Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería en automática y electrónica industrial
Asignatura: Optimización y control óptimo
Soluciones comentadas del examen de Julio 97

1. Para resolver cualquiera de los apartados del problema (análisis de la sensibilidad) necesitamos B^{-1} y c_B^T, que se pueden extraer de la tabla óptima. La base B está formada por los vectores s_1 y x_3, por lo tanto B será

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz B^{-1} la encontraremos donde se encontrara la identidad al principio del problema, en este caso corresponde a las columnas de las variables de holgura

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

el vector c_B^T se obtiene directamente de la función objetivo, como hemos considerado el problema de minimizar $-f$ estos coeficientes aparecen cambiados de signo

$$c_B^T = (0, -50)$$

(a) Se trata de una variación en el coeficiente que la variable x_2 (variable no básica, producto p_2) tiene en la función objetivo. Es decir, se trata de ver que variación tiene que experimentar el coeficiente c_2 para que x_2 entre en la base. Como estamos considerando la minimización de $-f$, tomamos $-c_2'$ el nuevo coeficiente de x_2 en la función objetivo. Para que x_2 entre en la base su coeficiente de coste relativo tiene que ser ≤ 0, por tanto

$$r_2' = -c_2' - c_B^T B^{-1} A_2 = -c_2' - (0, -50)\begin{pmatrix} -1 \\ 4/5 \end{pmatrix} = -c_2' + 40 \leq 0$$

$$-c_2' \leq -40 \Longleftrightarrow c_2' \geq 40$$

Por tanto x_2 entrará en la base si su precio es ≥ 40

(b) En este caso se trata de una variación en los coeficientes independientes, $b_1 = 450$ cambia a $b_1' = 480$. En este caso, vemos si la base óptima sigue siendo la misma. El nuevo valor de la solución básica será

$$x_B' = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 480 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 60 \end{bmatrix}$$

que sigue siendo factible y como los coeficientes de coste relativo no varían también será óptima. Los vectores de la base siguen siendo los mismos, y los valores de la solución óptima son $x^{*'} = (0, 0, 60, 180, 0)$ y el valor de la función objetivo es en este caso $z^{*'} = 3000$, el mismo valor que antes, por lo tanto NO es rentable la compra de esas toneladas adicionales, ya que producen un coste sin producir una mejora en la función objetivo.

(c) En este caso se trata de la incorporación de una nueva variable, x_4, que será la cantidad de producto p_4 producido. Esta nueva variable tiene un coeficiente de 60 en la función objetivo (-60 para el problema de minimización) y una columna de coeficientes tecnológicos $A_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, se trata, portanto, de ver si esta nueva variable entra en la base, para ello, hay que comprobar si su coeficiente de coste relativo es negativo o cero

$$\begin{aligned} r_4 &= -60 - (0, -50)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = -60 - (0, -50)\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= -60 - (-100) = 40 \end{aligned}$$

Como este coeficiente es positivo la variable x_4 no produce una mejora al entrar en la base y por tanto NO será rentable la producción de p_4.

2. Llamamos x_j a la producción en el trimestre j, e y_j a la producción extra en el trimestre j. En ese caso las restricciones son las siguientes.

Demanda

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &\geq 80,000 \\ x_2 + y_2 + \{x_1 + y_1 - 80,000\} &\geq 120,000 \\ x_3 + y_3 + \{x_2 + y_2 + \{x_1 + y_1 - 80,000\} - 120,000\} &\geq 110,000 \\ x_4 + y_4 + \{x_3 + y_3 + \{x_2 + y_2 + \{x_1 + y_1 - 80,000\} - 120,000\} - 110,000\} &= 90,000 \end{aligned}$$

Estas desigualdades expresan que la producción en cada trimestre tiene que ser superior o igual a la demanda en dicho trimestre. Equivalentemente el conjunto de desigualdades anteriores se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &\geq 80,000 \\ x_2 + y_2 + x_1 + y_1 &\geq 200,000 \\ x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 &\geq 310,000 \\ x_4 + y_4 + x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 &= 400,000 \end{aligned}$$

Almacén

Las restricciones debidas a la capacidad del almacen son las siguientes

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 - 80,000 &\leq 20,000 \\ x_2 + y_2 + x_1 + y_1 - 200,000 &\leq 20,000 \\ x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 - 310,000 &\leq 20,000 \end{aligned}$$

que nos indican que el producto producido menos la demanda no puede exceder la capacidad del almacén.

Capacidad de producción

Debido a las limitaciones en la producción las variables del problema, están acotadas de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3, x_4 & \leq & 95,000 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 & \leq & 30,000 \end{array}$$

No negatividad

Obviamente, todas las variables del problema son positivas o cero.

Función objetivo

El objetivo es minimizar los costes totales, que estarán compuesto por los costes de producción normales, los costes de producción extra y los costes de almacén.

$$700 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \text{ costes de producción normales}$$

$$1000 * (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \text{ costes de producción extras}$$

$$(3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2 + x_3 + y_3 - 310,000) * 200 \text{ coste de almacen}$$

La última ecuación es el resultado de sumar todos los excesos de producción en cada trimestre y multiplicarlos por el coste de almacenaje.

El problema lineal sería por tanto

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 700 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 1000 * (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \\ & (3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2 + x_3 + y_3 - 310,000) * 200 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 + y_1 \geq 80,000 \\ & x_2 + y_2 + x_1 + y_1 \geq 200,000 \\ & x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 \geq 310,000 \\ & x_4 + y_4 + x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 = 400,000 \\ & \\ & x_1 + y_1 - 80,000 \leq 20,000 \\ & x_2 + y_2 + x_1 + y_1 - 200,000 \leq 20,000 \\ & x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + x_1 + y_1 - 310,000 \leq 20,000 \\ & \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 95,000 \\ & 0 \leq y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 30,000 \end{array}$$

El problema se simplifica si introducimos variables de exceso en las primeras restricciones (restricciones de demanda). Si llamamos h_j al exceso de producción en el trimestre j el problema se puede plantear de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 700 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 1000 * (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \\ & (h_1 + h_2 + h_3) * 200 \\ \text{Sujeto a} & \\ & x_1 + y_1 - h_1 = 80,000 \\ & x_2 + y_2 + h_1 - h_2 = 120,000 \\ & x_3 + y_3 + h_2 - h_3 = 110,000 \\ & x_4 + y_4 + h_3 = 90,000 \\ & \\ & 0 \leq h_1, h_2, h_3 \leq 20,000 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 95,000 \\ & 0 \leq y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 30,000 \end{array}$$

Evidentemente cualquiera de los planteamientos anteriores sería válido, e incluso existe otro planteamiento equivalente.

(a) Gráficamente tenemos

Como se puede apreciar en el gráfico, el mínimo se va a alcanzar en el corte de la 2ª restricción con el eje OX, es decir, si hacemos $x_2 = 0$, en la 2ª restricción (considerando la igualdad), entonces $x_1 = 2/3$. La solución del problema es por tanto

$$\mathrm{x}^* = (2/3, 0)$$

Utilizamos ahora el teorema de holgura complementaria para problemas en forma simétrica

$$1^{\text{a}} \text{ restricción } \Rightarrow 2/3 + 0 < 1 \Rightarrow \text{ Hay holgura } \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ restricción } \Rightarrow 3 * 2/3 + 0 = 2 \Rightarrow \text{No hay holgura}$$

Como $x_1 > 0$ entonces no hay holgura en la restricción correspondiente del dual

$$c_1 - (\lambda_1, \lambda_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -1 - (0, \lambda_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2 = -1/3$$

La solución del problema dual es, por tanto

$$\boldsymbol{\lambda}^* = (0, -1/3)$$

(b) Como ya se vió en clase, si cambiamos de signo las restricciones y ponemos variables de holgura, tenemos

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	b
x_3^h	-1	-4	1	0	-24
x_4^h	-5	-1	0	1	-25
r	1	3	0	0	0

que tiene una solución $x = (0, 0, -24, -25)$ que es básica pero no factible primal, al ser los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas ≥ 0, esta solución es factible dual, y por tanto podemos aplicar el método simplex dual. Para ello elegimos uno de los coeficientes independientes negativos, como variable de salida. Por ejemplo el más negativo: -25, es decir, sale de la base la variable de holgura x_4^h. Para Elegir la variable de entrada calculamos el cociente entre el coeficiente de coste relativo y los elementos de la fila correspondiente a la variable de salida, es decir

$$\frac{r_1}{a_{21}} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{r_2}{a_{22}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Luego elegimos x_1 como la variable de entrada, el elemento pivote será -5, dando lugar a la tabla

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	b
x_3^h	0	$-19/5$	1	$-1/5$	-19
x_1	1	$1/5$	0	$-1/5$	5
r	0	$14/5$	0	$1/5$	-5

Podemos seguir aplicando el método simplex dual, ya que la nueva solución básica $x = (5, 0, -19, 0)$ no es factible pero es factible dual. La variable que sale de la base es ahora x_3^h y entra x_2 dando lugar a la tabla

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	b
x_2	1	0	$-5/19$	$1/19$	5
x_1	0	1	$1/19$	$-4/19$	4
r	0	0	$14/19$	$1/19$	-19

que es una tabla óptima para el primal, con solución óptima $x = (4, 5, 0, 0)$. El cálculo de la solución dual utilizando los multiplicadores simplex, es el siguiente. La base está formada por los vectores x_2 y x_1, por lo que la matriz básica será la formada por las columnas A_2 y A_1 del problema inicial

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es

$$\mathrm{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{1}{19} \\ -\frac{1}{19} & \frac{4}{19} \end{bmatrix}$$

por tanto la solución del dual será

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \mathrm{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathrm{B}^{-1} = (3, 1) \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & -\frac{1}{19} \\ -\frac{1}{19} & \frac{4}{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{19} \\ \frac{1}{19} \end{bmatrix}$$

que si nos damos cuenta son los coeficientes de coste relativo para las variables no básicas de la tabla óptima del problema primal.

(a) La función $f(x, y, z)$ es continua y definida en un conjunto cerrado y acotado (el conjunto que existe entre la esfera y el plano), por el teorema de Weierstrass la función tiene un máximo absoluto sobre el conjunto

(b) Observando el gráfico, podemos comprobar que el máximo sobre el conjunto se va a obtener en la superficie de nivel que toque al plano por primera vez, por tanto, las restricciones activas serán $z \geq 0$ y $x + y + z \leq 5$.
Veamos en primer lugar si hay puntos irregulares para esas dos restricciones activas:

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

$$\nabla g_5(x, y, z) = (1, 0, 0)$$

Estos dos vectores son linealmente independientes para cualquier punto factible en el que sean activas las dos restricciones, por lo tanto, si en el punto de máximo estas dos restricciones son las únicas que tienen que estar activas, entonces, en el punto de máximo se tienen que cumplir las condiciones necesarias de primer orden para maximización con restricciones, es decir, las condiciones de Khun-Tucker.
Planteamos las condiciones de Khun-Tucker para este problema

$$L(x, \mu) = xy + \mu_1(x + y + z - 5) + \mu_2(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \mu_3 x + \mu_4 y + \mu_5 z$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \mu_1 + 2\mu_2 x + \mu_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \mu_1 + 2\mu_2 y + \mu_4 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = \mu_1 + 2\mu_2 z + \mu_5 = 0$$
$$\mu_1(x + y + z - 5) = 0$$
$$\mu_2(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0$$
$$\mu_3 x = 0$$
$$\mu_4 y = 0$$
$$\mu_5 z = 0$$

junto con las restricciones del conjunto.
Como las únicas restricciones activas son la primera y la última tenremos

$$x + y + z - 5 = 0 \text{ porque la } 1^{\text{a}} \text{ restricción está activa}$$
$$\mu_2 = 0 \text{ porque la } 2^{\text{a}} \text{ restricción no está activa}$$
$$\mu_3 = 0 \text{ porque la } 3^{\text{a}} \text{ restricción no está activa}$$
$$\mu_4 = 0 \text{ porque la } 4^{\text{a}} \text{ restricción no está activa}$$
$$z = 0 \text{ porque la } 5^{\text{a}} \text{ restricción está activa}$$

Y el sistema queda como sigue

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \mu_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \mu_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = \mu_1 + \mu_5 = 0$$
$$x + y - 5 = 0$$
$$\mu_2 = 0$$
$$\mu_3 = 0$$
$$\mu_4 = 0$$
$$z = 0$$

De las dos primeras ecuaciones, obtenemos $x = y$, sin más que restar una de la otra. Utilizando esta ecuación en la ecuación del plano:

$$x + y - 5 = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/2$$

Y obtenemos el punto

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$\mu_1 = -\frac{5}{2}$$

Y sustituyendo este valor en la quinta ecuación obtenemos

$$\mu_5 = \frac{5}{2}$$

Cómo estamos maximizando y la primera restricción es de $\leq$ el multiplicador asociado tiene que ser negativo, como así ocurre. Sin embargo, como la quinta restricción es de $\geq$ el multiplicador asociado, μ_5, tiene que ser positivo, que es lo que efectivamente pasa.
Sólo queda por ver si se cumplen las condiciones de segundo orden. Si calculamos el Hessiano de la función lagrangiana y lo evaluamos en ese punto obtenemos

$$\begin{aligned} HL &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu_1 [0] + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu_3 [0] + \mu_4 [0] + \mu_5 [0] \\ &= \begin{bmatrix} 2\mu_2 & 1 & 0 \\ 1 & 2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $\mu_2 = 0$ en el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$, el hessiano en ese punto es

$$HL\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya forma cuadrática es

$$\varphi(d_1, d_2, d_3) = 2d_1 d_2$$

que es indefinida, luego hay que ir al espacio tangente, $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$

$$M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) = \left\{ d \in \mathbb{R}^3 \middle| \; \nabla g_j \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^T d = 0, \text{ con } g_j \text{ activa} \right\}$$

g_1 y g_5 son las restricciones activas, por tanto:

$$\nabla g_1 \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^T d = (1, 1, 1) \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = d_1 + d_2 + d_3 = 0$$

$$\nabla g_5\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\right)^T d = (0,0,1)\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = d_3 = 0$$

Substituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos que los vectores del espacio tangente son los puntos de la forma

$$(d_1, -d_1, 0)$$

y en esos puntos la forma cuadrática φ vale

$$\varphi(d_1, -d_1, 0) = -2d_1^2 \leq 0$$

que es definida negativa, luego en $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\right)$ hay un máximo relativo estricto.

3. Las curvas de nivel, y las restricciones para este problema, son:

y se puede apreciar perfectamente que el máximo de la función, sujeto a las restricciones se alcanza en el punto $(1,0)$. Veamos que no se cumplen las condiciones de Khun-Tucker en ese punto. La función lagrangiana para este problema es

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = x + \mu_1\left(y-(1-x)^3\right) + \mu_2 y$$

y el sistema de ecuaciones que nos dan las condiciones de K-T es

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 3\mu_1\left(1-x^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\mu_1\left(y-(1-x)^3\right) = 0$$

$$\mu_2 y = 0$$

Si sustituimos ahora el punto en cuestión, $(1,0)$, en la ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 3\mu_1\left(1-1^2\right) = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{Contradicción, no se cumple}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2$$

$$\mu_1\left(0-(1-1)^3\right) = 0 \Rightarrow \text{ Se cumple}$$

$$\mu_2 0 = 0 \Rightarrow \text{ Se cumple}$$

Luego $(1,0)$ no cumple la primera ecuación, y por tanto no cumple las condiciones de K-T. Recordemos que un punto de extremo (máximo o mínimo) tiene que cumplir las condiciones de K-T cuando este sea regular para las restricciones activas. Veamos que esto no sucede para $(1,0)$. En este punto ambas soluciones son activas

$$g_1(1,0) = 0-(1-1)^3 = 0$$

$$g_2(1,0) = 0$$

Los gradientes de estas restricciones son

$$\nabla g_1(x,y) = \left(3(1-x)^2, 1\right)$$

$$\nabla g_2(x,y) = (0,1)$$

y en el punto $(1,0)$

$$\nabla g_1(1,0) = (0,1)$$

$$\nabla g_2(1,0) = (0,1)$$

Como se puede comprobar ambos vectores son inguales y por tanto linealmente dependientes, el punto $(1,0)$ NO ES REGULAR.