Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingenierio en Automática y Electrónica Industrial
Asignatura: Optimización y Control Óptimo
Convocatoria de Junio: 12-Junio-1998
Prof.: Silvestre Paredes Hernández

1.- ALGORITMOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS

1. La función es

$$f(t) = (t-2)^4 + (t-2)^2 - (t-3)^2 - e^{t/2}$$

(a) 1ª Iteración: El primer intervalo es $[a_1, b_1] = [1, 3]$

$$\lambda_1 = a_1 + (1-\tau)(b_1 - a_1) = 1 + (1 - 0.618) * (3-1) = 1.764$$

$$\mu_1 = a_1 + \tau(b_1 - a_1) = 1 + 0.618 * (3-1) = 2.236$$

$$f(\lambda_1) = -2.3964 > f(\mu_1) = -3.0657$$

Por tanto el nuevo intervalo es $[a_2, b_2] = [\lambda_1, b_1] = [1.764, 3]$

(b) 2ª Iteración:

$$\lambda_2 = \mu_1 = 2.236$$

$$\mu_2 = a_2 + \tau(b_2 - a_2) = 1.764 + 0.618 * (3 - 1.764) = 2.5278$$

$$f(\lambda_2) = -2.3964 > f(\mu_2) = -3.5310$$

Por tanto el nuevo intervalo será $[a_3, b_3] = [\lambda_2, b_2] = [2.236, 3]$

(c) En cada iteración el intervalo se reduce una cantidad τ, es decir, si la longitud del intervalo inicial es 1, después de la primera iteración se reduce a $\tau = 0.618$. Por tanto después de n iteraciones el intervalo resultante $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tendrá longitud τ^n. Si partimos de un intervalo inicial $[a, b]$, la longitud del intervalo resultante después de n iteraciones será $\tau^n(b-a)$, por tanto, para un error de 0.001 se debe cumplir

$$\tau^n(b-a) < 0.001 \Leftrightarrow \tau^n < \frac{0.001}{(b-a)} \Leftrightarrow n \ln\tau < \ln\frac{0.001}{(b-a)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{0.001}{(b-a)}}{\ln\tau}$$

Notar el cambio de signo en la desigualdad, ya que $\ln\tau < 0$. Para este problema $b = 6$, $a = 0.25$, por tanto

$$n > \frac{\ln\frac{0.001}{(3-1)}}{\ln 0.618} = 15.794$$

:Y tendremos que dar $n = 16$ iteraciones para conseguir ese error.

(d) En cada iteración el intervalo se reduce una cantidad $\frac{1}{2}$, es decir, si la longitud del intervalo inicial es 1, después de la primera iteración se reduce a $\frac{1}{2}$. Por tanto después de n iteraciones el intervalo resultante $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tendrá longitud $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Si partimos de un intervalo inicial $[a, b]$, la longitud del intervalo resultante después de n iteraciones será $\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$, por tanto, para un error de 0.001 se debe cumplir

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) < 0.001 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{0.001}{(b-a)} \Leftrightarrow n \ln\frac{1}{2} < \ln\frac{0.001}{(b-a)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\dfrac{0.001}{(b-a)}}{\ln\dfrac{1}{2}}$$

Notar el cambio de signo en la desigualdad, ya que $\ln\frac{1}{2} < 0$. Para este problema $b = 6$, $a = 0.25$, por tanto

$$n > \frac{\ln\dfrac{0.001}{(3-1)}}{\ln\dfrac{1}{2}} = 10.966$$

Y tendremos que dar $n = 11$ iteraciones para conseguir ese error. Notar que aunque el número de iteraciones es menor que en el método de la sección áurea, cada iteración de este método necesita una sóla evaluación de la función, frente a las dos evaluaciones que necesita el método de bipartición.

2.- PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Llamemos

x_{ij}	Metros de viga tipo i que se hacen en la máquina j
$i = 1, 2, 3, 4$	Vigas pequeñas, medianas, grandes y extra grandes
$j = 1, 2, 3$	Máquina A, B y C

Las restricciones utilizando estas variables de decisión son:

(a) De demanda

$$\begin{array}{llll} x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & \geq 10000 \\ x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & \geq 8000 \\ x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & \geq 6000 \\ x_{41} & +x_{42} & +x_{43} & \geq 6000 \end{array}$$

(b) De tiempo de proceso: Si en una hora la máquina A produce 300 metros de viga del tipo 1 (pequeñas), entonces para producir x_{11} metros de viga 1 en esa máquina necesitamos

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftrightarrow & 300 \\ y & \longleftrightarrow & x_{11} \end{array}$$

$y = \frac{x_{11}}{300}$ horas. De manera análoga para los demás tipos de viga y todas las máquinas.

$$\begin{array}{lllll} \dfrac{x_{11}}{300} & +\dfrac{x_{21}}{250} & +\dfrac{x_{31}}{200} & \dfrac{x_{41}}{100} & \leq 50 \\ \dfrac{x_{12}}{600} & +\dfrac{x_{22}}{400} & +\dfrac{x_{32}}{350} & \dfrac{x_{42}}{200} & \leq 50 \\ \dfrac{x_{13}}{800} & +\dfrac{x_{23}}{700} & +\dfrac{x_{33}}{600} & \dfrac{x_{43}}{300} & \leq 50 \end{array}$$

(c) No negatividad: La producción de vigas no puede ser negativa

$$x_{ij} \geq 0$$

La función objetivo estará compuesta por el coste total de producción

$$
\begin{aligned}
&3000 * \left(\frac{x_{11}}{300} + \frac{x_{21}}{250} + \frac{x_{31}}{200} \quad \frac{x_{41}}{100} \right) + \\
&5000 * \left(\frac{x_{12}}{600} + \frac{x_{22}}{400} + \frac{x_{32}}{350} \quad \frac{x_{42}}{200} \right) + \\
&8000 * \left(\frac{x_{13}}{800} + \frac{x_{23}}{700} + \frac{x_{33}}{600} \quad \frac{x_{43}}{300} \right)
\end{aligned}
$$

2. Los dos primeros apartados del problema necesitan el conocimiento de la matriz básica; matriz que viene dada por las variables básicas del problema. La matriz está formada por las columnas $\left(A_1, A_2, A_6^h\right)$, por lo que la matriz B es

$$
B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

cuya inversa, al ser un problema con variables de holgura, la podemos encontrar en la tabla óptima entre las columnas de las variables de holgura

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} -50 & 0.5 & 0 \\ 75 & -0.25 & 0 \\ -25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}
$$

(a) Se trata de un cambio en un coeficiente tecnológico no básico, en el que cambiamos la columna inicial A_3 por otra modificada A'_3

$$
A_3 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hookrightarrow A'_3 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

de manera que el único coeficiente afectado, es el coeficiente de coste relativo a esta variable

$$
r'_3 = c_3 - c_B B^{-1} A'_3
$$

Teniendo en cuenta que el problema se ha resuelto utilizando minimización, entonces

$$
\begin{aligned}
c_3 &= -18000 \\
c_B &= (-10000, -15000, 0)
\end{aligned}
$$

y el coeficiente de coste relativo es el siguiente

$$
\begin{aligned}
r'_3 &= -18000 - (-10000, -15000, 0) \begin{bmatrix} -50 & 0.5 & 0 \\ 75 & -0.25 & 0 \\ -25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -18000 - (-10000, -15000, 0) \begin{bmatrix} -0.50 \\ 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = -18000 - (-13750) = -4250.0
\end{aligned}
$$

Como este coeficiente es negativo, la base deja de ser la óptima y esta variable puede entrar en la base. La nueva solución sería la siguiente; partiendo de la tabla actual e introduciendo los oportunos cambios

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	0	−0.5	−50	0.50	0	50
x_2	0	1	$\boxed{1.25}$	75	−0.25	0	25
x_6^h	0	0	0.25	−25	−0.25	1	25
	0	0	−4250	625000	1250	0	87500

Pivotando sobre 1.25

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_1	1	0.4	0	−20	0.40	0	60
x_3	0	0.8	1	60	−0.20	0	20
x_6^h	0	−0.2	0	40	−0.20	1	20
	0	3400	0	880000	400	0	96000

De manera que la nueva producción es

$$x^* = (60, 0, 20, 0, 0, 20)$$

Es decir 60 farcias y 20 lepordias

(b) En este caso se trata de una variación en el vector de coeficientes independientes,

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \hookrightarrow \mathrm{b}' = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

de manera que la nueva solución básica es

$$\mathrm{x}'_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{b}' = \begin{bmatrix} -50 & 0.50 & 0 \\ 75 & -0.25 & 0 \\ -25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55.00 \\ 17.50 \\ 27.50 \end{bmatrix}$$

de manera que la producción óptima cumpliendo las normas es

$$\mathrm{x}^{*\prime} = (55, 17.50, 0.0, 0, 27.50)$$

. El beneficio en este caso es

$$f' = 10000 * 55 + 15000 * 17.50 = 812500$$

Si seguimos con la producción actual el beneficio es

$$f = 875000$$

por lo que ajustarnos a las nuevas normas supone una pérdida de

$$|f - f'| = 875000 - 865000 = 10000 pts$$

mientras que si seguimos con la producción actual y pagamos la multa impuesta, la pérdida es

$$70000 pts$$

Luego hay que contaminar menos y ajustarnos a la nueva producción.

(c) La solución óptima del problema es

$$x^* = (50, 25, 0, 0, 0, 25)$$

El problema dual del problema original de maximización, tendrá 3 variables y tres restricciones. Puesto que $x_1^* \neq 0$ y $x_2^* \neq 0$, las restricciones 1 y 2 del problema dual en la solución óptima serán de igualdad.

$$\begin{array}{llll} 0.01\lambda_1^* & +3\lambda_2^* & +\lambda_3^* & = & 10000 \\ 0.02\lambda_1^* & +2\lambda_2^* & +\lambda_3^* & = & 15000 \end{array} \quad (1)$$

Además substituyendo la solución óptima en las restricciones

$$\begin{array}{llll} 0.01 * 50 & +0.02 * 25 & +0.03 * 0 & = 1 \equiv 1 \\ 3 * 50 & +2 * 25 & +1 * 0 & = 200 \\ 1 * 50 & +1 * 25 & +1 * 0 & = 75 \neq 100 \end{array}$$

Por tanto como la tercera restricción tiene holgura, la tercera variable del dual es nula, $\lambda_3^* = 0$. Substituyendo en las ecuaciones 1

$$\left.\begin{array}{lll} 0.01\lambda_1^* & +3\lambda_2^* & = 10000 \\ 0.02\lambda_1^* & +2\lambda_2^* & = 15000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda_1^* = 625000, \lambda_2^* = 1250$$

Por tanto la solución óptima del dual es

$$\boldsymbol{\lambda}^* = (625000, 1250, 0)$$

3.- PROGRAMACIÓN NO LINEAL

1. Planteamos la función Lagrangiana para este sistema.

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \lambda\left(x^2 + y^2 - r^2\right)$$

   (a) Puntos Regulares: Para ver si existe algún punto irregular, calculamos los gradientes de las restricciones, en este caso solamente tenemos una restricción

$$\nabla h(x,y) = (2x, 2y)$$

   Como solamente tenemos un vector, este será linealmente dependiente cuando sea el vector nulo, y esto solamente pasa cuando $x = y = 0$, es decir, el punto $(0,0)$ es el único punto no regular, pero este punto, no es FACTIBLE, porque no cumple la restricción, por tanto todos los puntos factibles son regulares, y por tanto, también, todos los posibles extremos relativos los vamos a encontrar resolviendo la ecuación

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0$$

   (b) Plantear el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2} + 2\lambda x &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2} + 2\lambda y &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

   (c) Resolución del sistema. Sacando factor común $2x$ en la primera ecuación, e $2y$ en la segunda obtenemos el siguiente sistema equivalente al anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(\frac{1}{a^2} + \lambda\right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(\frac{1}{b^2} + \lambda\right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

   De la primera ecuación

$$x = 0 \text{ ó } \lambda = -\frac{1}{a^2}$$

   Para $x = 0$, la última ecuación nos da

$$0^2 + y^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm r \neq 0$$

   este resultado llevado a la segunda ecuación nos da el valor de λ

$$\lambda = -\frac{1}{b^2}$$

   (para $y = r$ ó $y = -r$) y obtenemos los puntos

$$\mathrm{P}_1 = (0,r) \quad \lambda = -\frac{1}{b^2}$$

$$\mathrm{P}_2 = (0,-r) \quad \lambda = -\frac{1}{b^2}$$

Para $\lambda = -\frac{1}{a^2}$, si además suponemos que $a \neq -b$, este resultado junto con el enunciado del problema $a \neq b$, nos da el resultado siguiente

$$\frac{1}{b^2} + \lambda = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \neq 0$$

y de la segunda ecuación obtenemos $y = 0$, que llevado a la última (la restricción del problema) nos da los dos puntos restante

$$x^2 + 0 = r^2 \Leftrightarrow x = \pm r$$

Tenemos pues otro par de puntos

$$\mathsf{P}_1 = (r, 0) \quad \lambda = -\frac{1}{a^2}$$

$$\mathsf{P}_2 = (-r, 0) \quad \lambda = -\frac{1}{a^2}$$

(d) Condiciones de segundo orden. Para comprobar si son o no extremos los puntos anteriores comprobamos las condiciones de segundo orden calculando el Hessiano

$$\mathsf{H}f + \lambda \mathsf{H}h$$

en cada punto.
La expresión general de dicho hessiano es

$$\mathsf{H}L(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} + 2\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} + 2\lambda \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = -\frac{1}{b^2}$ (puntos P_1 y P_2)

$$\mathsf{H}L(\mathsf{P}_1) = \mathsf{H}L(\mathsf{P}_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} - \frac{2}{b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{H}_1$$

Para $\lambda = -\frac{1}{a^2}$ (puntos P_3 y P_4)

$$\mathsf{H}L(\mathsf{P}_3) = \mathsf{H}L(\mathsf{P}_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2} \end{bmatrix} = \mathsf{H}_2$$

El carácter de los Hessianos anteriores, H_1 y H_2, depende de a y b.

$$a^2 > b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} \Rightarrow \mathsf{H}_1 \text{ semidefinido negativo y } \mathsf{H}_2 \text{ semidefinido positivo}$$

$$a^2 < b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow \mathsf{H}_1 \text{ semidefinido positivo y } \mathsf{H}_2 \text{ semidefinido negativo}$$

(e) Plano tangente: El plano tangente está definido como

$$M(\mathsf{P}) = \left\{ \mathsf{d} \in \mathsf{R}^2 \middle| \nabla h(\mathsf{P})^{\mathsf{T}} \mathsf{d} = 0 \right\} = \left\{ \mathsf{d} \in \mathsf{R}^2 \middle| (2x_{\mathsf{P}}, 2y_{\mathsf{P}})^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$M(\mathsf{P}) = \left\{ \mathsf{d} \in \mathsf{R}^2 \middle| 2x_{\mathsf{P}} d_1 + 2y_{\mathsf{P}} d_2 = 0 \right\}$$

$$\begin{array}{lrl} \mathsf{P}_1 = (0, r) \Rightarrow & 2rd_2 = 0 & \Rightarrow M(\mathsf{P}) = \{(d_1, 0)\} \\ \mathsf{P}_2 = (0, -r) \Rightarrow & -2rd_2 = 0 & \Rightarrow M(\mathsf{P}) = \{(d_1, 0)\} \\ \mathsf{P}_3 = (r, 0) \Rightarrow & 2rd_1 = 0 & \Rightarrow M(\mathsf{P}) = \{(0, d_2)\} \\ \mathsf{P}_4 = (-r, 0) \Rightarrow & -2rd_1 = 0 & \Rightarrow M(\mathsf{P}) = \{(0, d_2)\} \end{array}$$

(f) Hessiano en el espacio tangente: Particularizando H_1 y H_2 en los espacios anteriores

$$\varphi(d) = d^T H_1 d = (d_1, d_2) \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) d_1^2$$

$$\varphi(d) = d^T H_2 d = (d_1, d_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) d_2^2$$

$$P_1 = (0, r) \Rightarrow \quad \Rightarrow M(P) = \{(d_1, 0)\} \quad \Rightarrow \varphi_1(d) = 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) d_1^2$$

$$P_2 = (0, -r) \Rightarrow \quad \Rightarrow M(P) = \{(d_1, 0)\} \quad \Rightarrow \varphi_2(d) = 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) d_1^2$$

$$P_3 = (r, 0) \Rightarrow \quad \Rightarrow M(P) = \{(0, d_2)\} \quad \Rightarrow \varphi_3(d) = 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) d_2^2$$

$$P_4 = (-r, 0) \Rightarrow \quad \Rightarrow M(P) = \{(0, d_2)\} \quad \Rightarrow \varphi_4(d) = 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) d_2^2$$

Si $a^2 > b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} \Rightarrow H_1$ def. negativo y H_2 def. positivo $\Rightarrow P_1, P_2$ máximos, P_3, P_4 mínimos

Si $a^2 < b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow H_1$ def. positivo y H_2 def. megativo $\Rightarrow P_1, P_2$ mínimos, P_3, P_4 máximos

2. Resolver Gráficamente

(a) La función de K-T es la siguiente

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = (x+3)^2 + y^2 + \mu_1\left(y - x^3\right) + \mu_2\left(-y - x^3\right)$$

y las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x+3) - 3\mu_1 x^2 - 3\mu_2 x^2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ & \mu_1 (y - x^3) &= 0 \\ & \mu_2 (-y - x^3) &= 0 \\ & \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

que para el punto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(0+3) - 3\mu_1 0^2 - 3\mu_2 0^2 = 6 &\neq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 * 0 + \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ & \mu_1 (0 - 0^3) &= 0 \\ & \mu_2 (-0 - 0^3) &= 0 \\ & \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego no se cumple la primera ecuación. Puesto que el punto $(0, 0)$ es gráficamente un mínimo y no se cumplen las condiciones de K-T, tiene que haber alguna de los requisitos que falle, veamos el referente a la regularidad (qué es por otra parte el único que quedaría por comprobar). El punto $(0, 0)$ es activo en las dos restricciones $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$, portanto, para ver si es regular tenemos que comprobar que el conjunto $\{\nabla g_1(x, y), \nabla g_2(x, y)\}$ es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x, y) &= \left(-3x^2, 1\right) \Rightarrow \nabla g_1(0, 0) = (0, 1) \\ \nabla g_2(x, y) &= \left(-3x^2, -1\right) \Rightarrow \nabla g_1(0, 0) = (0, -1) \end{aligned}$$

Como puede observarse el conjunto$\{\nabla g_1(x,y), \nabla g_2(x,y)\}$ es linealemente dependiente y por tanto el punto es no regular. Como consecuencia de este hecho el punto, aunque sea un extremo, al no ser regular no tiene porqué cumplir las condiciones de Kuhn-Tucker.

(b) No, puesto que el punto es no regular.

(c) La función necesaria es `constr`, para resolver problemas no lineales con restricciones. La forma de introducir los datos en esta función es la siguiente:

i. Crear un fichero-m de tipo `function`, con la definición de la función y de las restricciones

```
function [f,g]=fun(x)
f = (x(1) + 3)^2 + x(2)^2;
g(1) = x(2) - x(1)^3;
g(2) = -x(2) - x(1)^3;
```

ii. Utilizar la función `constr` con un punto de partida, por ejemplo (1,1)

```
constr('fun', [1, 1])
```

4.- MÉTODOS VARIACIONALES

1. En ambos casos aplicaremos la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0$$

(a) En este caso

$$F(x, y, y') = y^3 + 3x^2 y'$$

y la ecuación de Euler es

$$F_y = 3y^2$$

$$F_{y'} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 6x$$

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x$$

Como $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$, entonces, $y(0)^2 = 1$ e $y(1)^2 = 1$, pero la función $y^2 = 2x$, no cumple ninguna de esas condiciones, y portanto no hay extremal que cumpla esas condiciones.

(b) En este caso

$$F(x, y, y') = 2xy - (y')^2 + 3y'y$$

y la ecuación de Euler es

$$F_y = 2x + 3y'$$

$$F_{y'} = -2y' + 3y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = -2y'' + 3y'$$

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y' - (-2y'' + 3y') = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y'' = 0$$

$$2x + 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -x \Leftrightarrow y' = \frac{-x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y = \frac{-x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Como $y(0) = 1$ e $y(1) = -1$, entonces

$$y(0) = C_2 = 1$$

$$y(1) = \frac{-1}{6} + C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = -\frac{11}{6}$$

y la función extremal es por tanto

$$y = \frac{-x^3}{6} - \frac{11}{6} x + 1$$