haciendo uso del teorema de la sensibilidad para programación no lineal.

$$\Delta f = -\lambda_1 \Delta b_1 - \lambda_2 \Delta b_2$$