Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Optimización y Control Óptimo
Ingeniería en Automática y Electrónica Industrial
18 de junio de 2004 - Examen Resuelto

1. **Sea la función de una variable:**

$$f(x) = e^{-x} + (x-4)^2$$

(a) **¿Es $f(x)$ una función convexa?. (0.5 puntos)**
Como $f(x) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ siendo $\Omega = \mathbb{R}$ un conjunto convexo, solamente tenemos que calcular el signo de $f''(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + 2(x-4) \\ f''(x) &= e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

donde podemos comprobar que

$$f''(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $f''(x)$ es convexa, de hecho es estríctamente convexa.

(b) **Utiliza el método de Swann con parámetros $x_0 = 0$ y $\Delta = 1$ para encontrar un intervalo que contenga al mínimo de $f(x)$. (1 punto).**

i. En primer lugar determinamos el signo del incremento para determinar si la sucesión de Swann hay que construirla a la derecha o a la izquierda de x_0. Para ello, calculamos tal y como se indica en el método de Swann, el valor de la función $f(x)$ sobre los puntos: $x_0 - |\Delta|$, x_0 y $x_0 + |\Delta|$

$$\begin{aligned} x_0 - |\Delta| = -1 &\qquad f(-1) = 27.7183 \\ x_0 = 0 &\qquad f(0) = 17.0000 \\ x_0 + |\Delta| = 1 &\qquad f(1) = 9.3679 \end{aligned}$$

Como

$$f(-1) \geq f(0) \geq f(1)$$

el mínimo estará a la derecha de x_0 y el incremento será positivo: $\Delta = 1$.

ii. A continuación se construye la sucesión de Swann

$$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$$

empezando por $x_0 = 0$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	17.0000
1	1	9.3679
2	3	1.0498
3	7	9.0009

y por tanto el mínimo se encontrará en el intervalo

$$[1, 7]$$

2. **Para la función**

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y$$

(a) **Construye un simplex regular de lado 2, utilizando como vértices inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ (0.5 puntos.)**
Calculamos los parámetros del Simplex, teniendo en cuenta que estamos en $\mathbb{R}^2$ y por tanto $n = 2$, además del enunciado se deduce $\alpha = 2$.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left(\frac{\sqrt{n+1} + n - 1}{n\sqrt{2}} \right) \alpha = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right) 2 = 1.93185 \\ \delta_2 &= \left(\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n\sqrt{2}} \right) \alpha = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right) 2 = 0.51764 \end{aligned}$$

Silvestre Paredes Hernández

Las coordenadas de los 2 vértices que faltan (3 vértices en dimensión 2) son

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1 &= \left(x_1^1, x_2^1\right) = \left(x_1^0 + \delta_1, x_2^0 + \delta_2\right) = (2.93185, 1.51764) \\ \mathbf{x}^2 &= \left(x_1^2, x_2^2\right) = \left(x_1^0 + \delta_2, x_2^0 + \delta_1\right) = (1.51764, 2.93185)\end{aligned}$$

(b) **Da un paso del método S^2 para la función $f(x, y)$ y el simplex regular construido en el apartado anterior (0.5 puntos).**
Evaluamos la función $f(x, y)$ en cada uno de los vértices del simplex anterior:

$$\begin{array}{lll} f\left(\mathbf{x}^0\right) & = f(1,1) & = 3.00000 \\ f\left(\mathbf{x}^1\right) & = f(2.93185, 1.51764) & = 7.33850 \\ f\left(\mathbf{x}^2\right) & = f(1.51764, 2.93185) & = 16.45943 \end{array}$$

y podemos comprobar fácilmente que $\mathbf{x}^2$ es el "peor" vértice de los tres, luego es el que debe ser reflejado. Las coordenadas de ese nuevo punto se obtienen mediante la ecuación

$$\mathbf{x}^3 = 2\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^2 = 2\left\{\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}^1\right)\right\} - \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 = (2.41421, -0.41421)$$

siendo $\mathbf{x}_c$ el centroide de los puntos no reflejados. Como

$$f\left(\mathbf{x}^3\right) = 7.3431$$

el nuevo valor obtenido resulta ser el peor vértice y tendríamos que aplicar la regla número 1 de acotación mínima, para evitar este ciclado, y elegir como elemento a reflejar en la siguiente iteración el segundo "peor" vértice que sería $\mathbf{x}^1$.

(c) **Explica brevemente las ventajas e inconvenientes de este método S^2. (0.5 puntos)**

i. *Ventajas:* Sencillez del cálculo, no necesita derivadas, puede utilizarse incluso para funciones no continuas.
ii. *Inconvenientes:* No guarda la información del proceso, pueden ocurrir ciclados y su velocidad de convergencia es lenta.

3. **Dado el siguiente problema**

$$\begin{array}{ll} \textbf{Optimizar} & x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \\ \textbf{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ & z \leq 1 \end{array}$$

Responde razonadamente a cada uno de los siguientes apartados:

(a) **Discute acerca de la convexidad de su conjunto factible. (0.5 ptos.)**
El conjunto factible es

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \leq 1 \right\} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, g_1(x, y, z) \leq 4 \right\} \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

El conjunto Ω_1 será convexo si la función $g_1(x, y, z)$ es convexa, pero esto es muy fácil de comprobar ya que $g_1(x, y, z)$ es de clase $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ y su matriz hessiana es

$$Hg_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

definida positiva en $\mathbb{R}^3$ y por la caracterización de segundo orden de funciones convexas, g_1 es una función convexas.
El conjunto Ω_2 es un semiespacio, por tanto, también es un conjunto convexo.
Como Ω es la intersección de dos conjuntos convexos, también será un conjunto convexo de $\mathbb{R}^3$
La función objetivo

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$$

es también una función convexa, puesto que es de clase $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ y su matriz hessiana es

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego el problema es convexo, en el sentido en el que se pretende optimizar una función convexa sobre un conjunto convexo.

Silvestre Paredes Hernández

(b) **Sin cálculos previos: ¿qué puedes decir de los extremos locales y globales del problema?. (0.5 ptos.)**

A partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior y teniendo en cuenta que $f(x,y,z)$ es una función continua (es un polinómio) sobre un compacto (es cerrado -contiene a la frontera- y acotado -está dentro de una esfera de radio 2-) podemos decir:

i. Por el teorema de Weierstrass, la función $f(x,y,z)$ tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto Ω.
ii. Como f es convexa sobre Ω convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo $\Rightarrow$ El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
iii. Como f es convexa sobre Ω convexo $\Rightarrow$ Todo mínimo local es global
iv. Como f es convexa sobre Ω convexo y $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
v. Como Ω es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el origen $(0,0,0)$ está en su interior $\Rightarrow$ Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.
vi. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

(c) **Encuentra mediante los multiplicadores correspondientes los óptimos globales del problema. (1.5 ptos.)**

Por la última propiedad del apartado anterior, los puntos solución del problema deben encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las condiciones de KKT:

$$\begin{array}{ll} 2x+1+2\mu_1 x & =0 \\ 2y+1+2\mu_1 y & =0 \\ 2z+1+2\mu_1 z+\mu_2 & =0 \\ \mu_1\left(x^2+y^2+z^2-4\right) & =0 \\ \mu_2(z-1) & =0 \end{array}$$

Los puntos obtenidos en este sistema deben además ser puntos factibles, es decir, deben cumplir las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & \leq & 4 \\ z & \leq & 1 \end{array}$$

La forma usual de resolver estos sistemas es utilizar las 2 últimas ecuaciones, también llamadas, ecuaciones de holgura complementaria. Como es un producto de dos factores que debe dar cero, alguno de ellos debe ser cero, y tendremos 2 opciones para cada ecuaciones, lo que proporciona un total de 4 casos que describimos a continuación

$$\left\{\begin{array}{lll} \mu_1=0 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} \mu_2=0 & \text{CASO I} \\ z=1 & \text{CASO II} \end{array}\right. \\ x^2+y^2+z^2-4=0 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} \mu_2=0 & \text{CASO III} \\ z=1 & \text{CASO IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

A continuación se resuelve cada uno de los sistemas que proporcionan los casos anteriores:

i. CASO I: $\mu_1=0$, $\mu_2=0$

$$\begin{array}{ll} 2x+1 & =0 \\ 2y+1 & =0 \\ 2z+1 & =0 \\ 0 & =0 \\ 0 & =0 \end{array}$$

cuya única solución es

$$P_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

con

$$\mu=(0,0)$$

ii. CASO II: $\mu_1=0$, $z=1$

$$\begin{array}{ll} 2x+1 & =0 \\ 2y+1 & =0 \\ 2+1+\mu_2 & =0 \\ 0 & =0 \\ 0 & =0 \end{array}$$

cuya única solución es

$$P_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

con

$$\mu=(0,-3)$$

Silvestre Paredes Hernández

iii. CASO III: $x^2+y^2+z^2-4=0$, $\mu_2=0$

$$\begin{array}{ll} 2x+1+2\mu_1 x & =0 \\ 2y+1+2\mu_1 y & =0 \\ 2z+1+2\mu_1 z & =0 \\ x^2+y^2+z^2-4 & =0 \\ 0 & =0 \end{array}$$

cuya solución se obtiene fácilmente si utilizamos las tres primeras ecuaciones para concluir que $x=y=z$. Para ello restamos primera y segunda

$$2\,(x-y)+2\mu_1\,(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)\,(1+\mu_1)=0$$

y observamos que si $1+\mu_1=0 \Leftrightarrow \mu_1=-1$ y sustituyendo en la primera de las ecuaciones obtenemos la contradicción $1=0$, y por tanto $x=y$.
Para la segunda igualdad, $y=z$, restaríamos la segunda y la tercera ecuación y siguiendo un razonamiento análogo obtendíamos el resultado pedido. De este modo tenemos

$$x=y=z$$

Esta cadena de igualdades se utiliza en la ecuación de la esfera (la cuarta) para determinar

$$x^2+y^2+z^2-4 \quad =0 \Leftrightarrow 3x^2=4 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

De la primera ecuación despejamos el valor de μ_1

$$\mu_1=-\frac{1}{2x}\,(2x+1)=-1-\frac{1}{2x}$$

Obtenemos de este modo los puntos

$$P_3=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad \mu=\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$$

$$P_4=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad \mu=\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$$

iv. CASO IV: $x^2+y^2+z^2-4=0$, $z=1$

$$\begin{array}{ll} 2x+1+2\mu_1 x & =0 \\ 2y+1+2\mu_1 y & =0 \\ 2+1+2\mu_1+\mu_2 & =0 \\ x^2+y^2+1-4 & =0 \\ z-1 & =0 \end{array}$$

Restando la primera y la segunda ecuaciones (siguiendo el razonamiento del CASO III) obtenemos:

$$x=y$$

que se lleva hasta la cuarta para obtener:

$$x^2+y^2+1-4 \quad =0 \Leftrightarrow 2x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

De la primera ecuación obtenemos el valor de μ_1

$$\mu_1=-1-\frac{1}{2x}=-1-\frac{1}{\pm\sqrt{6}}=-1\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

y el valor de μ_2 de la tercera

$$\mu_2=-3-2\mu_1=-1\pm\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Este caso nos ha proporcionado 2 nuevos puntos

$$P_5 \;=\; \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \qquad \mu=\left(-1-\frac{1}{\sqrt{6}},-1+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$P_6 \;=\; \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \qquad \mu=\left(-1+\frac{1}{\sqrt{6}},-1-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Silvestre Paredes Hernández

Teniendo en cuenta las propiedades del apartado anterior, los puntos encontrados y el signo de sus multiplicadores correspondientes, tendremos el siguiente cuadro:

Punto	Multiplicadores	Valor de $f(x)$	Factibilidad	Extremo
$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\mu = (0,0)$	$-\frac{3}{4}$	SI	Máximo o Mínimo
$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$	$\mu = (0,-3) \leq 0$	$\frac{3}{2}$	SI	Máximo
$P_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\mu = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \leq 0$	$4 + 2\sqrt{6}$	NO	–
$P_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\mu = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \leq 0$	$4 - 2\sqrt{6}$	SI	Máximo
$P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \leq 0$	$5 + \sqrt{6}$	SI	Máximo
$P_6 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, -1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \leq 0$	$5 - \sqrt{6}$	SI	Máximo

En la tabla anterior se comprueba que P_1 es el único punto que puede ser mínimo, ya que sus multiplicadores son cero y puede considerarse cualquier signo (no ocurre lo mismo con el resto de puntos que solamente pueden ser máximos), por tanto y como según las propiedades del apartado anterior el problema debe tener mínimo y debe además cumplir las condiciones de KKT, se llega a la conclusión de que P_1 debe ser el mínimo global del problema. No hay mínimos locales.

El máximo global también debe cumplir las condiciones de KKT, por tanto debe ser alguno de los restantes (salvo P_3 que podemos comprobar que es infactible ya que su coordenada $z = 2/\sqrt{3} \geq 1$). Si comparamos los valores de la función objetivo en cada uno de ellos obtenemos

$$f(P_5) > f(P_6) > f(P_2) > f(P_4)$$

luego P_5 es el máximo global del problema.

No podemos garantizar que estos puntos sean máximos locales porque la función objetivo NO ES CÓNCAVA.

Si queremos discutir la localidad de P_2, P_4 y P_6 podemos emplear las condiciones de KKT de segundo orden utilizando las matrices hessianas.

$$HL = Hf + \mu_1 Hg_1 + \mu_2 Hg_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1+\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu_1 \end{bmatrix}$$

Para P_2, $\mu_1 = 0$

$$HL(P_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva, pero como $\mu_3 \leq 0$, P_2 no es máximo local.

Para P_4, $\mu_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$HL(P_4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva, pero $\mu_1, \mu_2 \leq 0$, luego P_4 tampoco es máximo local.

Por último para P_6, $\mu_1 = -1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$HL(P_6) = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

y ocurre lo mismo que en los casos anteriores.

Podemos comprobar que P_5 cumple las condiciones de KKT para ser un máximo local, en este caso $\mu_1 = -1 - 1/\sqrt{6}$ y la matriz hessiana asociada a P_5 es

$$HL(P_5) = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

que es definida negativa.

Silvestre Paredes Hernández

La solución del problema es por tanto

$$\begin{array}{rcl} \text{Mínimo Global} & : & P_1 \\ \text{Máximo Global} & : & P_5 \end{array}$$

4. **Resuelve el problema**

$$\textbf{Minimizar } J(x,y) = \int_0^1 \left[xy' - y^2\right] dx$$

cuando se cumplen las condiciones de contorno

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y(1) & = & 1 \end{array}$$

(1.5 puntos)
Hacemos el cambio correspondiente para transformar el problema anterior en un problema de control óptimo:

$$\begin{array}{ccc} x & \to & t \\ y' & \to & u \\ y & \to & x \end{array}$$

Observa que se trata de un cambio de notación, no de un cambio de variable.
El problema queda como

$$\text{Minimizar} \quad \int_0^1 \left[xy' - y^2\right] dx$$

$$\text{Sujeto a} \qquad \dot{x} = u$$

$$\begin{array}{c} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{array}$$

que es un problema de control óptimo en tiempo continuo. Para buscar la posible solución construimos la función hamiltoniana correspondiente

$$H(t,x,u,p) = tu - x^2 + pu$$

y aplicamos el teorema de las condiciones necesarias:

$$\begin{array}{ll} \text{Ecuación de Estado} & \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = u \\[2ex] \text{Ecuación de Co-Estado} & \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2x \\[2ex] \text{Condición Estacionaria} & \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 0 = t + p \end{array}$$

Al ser un problema con tiempo y estado, inicial y final fijos, las condiciones de contorno se cumplen trivialmente. De la ecuacuación de la condición estacionaria obtenemos

$$p(t) = t$$

resultado que llevado a la ecuación de co-estado nos da el valor del estado

$$2x = \dot{p} = 1 \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}$$

que es un estado fijo. Sin embargo, comprobamos que no se cumplen las condiciones iniciales-finales

$$x(0) = 0 \neq \frac{1}{2}$$

luego el problema no tiene solución.

Silvestre Paredes Hernández

5. **Dado el siguiente problema de control óptimo en tiempo continuo:**

$$\textbf{Minimizar} \quad J(x,u) = \tfrac{1}{2}\left(x(2)-1\right)^2 + \int_0^2 \tfrac{1}{2}\left(u^2+x^2\right)dt$$

$$\textbf{Sujeto a} \quad \dot{x} = u$$

$$x(0)=0, \qquad x(2) \textbf{ libre}$$

encuentra, si existe, el control óptimo, la trayectoria óptima y el valor óptimo de este problema. (1.5 ptos.)

Construimos el Hamiltoniano del problema

$$H(t,x,u,p) = \frac{1}{2}\left(u^2+x^2\right) + pu$$

y aplicamos las condiciones necesarias para un extremal del conjunto anterior:

$$\begin{array}{ll} \text{Ecuación de Estado} & \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = u \\ \text{Ecuación de Co-Estado} & \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \text{Condición Estacionaria} & \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 0 = u + p \end{array}$$

Es fácil obtener la solución general del sistema anterior, utilizando la condición estacionaria

$$u = -p$$

que llevado a la ecuación de estado y junto con la de co-estado nos proporciona el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p \\ \dot{p} &= -x \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene fácilmente si derivamos en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$\ddot{x} = -\dot{p} = x \ \Rightarrow \ddot{x} - x = 0$$

con solución general (utilizando el polinomio característico que tiene 2 raíces: 1 y -1):

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

y

$$p(t) = -\dot{x}(t) = Be^{-t} - Ae^t$$

Solamente falta por determinar el valor de las constantes A y B, para ello utilizaremos las condiciones de contorno. Como el tiempo final $t_1 = 2$ es fijo, pero no la condición de estado final, $x(t_2)$, debe ocurrir

$$\begin{aligned} dt_1 &= 0 \\ dx(t_1) &\neq 0 \end{aligned}$$

y las condiciones de contorno

$$: \left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\Big|_{t=t_1} dt_1 = 0$$

se reducen a

$$\begin{aligned} \left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) &= 0 \Rightarrow \\ \left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} &= 0 \end{aligned}$$

Silvestre Paredes Hernández

En este caso

$$
\begin{aligned}
\phi\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(x\left(t_1\right)-1\right)^2 \Rightarrow \phi_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = x\left(t_1\right)-1 \\
\psi\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) &= 0 \text{ puesto que no hay condición sobre } x\left(t_1\right) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0
\end{aligned}
$$

y definitivamente la condición de contorno es:

$$
\left.\left(\phi_{\mathbf{x}}+\psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda}-\mathbf{p}\right)^T\right|_{t=t_1}=0 \Rightarrow\left.\left(\phi_{\mathbf{x}}+\psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda}-\mathbf{p}\right)^T\right|_{t=2}=0 \Rightarrow(x(2)-1)-p(2)=0
$$

Simplificando queda

$$
x(2)-p(2)=1
$$

que junto con la condición

$$
x(0)=0
$$

permitirá calcular el valor de A y B.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A e^t+B e^{-t} \\
p(t) &= B e^{-t}-A e^t
\end{aligned}
$$

$$
x(0)=0 \Rightarrow 0=A+B \Rightarrow \boxed{A=-B}
$$

$$
x(2)-p(2)=1 \Rightarrow\left(A e^2+B e^{-2}\right)-\left(B e^{-2}-A e^2\right)=1 \Rightarrow 2 A e^2=1 \Rightarrow \boxed{A=\tfrac{1}{2} e^{-2}}
$$

y las expresiones de $x(t)$, $p(t)$ y $x(t)$ son:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\left(e^t-e^{-t}\right)=2 A \sinh (t)=e^{-2} \sinh (t) \\
p(t) &= -\dot{x}=-e^{-2} \cosh (t) \\
u(t) &= \dot{x}=e^{-2} \cosh (t)
\end{aligned}
$$

Siendo el valor óptimo del funcional

$$
J\left(x^*, u^*\right)=\frac{1}{2}(x(2)-1)^2+\int_0^2 \frac{1}{2}\left(u^2+x^2\right) d t=\frac{1}{2}\left(e^{-2} \sinh 2-1\right)^2+\int_0^2 \frac{e^{-4}}{2}\left(\cosh ^2(t)+\sinh ^2(t)\right) d t
$$

6. **Considera el siguiente sistema dinámico lineal discreto**

$$
x_{k+1}=x_k+u_k
$$

con $k=0, \ldots, 9$. Encuentra los valores óptimos para u_k y x_k que minimizarn el siguiente índice de rendimiento

$$
J(x, u)=\frac{1}{2}(x(10)-1)^2+\frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 u_k^2
$$

siendo el estado inicial del sistema

$$
x_0=1
$$

y el estado final x_{10} libre. (1.5 ptos.)
Definimos el Hamiltoniano del problema

$$
H^k=\frac{1}{2} u_k^2+\lambda_k\left(x_k+u_k\right)
$$

y aplicamos las condiciones necesarias para problemas de control óptimo en tiempo discreto

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ecuación de Estado} & x_{k+1}=\dfrac{\partial H^k}{\partial \lambda_k}=x_k+u_k \\[2ex]
\text{Ecuación de Co-Estado} & \lambda_k=\dfrac{\partial H^{k+1}}{\partial x_{k+1}}=\lambda_{k+1} \Rightarrow \lambda_k=\lambda_0 \qquad \forall k=0, \ldots, 9 \\[2ex]
\text{Condición Estacionaria} & \dfrac{\partial H}{\partial u}=u_k+\lambda_k \Rightarrow u_k=-\lambda_k=-\lambda_0 \qquad \forall k=0, \ldots, 9
\end{array}
$$

Silvestre Paredes Hernandez

Se comprueba que los controles y las variables de co-estado son constantes. Calcularemos ahora las variables de estado

$$x_{k+1} = x_k + A$$

donde

$$A = u_k = -\lambda_0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + A \\ x_2 &= x_1 + A = (x_0 + A) + A = x_0 + 2A \\ &\vdots \\ x_k &= x_0 + kA = 1 + kA \end{aligned}$$

de forma que solamente falta por determinar el valor de A. Utilizamos la condición de contorno

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} + \lambda_{N-1}\right) dx_N = 0$$

y teniendo en cuenta que $x_N = x_{10}$ es libre y por tanto $dx_N \neq 0$ y que $\phi = \frac{1}{2}\left(x_N - 2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x_{10} - 2\right)^2$

$$\lambda_{N-1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_N} = x_N - 2 \Longrightarrow \lambda_9 = x_{10} - 2$$

pero como las variables de estado son todas iguales a λ_0

$$x_{10} = 2 + \lambda_9 = 2 + \lambda_0$$

utilizando la expresión general para x_k

$$x_{10} = 1 + 10A$$

e igualando ambas expresiones

$$2 + \lambda_0 = 1 + 10A$$

retomando el valor de A

$$2 + \lambda_0 = 1 - 10\lambda_0$$

podemos despejar el valor de λ_0

$$\lambda_0 = -\frac{1}{11}$$

y la solución queda

$$\begin{aligned} x_k &= 1 + \frac{k}{11} \\ u_k &= \frac{1}{11} \\ J(x,u) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{10}{11} - 2\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{11}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{121} + \frac{1}{2}\frac{1}{121}10 = \frac{1+10}{2\cdot 121} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

Silvestre Paredes Hernández