Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Optimización y Control Óptimo
Ingeniería en Automática y Electrónica Industrial
18 de junio de 2007

<u>OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN</u>:

1.- Responde razonadamente a las preguntas.
2.- Resuelve cada apartado de forma independiente.
3.- Los resultados graves invalidan cualquier resultado posterior.
4.- Por favor, expresa los resultados con claridad, evitando excesivas tachaduras.
5.- Si utilizas cálculos aproximados debes emplear 4 cifras decimales significativas por redondeo.

1. **Dado el siguiente problema de optimización no lineal**

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Optimizar} & f(x,y,z) = x+y+z \\ \text{s.a.} & y^2+z^2 \leq 1 \\ & x^2+y^2+z^2 \leq 3 \end{array}\right\}$$

responde a cada uno de los siguientes apartados

(a) **(0.25 puntos) Demuestra mediante la definición que la función objetivo es convexa.**
(b) **(0.25 puntos) Estudia la convexidad del conjunto factible.**
(c) **(0.25 puntos) Comprueba si el punto $\left(\sqrt{2},1,0\right)$ es o no un punto regular.**
(d) **(2.0 puntos) Encuentra, si existen, los extremos locales y globales del problema, utilizando para ello el método de los multiplicadores de KKT.**
(e) **(0.25 puntos) ¿Cuál es la nueva solución si la primera restricción se cambia por $y^2+z^2 \leq 1.05$?.**

Solución: Resolveremos cada apartado de forma independiente:

(a) La función es lineal y por tanto cóncava y convexa, no obstante, tal y como se pide en el enunciado realizaremos la demostración mediante la definición, para ello tomamos dos puntos (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) y evaluamos la función en el segmento que los une

$$f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2,z_2)) = f((\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2, \lambda z_1+(1-\lambda)z_2))$$

utilizamos la definición de f

$$f((\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2, \lambda z_1+(1-\lambda)z_2)) = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\lambda y_1+(1-\lambda)y_2+\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$$

y reagrupando

$$\lambda(x_1+y_1+z_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2+z_2) = \lambda f(x_1+y_1+z_1)+(1-\lambda)f(x_2+y_2+z_2)$$

y por tanto

$$f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2,z_2)) = \lambda f(x_1+y_1+z_1)+(1-\lambda)f(x_2+y_2+z_2)$$

que puede ponerse como

$$f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2,z_2)) \leq \lambda f(x_1+y_1+z_1)+(1-\lambda)f(x_2+y_2+z_2)$$

y f es convexa (observamos que si cambiamos $\leq$ por $\geq$ comprobaremos que también es cóncava) .

(b) El conjunto factible de este problema es la intersección de 2 conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\begin{array}{rcl} \Omega_1 & = & \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad y^2 + z^2 \leq 1 \right\} \quad \text{(cilindro)} \\ \Omega_2 & = & \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \right\} \quad \text{(esfera)} \end{array}$$

Los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son de la forma

$$\Gamma_k = \{ g_j (\mathbf{x}) \leq k \} \qquad j = 1, 2$$

por tanto, si $g_1 (\mathbf{x})$ y $g_2 (\mathbf{x})$ fueran funciones convexas, podríamos asegurar que tanto Ω_1 como Ω_2 serían conjuntos convexos. Este hecho es muy fácil de demostrar, puesto que

$$g_1 (x,y,z) = y^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_1 (x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g_1 (x,y,z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{ g_1 (x) \leq k \}$ será convexo, en nuestro caso $k = 1$.

De la misma forma

$$g_2 (x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_2 (x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g_2 (x,y,z)$ es una función convexa y cualquier conjunto de la forma $\Gamma_k = \{ g_2 (x) \leq k \}$ será convexo, en nuestro caso $k = 3$.

Puesto que Ω_1 y Ω_2 son conjuntos convexos Ω también será un conjunto convexo por ser la intersección de ambos.

(c) Para comprobar la regularidad del punto $P = \left(\sqrt{2}, 1, 0 \right)$, tenemos que ver en primer lugar cuales de las restricciones son activas en él

$$\left(\sqrt{2}, 1, 0 \right) \quad \Rightarrow \quad g_1 \left(\sqrt{2}, 1, 0 \right) = 1^2 + 0^2 - 1 = 0 \Rightarrow \;\; g_1 \text{ es activa en } P$$

$$\left(\sqrt{2}, 1, 0 \right) \quad \Rightarrow \quad g_2 \left(\sqrt{2}, 1, 0 \right) = \left(\sqrt{2} \right)^2 + 1^2 + 0^2 - 3 = 0 \Rightarrow \;\; g_2 \text{ es activa en } P$$

y después considerar la familia formada por los gradientes de las restricciones activas (ambas) en dicho punto

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1 (P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1 (P) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y comprobamos que ambos vectores son linealmente independientes, luego P es regular.

(d) Podemos dar alguna información sobre los máximos y mínimos del problema. En primer lugar vemos que el conjunto factible es cerrado (contiene a la frontera) y acotado ($\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \Omega_2$, que es una bola de centro $(0,0,0)$ y radio $\sqrt{3}$), por tanto es compacto y como la función es continua por ser una función polinomial por el teorema de Weierstrass la función tendrá un máximo y un mínimo sobre el conjunto factible, es decir, *el problema tiene solución.*

En segundo lugar vemos que la función objetivo es lineal y por tanto es cóncava y convexa a la vez. Con esta información podemos decir:

i. Como f es convexa sobre Ω convexo y compacto y tiene máximo en $\Omega \Rightarrow$ El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
ii. Como f es cóncava sobre Ω convexo y compacto y tiene mínimo en $\Omega \Rightarrow$ El mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.
iii. Como f es convexa sobre Ω convexo $\Rightarrow$ Todo mínimo local es global.
iv. Como f es cóncava sobre Ω convexo $\Rightarrow$ Todo máximo local es global.
v. Como f es convexa sobre Ω convexo y $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
vi. Como f es cóncava sobre Ω convexo y $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser máximo local, automáticamente lo será.
vii. Como Ω es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el punto $(0,0,0)$ está en su interior $\Rightarrow$ Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.

$$
\begin{aligned}
y^2+z^2 &= 0^2+0^2=0<1 \\
x^2+y^2+z^2 &= 0^2+0^2+0^2=0<3
\end{aligned}
$$

viii. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces el mínimo y máximo globales, que existen por el teorema de Weierstrass, deben cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
ix. Utilizaremos ahora los multiplicadores para construir la función Lagrangiana

$$L(x,y,z) = x+y+z+\mu_1\left(y^2+z^2-1\right)+\mu_2\left(x^2+y^2+z^2-3\right)$$

y planteremos las condiciones de KKT:

A. *Condición Estacionaria*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow 1+2\mu_2 x=0 && (1)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Leftrightarrow 1+2\mu_1 y+2\mu_2 y=0 && (2)\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \Leftrightarrow 1+2\mu_1 z+2\mu_2 z=0 && (3)
\end{aligned}
$$

B. *Condición de factibilidad*

$$
\begin{aligned}
y^2+z^2-1 &\leq 0 \\
x^2+y^2+z^2-3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

C. *Condición de positividad*

$$
\begin{aligned}
\mu_1,\mu_2 &\geq 0 \Rightarrow \text{ Para mínimo}\\
\mu_1,\mu_2 &\leq 0 \Rightarrow \text{ Para máximo}
\end{aligned}
$$

D. *Condición de holgura*

$$
\begin{aligned}
\mu_1 g_1(x) &= 0 \Leftrightarrow \mu_1\left(y^2+z^2-1\right)=0 && (4)\\
\mu_2 g_2(x) &= 0 \Leftrightarrow \mu_2\left(x^2+y^2+z^2-3\right)=0 && (5)
\end{aligned}
$$

El sistema que hay que resolver estará formado por las ecuaciones 1, 2, 3, 4 y 5.

Utilizamos el proceso usual para resolver el sistema anterior empleando en primer lugar las condiciones de holgura 4 y 5. Se distinguen cuatro casos:

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \text{Caso I} \\ x^2+y^2+z^2-3=0 & \text{Caso II} \end{cases} \\ y^2+z^2-1=0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \text{Caso III} \\ x^2+y^2+z^2-3=0 & \text{Caso IV} \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos cada uno de forma independiente:

(a) **Caso I** ($\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$)**:** Este caso es imposible, puesto que sustituyendo en la primera ecuación del sistema (ecuación 1) obtenemos: $1 = 0$

(b) **Caso II** $\big(\mu_1 = 0,\ x^2+y^2+z^2-3=0\big)$**:** Sustituyendo el valor de $\mu_1 = 0$ en las ecuaciones del sistema obtenemos

$$1 + 2\mu_2 x = 0 \tag{6}$$

$$1 + 2\mu_2 y = 0 \tag{7}$$

$$1 + 2\mu_2 z = 0 \tag{8}$$

$$x^2+y^2+z^2-3 = 0 \tag{9}$$

Restando 6 y 7 obtenemos

$$(1+2\mu_2 x) - (1+2\mu_2 y) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2\,(x-y) = 0$$

y como μ_2 no puede ser cero puesto que entonces la primera ecuación nos da $1 = 0$ se llega a la conclusión de que

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \tag{10}$$

Si restamos 6 y 8

$$(1+2\mu_2 x) - (1+2\mu_2 z) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2\,(x-z) = 0$$

que nos proporciona (teniendo en cuenta que $\mu_2 \neq 0$)

$$x = z \tag{11}$$

Como $x = y = z$, sustituimos en 9

$$x^2+y^2+z^2-3 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} x &= z = \pm 1 \\ y &= x \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$, podemos despejar μ_2 de 6 (o de 8) para obtener su valor

$$\mu_2 = -\frac{1}{2x} = \mp\frac{1}{2}$$

Finalmente para este caso hemos obtenido 2 puntos

$$P_1 = (1,1,1) \qquad \mu = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = (-1,-1,-1) \qquad \mu = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Sin embargo estos puntos no son factibles ya que

$$P_1 = (1,1,1) \Rightarrow y^2 + z^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \nleqq 1$$

$$P_2 = (-1,-1,-1) \Rightarrow y^2 + z^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \nleqq 1$$

por tanto son puntos no válidos para el problema.

(c) **Caso III** $\left(y^2 + z^2 - 1 = 0,\, \mu_2 = 0\right)$**:** Este caso también es imposible, puesto que sustituyendo $\mu_2 = 0$ en la ecuación 1 del sistema volvemos a obtener una inconsistencia del tipo $1 = 0$.

(d) **Caso IV** $\left(y^2 + z^2 - 1 = 0,\, x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0\right)$**:** En este último caso el sistema que hay que resolver es

$$1 + 2\mu_2 x = 0 \tag{12}$$

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \tag{13}$$

$$1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z = 0 \tag{14}$$

$$y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{15}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \tag{16}$$

La operación que debemos hacer a continuación está muy clara, restar las ecuaciones 15 y 16 para obtener

$$\left(y^2 + z^2 - 1\right) - \left(x^2 + y^2 + z^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Si ahora sustituimos el valor de x encontrado en 12 obtenemos el valor de μ_2

$$\mu_2 = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2\left(\pm\sqrt{2}\right)} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Si ahora restamos 13 y 14

$$(1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y) - (1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z) = 0$$

Y agrupando y sacando factor común obtenemos

$$2\mu_1 (y - z) + 2\mu_2 (y - z) = 0 \Leftrightarrow 2(\mu_1 + \mu_2)(y - z) = 0$$

Esta ecuación nos proporciona 2 opciones. La primera de ellas es

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

que no nos produce ningún punto, puesto que en este caso

$$\mu_1 = -\mu_2$$

y como $\mu_2 \neq 0$, los dos multiplicadores tendrían distinto signo y en los mínimos y máximos locales los multiplicadores deben tener el mismo signo. Nos queda solamente el segundo caso:

$$y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación 15

$$y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

mientras que y será

$$y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por último nos queda por determinar el valor de μ_1, para ello utilizamos la ecuación 14

$$1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 - \frac{1}{2z}$$

Teniendo en cuenta los distintos valores para μ_2 (2 valores) y z (otros 2), las posibles opciones son

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} && (17)\\
\mu_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}} && (18)\\
\mu_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} && (19)\\
\mu_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} && (20)
\end{aligned}$$

Los casos 18 y 19 no sirven puesto que los multiplicadores μ_1 y μ_2 tienen distinto signo.

Finalmente quedan dos puntos

$$\begin{aligned}
P_3 &= \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mu = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\\
P_4 &= \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mu = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

que son factibles y cumplen las condiciones de KKT para ser máximo local y mínimo local respectivamente, como se ha comprobado al principio, el problema tenía solución y ésta debía encontrarse mediante las condiciones de KKT, como P_3 y P_4 son los únicos puntos que cumplen dichas condiciones, esto implica que son los máximo (P_3) y mínimo (P_4) globales del problema.

2. **(2.0 puntos) La enfermedad de la Gota se caracteriza por un exceso de ácido úrico en la sangre. Este exceso puede reducirse hasta un nivel aceptable mediante el suministro de una medicación adecuada. Si medimos el exceso de ácido úrico mediante la variable de estado x, y mediante u el suministro de medicamento; una ecuación que modeliza algunas características de este sistema tiene la forma**

$$\dot{x} = -x + 1 - u$$

Con $u = 0$, es decir, sin medicamentos, la variable de estado se mantiene en equilibrio en un nivel $x = 1$, que es demasiado alto. La aplicación de medicamentos ayuda a reducir el nivel hasta cero; en esta ecuación la medicación se suministra de forma continua y no en dosis discretas. Podemos suponer que el estado inicial es el equilibrio 1, por tanto $x(0) = 1$, y que en tiempo T el estado es el aceptable en el cual $x(T) = 0$.

Claramente es ventajoso alcanzar el nivel de seguridad de ácido úrico tan pronto como sea posible, y esto puede hacerse utilizando una gran cantidad de medicamentos. Sin embargo, utilizar dosis muy grandes de medicamento es poco recomendable, por motivos médicos debido a los efectos secundarios que pueden producir y por motivos financieros puesto que el medicamento es caro. Una función de coste que equilibre esas dos componentes tiene la forma

$$J = \int_0^T \frac{1}{2}\left(k^2 + u^2\right) dt$$

La primera componente crece con el tiempo final y la segunda con la cantidad de medicamento utilizado. La constante k mide la importancia relativa de las dos componentes. Encuentra la trayectoria óptima

$x^*(t)$, el control óptimo $u^*(t)$ y el tiempo T necesario para conseguir la reducción de ácico úrico hasta el nivel adecuado.

Solución: El Hamiltoniano para este sistema tiene la forma

$$H = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}u^2 + p(-x + 1 - u)$$

La ecuación de co-estado es

$$\overset{\bullet}{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p$$

que tiene como solución

$$p^*(t) = Ae^t$$

donde A es una constante.

Como u no está acotado tiene que cumplirse la condición estacionaria

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^* - p^* = 0 \Rightarrow u^* = p^* = Ae^t$$

y la ecuación de estado es

$$\dot{x} = -x + 1 - u = -x + 1 - p = -x + 1 - Ae^t$$

Para resolver esta ecuación podemos utilizar el método general de obtener una solución de la ecuación homogénea y una solución particular. La ecuación homogénea es

$$\dot{x} = -x$$

que tiene por solución

$$x_h(t) = Be^{-t}$$

Para obtener una solución particular probamos con una función del tipo

$$x_p(t) = C_1 + C_2e^t$$

y por tanto

$$\dot{x}_p(t) = C_2e^t$$

y al sustituir en la ecuación general

$$\dot{x} = -x + 1 - Ae^t \Rightarrow C_2e^t = -\left(C_1 + C_2e^t\right) + 1 - Ae^t$$

de donde

$$2C_2e^t + C_1 = 1 - Ae^t$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{A}{2} \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

La solución general es por tanto

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Be^{-t} + 1 - \frac{A}{2}e^t$$

Aplicamos la condición inicial $x(0) = 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{A}{2} + B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{A}{2}$

$$x(t) = 1 - \frac{A}{2}e^t + \frac{A}{2}e^{-t} = 1 - \frac{A}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = 1 - A\,\mathrm{senh}\,t$$

Para hallar el valor de A, hay que tener en cuenta que este es un problema de tiempo final libre, y por tanto $dt_1 \neq 0$. Además como $\phi = \psi \equiv 0$, la condición de contorno queda como

$$H(T) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}u(T)^2 + p(T)(-x(T) + 1 - u(T)) = 0$$

como además $p = u$ (condición estacionaria)

$$\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}u(T)^2 + u(T)(-x(T) + 1 - u(T)) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}u(T)^2 + u(T)(-x(T) + 1) = 0$$

y teniendo en cuenta las expresiones de $u(t) = Ae^t$ y $x(t) = 1 - \frac{A}{2}(e^t - e^{-t})$

$$\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}\left(Ae^T\right)^2 + Ae^T\left(\frac{A}{2}e^T - \frac{A}{2}e^{-T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 - \frac{A^2e^{2T}}{2} + \frac{A^2e^{2T}}{2} - \frac{A^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k^2 = A^2$$

y por tanto

$$A = k \quad \text{o} \quad A = -k$$

Puesto que el medicamento tiene que ser administrado al paciente, está claro que requerimos $u \geq 0$ e ignoramos la raíz $A = -k$.

La trayectoria óptima es por tanto

$$x(t) = 1 - k \operatorname{senh} t$$

Y aplicando ahora la condición de terminación $x(T) = 0$, obtendremos el valor del tiempo optimal

$$T = \overset{-1}{\operatorname{senh}}(1/k) \tag{21}$$

El coste optimal es por tanto

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \frac{1}{2}\left(k^2 + u^2\right) dt = \frac{1}{2}k^2 T + \frac{1}{4}k^2\left[\exp(2T) - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}k^2 \overset{-1}{\operatorname{senh}}(1/k) + \frac{1}{2}\left[1 + \left(k^2 + 1\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

Cuando k es pequeño, la primera consideración es utilizar una cantidad pequeña de medicación, incluso aunque el tratamiento dure más tiempo. En el límite cuando $k \to 0$, $J \to 1$ pero $T \to \infty$, por tanto no hay solución optimal cuando $k = 0$. Si k es grande, el objetivo importante del tratamiento es alcanzar el nivel de seguridad tan rápido como sea posible, con poca preocupación respecto a la dosis requerida. Para valores grandes de k, $T \sim 1/k$ y $J \sim k$.

1. **(2.0 puntos) Resuelve el siguiente problema variacional e indica si es posible garantizar la unicidad de dicha solución**

$$\begin{aligned} &\min \quad \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}x + \dot{x} + t^2 x\right) dt \\ &\text{s.a.} \qquad x(0) = 0 \\ &\qquad\qquad x(1) \ \text{libre} \end{aligned}$$

Calcula el valor óptimo y la trayectoria óptima. Calcula la nueva trayectoria óptima y el nuevo valor óptimo si ahora las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

Compara y explica los resultados.

Solución: Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange con $F = \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}x + \dot{x} + t^2 x\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = \dot{x} + t^2 \\ &\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + x + 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x} + \dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} + \dot{x} = \dot{x} + t^2 \Leftrightarrow \ddot{x} = t^2$$

La expresión para $x\left(t\right)$ se obtiene integrando dos veces:

$$\dot{x}\left(t\right)=\frac{1}{3}t^{3}+A$$

$$x\left(t\right)=\frac{1}{12}t^{4}+At+B$$

En ambos casos la solución general es la misma, sólo hay variaciones en la solución debido a las condiciones transversales.

(a) Para $x\left(0\right)=0$ y $x\left(1\right)$ libre

$$x\left(0\right)=0\Rightarrow B=0$$

$$x\left(1\right)\text{ libre}\Rightarrow\left.\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\right|_{t=1}=0\Rightarrow\dot{x}\left(1\right)+x\left(1\right)+1=0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}+A\right)+\left(\frac{1}{12}+A+B\right)+1=0$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}A&=-\frac{17}{12}\\B&=0\end{aligned}$$

(b) Para $x\left(0\right)=0$ y $x\left(1\right)=1$

$$x\left(0\right)=0\Rightarrow B=0$$

$$x\left(1\right)=1\Rightarrow\frac{1}{12}+A+B=1$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}A&=\frac{11}{12}\\B&=0\end{aligned}$$

Calculamos el valor óptimo utilizando la integral. En primer lugar vemos que en ambos casos $B=0$ y ambas trayectorias pueden expresarse como

$$\dot{x}\left(t\right)=\frac{1}{3}t^{3}+A$$

$$x\left(t\right)=\frac{1}{12}t^{4}+At$$

luego el funcional

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^{2}+\dot{x}x+\dot{x}+t^{2}x\right)dt=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^{3}+A\right)^{2}+\left(\frac{1}{3}t^{3}+A\right)\left(\frac{1}{12}t^{4}+At\right)+\left(\frac{1}{3}t^{3}+A\right)+t^{2}\frac{1}{12}\left(t^{4}+At\right)\right)dt$$

que es una expresión larga pero que podemos simplificar, realizando las operaciones en los paréntesis

$$J^{*}=\int_{0}^{1}\frac{1}{36}t^{7}+\frac{5}{36}t^{6}+\frac{5A}{12}t^{4}+\left(\frac{4A}{3}+\frac{1}{3}\right)t^{3}+A^{2}t+\left(\frac{A^{2}}{2}+A\right)dt$$

e integrando

$$J^{*}=\left.\frac{1}{288}t^{8}+\frac{5}{252}t^{7}+\frac{5A}{60}t^{4}+\left(\frac{4A+1}{12}\right)t^{4}+\frac{A^{2}}{2}t^{2}+\left(\frac{A^{2}}{2}+A\right)t\right|_{t=0}^{t=1}$$

lo que nos da

$$J^{*}=\frac{1}{288}+\frac{5}{252}+\frac{5A}{60}+\left(\frac{4A+1}{12}\right)+\frac{A^{2}}{2}+\left(\frac{A^{2}}{2}+A\right)=\frac{215}{2016}+\frac{17}{12}A+A^{2}$$

Por lo tanto en el caso de $x(1)$ libre, tendremos $A = -17/24$

$$J^* = -\frac{177}{448}$$

mientras que para $x(1) = 1$, fijo, tendremos $A = 11/12$ y el valor óptimo es

$$J^* = \frac{503}{224}$$

Lo que implica un aumento del coste al fijar el destino.
Observamos también que si tomamos $J^* = \frac{215}{2016} + \frac{17}{12}A + A^2$ y derivamos respecto a A para buscar los extremos

$$\frac{dJ^*}{dA} = \frac{17}{12} + 2A = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{17}{24}$$

que es el valor obtenido cuando $x(1)$ es libre.