Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingenierio en Automática y Electrónica Industrial
Asignatura: Optimización y Control Óptimo
Convocatoria de Junio:1-Julio-1999
Prof.: Silvestre Paredes Hernández

1.- ALGORITMOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS

1. (1.75 puntos) Una fábrica produce bobinas de papel de 500 metros de longitud y 1 metro de ancho. Se ha estimado que la demanda para el més próximo es de

   500 bobinas de 20 cm de ancho
   400 bobinas de 30 cm de ancho
   250 bobinas de 40 cm de ancho
   300 bobinas de 70 cm de ancho

   (Todas las bobinas de 500 metros).

   El fabricante debe cortar las bobinas de 1 metro de acuerdo con el ancho de las peticiones para satisfacer la demanda, pero también desea que el corte sea tal que el número de bobinas que fabrique (de 1 metro) sea mínimo, con el objeto de que la producción de papel sea mínima y así el gasto que este produce. Plantea el problema lineal que resuelve el problema anterior.

   Solución: Los posibles cortes o patrones son

Corte	20	30	40	70	Sobra
1	5	0	0	0	0
2	3	0	1	0	0
3	3	1	0	0	10
4	2	2	0	0	0
5	1	0	0	1	10
6	1	0	2	0	0
7	1	1	1	0	10
8	0	2	1	0	0
9	0	1	0	1	0

   Los demás posibles cortes como $(4, 0, 0, 0)$ no interesan porque el sobrante puede formar otro de los rollos buscados.

   Si definimos x_j como el número de cortes tipo j, con $j = 1, \ldots, 9$.

   (a) La función objetivo será el número de cortes totales

$$z = \sum_{j=1}^{9} x_j$$

   (b) Restricciones de Demanda: Serán los rollos necesarios de cada tipo

$$\begin{array}{lllllllllll}
5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +1x_5 & +1x_6 & +1x_7 & +0x_8 & +0x_9 & \geq & 500 \\
0x_1 & +0x_2 & +1x_3 & +2x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +1x_7 & +2x_8 & +1x_9 & \geq & 400 \\
0x_1 & +1x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +2x_6 & +1x_7 & +1x_8 & +0x_9 & \geq & 250 \\
0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +1x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_8 & +1x_9 & \geq & 300
\end{array}$$

   (c) Restricciones de no negatividad

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j$$

2. (0.5 puntos) Encontrar, si existen los mínimos locales y globales de la función $f(x, y) = x^2 + y^4$

(a) ¿Se cumplen las condiciones necesarias de primer orden para todos los puntos encontrados?

(b) ¿Se cumplen las condiciones necesarias de segundo orden para todos los puntos encontrados?. ¿Y las condiciones suficientes de segundo orden?

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left(2x, 4y^3\right) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Es el único punto estacionario y por tanto el único que puede ser local, ya que el problema es sin restricciones y todos los puntos son interiores, siendo la función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

El Hessiano es

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

por tanto en el punto $(0, 0)$

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz que es semidefinida postiva, el punto $(0, 0)$, cumple pues las condiciones de primer y segundo orden necesarias para ser un mínimo relativo local, pero al ser la matriz semidefinida no cumple las condiciones suficientes para garantizar que es un mínimo.

(c) Sin embargo el punto $(0, 0)$ es un punto de mínimo global, puesto que la función siempre es ≥ 0, y toma el menor valor cuando vale 0, y es precisamente en $(0, 0)$ el único punto donde la función se anula

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$$

Luego además de mínimo local es global.

La función no tiene máximos locales porque tendrían que cumplir las condiciones necesarias y ser un punto estacionario y tampoco tiene máximos globales puesto que la función crece indefinidamente cuando alguna de las variables crece.

3. (2.0 puntos) Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x + y \\ \text{Sujeto a} & x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \\ & y - x^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

(a) Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de Khun-Tucker.

Solución: Construimos la función Lagrangiana

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = x + y + \mu_1 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right) + \mu_2 \left(x^2 + 1 - y\right)$$

Donde la última restricción se ha puesto en la forma usual de $\leq$.

Las condiciones de Khun-Tucker son:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \frac{1}{2}\mu_1 y - \mu_2 = 0 \\ &\mu_1 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right) = 0 \\ &\mu_2 \left(x^2 + 1 - y\right) = 0 \\ &\mu_1, \mu_2 \text{ del mismo signo} \end{aligned}$$

junto con las desigualdades del problema

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$
$$y - x^2 - 1 \geq 0$$

Según las dos últimas ecuaciones de K-T tendremos 4 posibles casos

$$\begin{array}{lll} i) & \mu_1 = 0 & \mu_2 = 0 \\ ii) & \mu_1 = 0 & x^2 + 1 - y = 0 \\ iii) & \mu_2 = 0 & x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \\ iv) & x^2 + 1 - y = 0 & x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{array}$$

Veamos cada uno de ellos

i) $\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 0$

En este caso substituyendo en las primeras ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 0 \\ 1 & = & 0 \end{array}$$

que es imposible, luego este caso no puede darse.

ii) $\mu_1 = 0 \qquad x^2 + 1 - y = 0$

En este caso las ecuaciones de Khun-Tucker quedan

$$\begin{array}{lll} 1 + 2\mu_2 x = 0 & & \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 1 - \mu_2 = 0 & \Rightarrow \mu_2 = 1 & \\ x^2 + 1 - y = 0 & & \Rightarrow y = \frac{5}{4} \end{array}$$

Tenemos pues el punto

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \qquad \mu = (0, 1)$$

que por el signo de los multiplicadores podría ser un mínimo. A continuación hay que comprobar que el punto es factible, y para ello solamente nos queda comprobar la otra desigualdad:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \;\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{25}{16 * 4} = \frac{16 + 25}{64} < 1$$

Por tanto es factible.

iii) $\mu_2 = 0 \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

En este caso las ecuaciones de Khun-Tucker quedan (teniendo en cuenta que $\mu_1 \neq 0$)

$$\begin{array}{lll} 1 + 2\mu_1 x = 0 & \Rightarrow x = -\frac{1}{2\mu_1} & \\ 1 + \frac{1}{2}\mu_1 y = 0 & \Rightarrow y = -\frac{2}{\mu_1} & \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 & & \Rightarrow \frac{1}{4\mu_1^2} + \frac{4}{\mu_1^2 4} - 1 = 0 \;\Rightarrow \mu_1 = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \end{array}$$

Tenemos dos puntos

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right) \qquad \mu = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \\
P_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \qquad \mu = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

Mientras que P_2 puede ser un mínimo el punto P_3 puede ser un máximo. Pero primero hay que comprobar si ambos puntos son factibles, para ello tendrán que cumplir la desigualdad

$$
y - x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow
\begin{array}{ll}
P_2 \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5} - 1 < 0 & \Rightarrow P_2 \text{ es infactible} \\
P_3 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5} - 1 = 0.58885 > 0 & \Rightarrow P_3 \text{ es factible}
\end{array}
$$

iv) $x^2 + 1 - y = 0 \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

En este caso el sistema de ecuaciones que hay que resolver es:

$$
\begin{array}{l}
1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \\
1 + \frac{1}{2}\mu_1 y - \mu_2 = 0 \\
\left.\begin{array}{c} x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \\ x^2 + 1 - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y^2}{4} - 1 = 1 - y \Rightarrow y^2 + 4y - 8 = 0
\end{array}
$$

Hay dos posibles valores para y

$$
y = \left\{ \begin{array}{l} -2 + 2\sqrt{3} \\ -2 - 2\sqrt{3} \end{array} \right.
$$

Substituyendo en la última ecuación

$$
x^2 = y - 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll}
y = -2 + 2\sqrt{3} & \Rightarrow x^2 = -3 + 2\sqrt{3} = 0.4641 & \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} \\
y = -2 - 2\sqrt{3} & \Rightarrow x^2 = -3 - 2\sqrt{3} = -0.4641 & \text{Imposible}
\end{array} \right.
$$

La solución para μ_1 y μ_2 respecto a x e y es

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{1 + 2x}{2x + xy} = -\frac{1 + 2x}{x\,(2 + y)} \\
\mu_2 &= \frac{4x - y}{4x + 2xy} = \frac{4x - y}{2x\,(2 + y)}
\end{aligned}
$$

Por tanto tendremos dos puntos más

$$
\begin{aligned}
P_4 &= \left(\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}, -2 + 2\sqrt{3}\right) \qquad \mu = \left(-\frac{1 + 2\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\right)}, \frac{4\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} - \left(-2 + 2\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\right)}\right) \\
P_5 &= \left(-\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}, -2 + 2\sqrt{3}\right) \qquad \mu = \left(\frac{1 - 2\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\right)}, \frac{4\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} + \left(-2 + 2\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}\right)}\right)
\end{aligned}
$$

: : Para P_4 $\mu_1 = -1.0011 < 0$ y $\mu_2 = 0.26715 > 0$, por tanto no puede ser ni mínimo ni máximo. Para P_5 ocurre $\mu_1 = -.15361 < 0$ y $\mu_2 = 0.88755 > 0$, luego tampoco será ni mínimo ni máximo.

Los únicos puntos que debemos considerar son

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \qquad \mu = (0,1)$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \qquad \mu = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

Por las características del problema (compacto y función continua) el problema tiene solución, además como el conjunto factible es convexo, igual que la función, los extremos se alcanzan, como de hecho ocurre, en la frontera del conjunto. De manera que se puede garantizar que estos son los mínimo y máximo del problema. De todas formas si recurrimos a la forma cuadrática

$$\mathrm{HL} = \mathrm{H}f + \mu_1 \mathrm{H}g_1 + \mu_2 \mathrm{H}g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu_1 + 2\mu_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\mathrm{d}) = (d_1, d_2) \begin{bmatrix} 2\mu_1 + 2\mu_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 2(\mu_1 + \mu_2) d_1^2 + \frac{1}{2}\mu_1 d_2^2$$

$$P_1 \Rightarrow \varphi_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{d}) = 2d_1^2 \geq 0$$

$$P_3 \Rightarrow \varphi_{\mathrm{P}_3}(\mathrm{d}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(2d_1^2 + \frac{1}{2}d_2^2\right) < 0$$

Que son respectivamente semidefinidas positiva para P_1 y definida negativa para P_3, luego este punto es un máximo, ya que no hay restricciones activas degeneradas. Para P_1, habrá problemas cuando $\mathrm{d} = (0, d_2)$, cualquiera que sea d_2, veamos que ocurre en el espacio tangente, teniendo en cuenta las restricciones activas en ese punto.

$$\begin{aligned} M(P_1) &= \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_2(P_1)^T \mathrm{d} = 0 \right\} = \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : (2x, -1)|_{\mathrm{P}_1} \mathrm{d} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : \left(2\left(-\frac{1}{2}\right), -1\right) \mathrm{d} = 0 \right\} = \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : -d_1 - d_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : d_2 = -d_1 \right\} = \left\{ \mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 : (d_1, -d_1) \right\} \end{aligned}$$

En este espacio la función $\varphi_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{d})$ es definida positiva, ya que el único punto donde se anula es el $(0,0)$.

4. Comprobemos a continuación la regularidad de los puntos

i) Activa g_1

$$\nabla g_1(x,y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right)$$

es linealmente independiente $\Leftrightarrow x = y = 0$, pero este punto no es factible.

ii) Activa g_2

$$\nabla g_2(x,y) = (2x, -1)$$

Siempre es linealmente independiente puesto que una de las componentes es fija y distinta de cero.

iii) Activas g_1 y g_2

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x,y) &= \left(2x, \frac{y}{2}\right) \\ \nabla g_2(x,y) &= (2x, -1) \end{aligned}$$

serán linealmente dependientes. bien cuando $\nabla g_1 = 0$, que ya ha sido contemplado o bien cuando

$$\left(2x, \frac{y}{2}\right) = \lambda (2x, -1)$$

en este caso se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \Leftrightarrow x = 0 \qquad \lambda = 1 \\ \frac{y}{2} &= -\lambda \Leftrightarrow y = -2\lambda \end{aligned}$$

Si $x = 0$, como las dos restricciones son activas

$$\begin{aligned} g_1(0, y) &= 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2 \\ g_2(0, y) &= 0 \Leftrightarrow 1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

que no tiene solución.
Si $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -2 \end{aligned}$$

y podría haber problemas con los puntos de la forma $(x, -2)$, como las restricciones deben ser activas

$$\begin{aligned} g_1(x, -2) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ g_2(x, -2) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \end{aligned}$$

De forma que tampoco hay solución.

De los tres casos anteriores se deduce que no hay puntos irregulares. Por tanto las soluciones del problema son los puntos P_1 (mínimo) y P_3 (máximo).

5. (1.75 puntos) Considerar el siguiente problema

$$\text{Minimizar} \quad f(x, y) = (x - 2)^2 + (2y - x)^2$$

(a) Partiendo del punto $\mathrm{x}_1 = (0, 2)$ minimiza $f(x, y)$ en la dirección $\mathrm{d}_1 = (1, 1)$.

(b) Buscar una dirección d_2, $\mathrm{H}f(x)$ conjugada con d_1 y minimiza $f(x, y)$ en esa dirección partiendo del punto obtenido en el apartado anterior.

(c) Comprobar que el punto obtenido en el apartado anterior es el mínimo del problema. ¿Por qué sucede esto?.

Solución:

(a) Tenemos que minimizar sobre los puntos de la forma

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 + \lambda \mathrm{d}_1 = (0, 2) + \lambda (1, 1) = (\lambda, 2 + \lambda)$$

Substituyendo en la función

$$g_1(\lambda) = f(\mathrm{x}_2) = f(\lambda, 2 + \lambda) = (\lambda - 2)^2 + (2(2 + \lambda) - \lambda)^2 = (\lambda - 2)^2 + (4 + \lambda)^2$$

Derivando para obtener los puntos estacionarios

$$g_1'(\lambda) = 2(\lambda - 2) + 2(4 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

que se puede comprobar, derivando de nuevo, que se trata de un mínimo

$$g_1''(\lambda) = 2 + 2 = 4 > 0$$

Luego el nuevo punto es

$$\mathrm{x}_2 = (-1, 1)$$

Calculamos primero el Hessiano

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Buscamos a continuación una dirección Hf–conjugada con d_1

$$\mathrm{d}_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \mathrm{d}_1 = 0 \Leftrightarrow (a, b) \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a, b) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Luego la dirección buscada es de la forma

$$\mathrm{d}_2 = (a, 0)$$

tomamos una, la unitaria

$$\mathrm{d}_2 = (1, 0)$$

y minimizamos a partir del punto anterior en esa dirección

$$\mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_2 + \lambda \mathrm{d}_2 = (-1, 1) + \lambda (1, 0) = (-1 + \lambda, 1)$$

construimos pues la función en una variable

$$g_2(\lambda) = f(\mathrm{x}_3) = f(-1 + \lambda, 1) = (-1 + \lambda - 2)^2 + (2 * 1 - (-1 + \lambda))^2 = (\lambda - 3)^2 + (3 - \lambda)^2$$

derivando para obtener el mínimo

$$g_2'(\lambda) = 2(\lambda - 3) - 2(3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

que de nuevo se trata de un mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada

$$g_2'(\lambda) = 2 + 2 > 0$$

luego el nuevo punto es

$$\mathrm{x}_3 = (2, 1)$$

(b) Para comprobar que es el mínimo podemos observar que la función es suma de dos cuadrados y por tanto siempre es ≥ 0, el mínimo se alcanzará en el punto en que la función se anule.

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (2y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2 = 0 & \Rightarrow x = 2 \\ 2y - x = 0 & \Rightarrow y = 1 \end{array} \right.$$

que es el punto encontrado anteriormente. La explicación a este hecho tan sorprendente es que la función f es cuadrática y para este tipo de funciones el algoritmo de las direcciones conjugadas, converge a la solución en $n = 2$ pasos

6. (2.0 puntos) Un sistema unidimensional regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$) en un tiempo infinito, por tanto se aplica una función de control para acelerar este proceso. La ecuación de estado y la función de coste están dadas por

$$\dot{x} = -x + u$$

$$J = \int_0^{t_1} \left(k + \frac{1}{2} u^2 \right) dt$$

donde k es una constante positiva y $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{u}}$. Encontrar el control optimal, si existe, que minimiza el índice J, cuando el sistema va desde el estado inicial $x(0) = 1$, hasta el estado final $x(t_1) = 0$, en los siguientes casos:

(a) $t_1 = 1$

(b) t_1 libre

Se trata de un problema de control no acotado por tanto podemos aplicar las condiciones necesarias generales para encontrar el control optimal. Construimos para ello el Hamiltoniano

$$H = k + \frac{1}{2}u^2 + p(-x+u)$$

y planteamos las ecuaciones de estado, co-estado y estacionaria

$$\begin{array}{llll}
\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \Rightarrow \dot{p} = p & \Rightarrow p = Ae^{t} & \\
\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} & \Rightarrow \dot{x} = -x + u & & \Rightarrow \dot{x} = -x - Ae^{t} \\
\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 & \Rightarrow u + p = 0 & \Rightarrow u = -p & \Rightarrow u = -Ae^{t}
\end{array}$$

Donde A es una constante.

La solución de la segunda ecuación es, utilizando el método de variación de las constantes

$$x(t) = -\frac{A}{2}e^{t} + Ce^{-t}$$

con C otra constante. Ambas constantes, A y C, tendremos que determinarlas en cada caso según las condiciones de contorno.

(a) Para $t_1 = 1$

Puesto que $x(t_1) = 0$, estamos en el caso en el que t_1 y $x(t_1)$ son fijos y por tanto la condición de contorno se cumple trivialmente ya que $dt_1 = 0$ y $dx(t_1) = 0$. Aplicando estas condiciones a las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned}
x(0) &= 1 \Leftrightarrow -\frac{A}{2}e^{0} + Ce^{-0} = -\frac{A}{2} + C = 1 \\
x(1) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{2}e^{1} + Ce^{-1} = -\frac{A}{2}e + Ce^{-1} = 0 \Leftrightarrow e^{-1}\left(-\frac{A}{2}e^{2} + C\right) = 0
\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema en A y C

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{e^2 - 1} \\
C &= \frac{e^2}{e^2 - 1}
\end{aligned}$$

(b) Para t_1 libre

Las ecuaciones de estado, co-estado y estacionarias son las mismas, solamente queda por determinar las constantes. En este caso $dt_1 \neq 0$, puesto que t_1 es libre, pero $dx(t_1) = 0$, porque sigue siendo el estado final fijo. Las condiciones de contorno en este caso son

$$(H)|_{t=t_1} dt_1 = 0 \Rightarrow H(t_1) = 0$$

donde se ha tenido en cuenta que $\phi \equiv 0$ y que $\psi \equiv 0$. Por tanto las ecuaciones en este caso son

$$\begin{aligned}
x(0) &= 1 \Leftrightarrow -\frac{A}{2}e^{0} + Ce^{-0} = -\frac{A}{2} + C = 1 \\
x(t_1) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{2}e^{t_1} + Ce^{-t_1} = e^{-t_1}\left(-\frac{A}{2}e^{2t_1} + C\right) = 0 \\
H(t_1) &= 0 \Leftrightarrow k + \frac{1}{2}u(t_1)^2 + p(t_1)(-x(t_1) + u(t_1)) = 0
\end{aligned}$$

En la última de las ecuaciones podemos tener en cuenta que $x(t_1) = 0$ y que $p(t_1) = -u(t_1)$, para obtener

$$k + \frac{1}{2}u(t_1)^2 - u(t_1)^2 = 0 \Leftrightarrow k - \frac{1}{2}u(t_1)^2 = 0$$

Y teniendo en cuenta la expresión de $u(t) = -Ae^{t}$

$$k - \frac{1}{2}A^2e^{2t_1} = 0$$

El sistema que hay que resolver es entonces

$$\begin{aligned} -\frac{A}{2} + C &= 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{A}{2} \\ -\frac{A}{2}e^{2t_1} + C &= 0 \Rightarrow C = \frac{A}{2}e^{2t_1} \\ k - \frac{1}{2}A^2e^{2t_1} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}A^2e^{2t_1} = k \end{aligned}$$

Utilizando las dos primeras

$$1 + \frac{A}{2} = \frac{A}{2}e^{2t_1} \Rightarrow \frac{A}{2}\left(e^{2t_1} - 1\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{e^{2t_1} - 1}$$

Mientras que de las dos últimas obtenemos

$$CA = k \Rightarrow C = \frac{k}{A} = \frac{k\left(e^{2t_1} - 1\right)}{2}$$

Para determinar t_1 substituimos A en la última ecuación

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{2t_1} - 1}\right)^2 e^{2t_1} = k$$

Hacemos cambio $e^{2t_1} = z$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z - 1}\right)^2 z = k \Rightarrow \frac{2z}{(z-1)^2} = k$$

$$2z = k(z-1)^2 \Rightarrow 2z = k\left(z^2 - 2z + 1\right) \Rightarrow kz^2 - 2(k+1)z + k = 0$$

cuyas raíces son

$$z = \frac{2(k+1) \pm \sqrt{4(k+1)^2 - 4k^2}}{2k} = \frac{(k+1) \pm \sqrt{2k+1}}{k}$$

Desaciendo el cambio

$$e^{2t_1} = \frac{(k+1) \pm \sqrt{2k+1}}{k} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{(k+1) \pm \sqrt{2k+1}}{k}$$

para que el tiempo sea positivo el argumento del logaritmo tiene que ser ≥ 1, pero para el signo $-$

$$\frac{(k+1) - \sqrt{2k+1}}{k} \geq 1 \Leftrightarrow (k+1) - \sqrt{2k+1} \geq k \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2k+1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{2k+1}$$

pero como $k > 0$, por hipótesis esta desigualdad no se cumple nunca y por tanto el signo menos no sirve

$$t_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{(k+1) + \sqrt{2k+1}}{k}$$

si $k \to \infty$, entonces podemos ver que $t_1 \to 0$, es decir, el tiempo en alcanzar el estado final influye más en el objetivo que el “combustible” u gastado, mientras que si $k \to 0$, entonces $t_1 \to \infty$.