Capítulo 4

Control Óptimo de Sistemas en tiempo Continuo

4.1 Introducción

La filosofía de este capítulo es derivar la solución de problemas de control óptimo continuos en el caso más general. En el tema anterior hemos visto como los problemas de control óptimo se pueden plantear como la búsqueda de una trayectoria que optimice cierto índice mientras se cumplen unas determinadas restricciones debidas a la naturaleza del sistema. En este tema vamos a plantear y resolver alguno de estos problemas de control óptimo cuando el sistema evoluciona de forma continua con el tiempo.

El enfoque inicial del problema se hace desde el punto de vista de los métodos variacionales clásicos, donde se busca una función real definida sobre un determinado dominio de funciones, que minimice un determinado índice de rendimiento que estará definido en la mayoría de las ocasiones por medio de una integral. Introduciremos brevemente algunos resultados sobre el cálculo de variaciones.

Abordaremos el problema desde el punto de vista de la formulación hamiltoniana. Esta formulación es muy útil a la hora de tratar con el principio del mínimo.

Para ilustrar las principales características del tipo de problemas de control óptimo que vamos a tratar, presentaremos un ejemplo muy sencillo.

Ejemplo 4.1 *Se plantea el problema del lanzamiento de un cohete hasta una altura $\overline{x}$ en un tiempo T. Para controlar el movimiento del mismo en cada instante se utiliza una fuerza $u(t)$, que es función del tiempo. Si $x(t)$ es la altura sobre el suelo en tiempo t y m es la masa del cohete, la ecuación del movimiento nos da la siguiente relación.*

$$\ddot{x}(t) + mg = u(t) \qquad t \in [0, T]$$

Supongamos por otra parte que la fuerza ejercida no puede superar cierto valor b (debido entre otras cosas a las limitaciones en la potencia de los motores, la cantidad de combustible utilizada, etc.). El objetivo del problema podría ser gastar la menor cantidad de energía posible para lograr el objetivo de situar el cohete a una altura $\overline{x}$ en el tiempo T. El problema podría plantearse como

$$\begin{array}{rc} \textit{Minimizar} & \int_0^T \mid u(t) \mid dt \\ \textit{Sujeto a} & \ddot{x}(t) + mg = u(t) \\ & \mid u(t) \mid \leq b \\ & x(T) = \overline{x} \\ & x(0) = 0 \end{array}$$

Si hacemos $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden y el problema vendrá dado *como:*

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimizar} & \int_0^T \mid u(t) \mid dt \\ \textit{Sujeto a} & \dot{x}_2\,(t) + mg = u(t) \\ & \dot{x}_1\,(t) = x_2(t) \\ & \mid u(t) \mid \leq b \\ & x_1(T) = \overline{x} \\ & x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{array}$$

donde al poner la función $|u\,(t)|$ *dentro del integrando estamos considerando el gasto de fuerza necesaria para acelerar o decelerar el cohete.*

Observando el ejemplo anterior vamos a ver a continuación la formulación general de los problemas de control óptimo en tiempo continuo. En primer lugar solamente estamos interesados en la conducta de sistemas que evolucionen según una determinada ley determinista. En otras palabras, no se considerarán sistemas cuya conducta sea aleatoria o estocástica.

Supondremos que la conducta relevante de los sistemas estudiados puede ser cuantificada por n variables. La identificación de esas variables y la descripción del sistema en términos de ellas es el trabajo más complicado al construir un modelo matemático del sistema, este aspecto no será tratado aquí y supondremos que este trabajo ha sido ya realizado y la conducta del sistema estará descrita por los valores del *vector de estado* $\mathbf{x}$, cuyas componentes x_i, $i = 1, \ldots, n$, son las *variables de estado.* El sistema evoluciona con el tiempo t, por tanto las variables de estado son funciones de t y estarán gobernadas por n ecuaciones diferenciales de primer orden, las *ecuaciones de estado*, que tienen la forma general

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.1}$$

donde el punto indica la derivada temporal. La función $\mathbf{f}$ es una función vectorial que tiene n componentes f_i. La ecuación de estado dependerá del estado del sistema, del tiempo y de las *variables de control* u_i, $i = 1, \ldots, m$, que forman un *vector de control* $\mathbf{u}$, m-dimensional. Asumiremos que esas variables de control son funciones integrables de t. Simplificaremos el problema considerablemente si requerimos que dichos controles sean continuos.

Definimos $\mathcal{U}$ como el conjunto de todas las variables de control admisibles es decir que podemos utilizar en el sistema, junto con los requerimientos ya mencionados. En algunos problemas podemos restringir los valores mínimo y máximo de cualquier control que pueda utilizarse; por ejemplo, podemos suponer que el control u_i está acotado entre a_i y b_i. En ese caso, podemos hacer un cambio lineal en la variable para reemplazar u_i por otra variable v_i, definida por

$$u_i = \frac{1}{2}\,(a_i + b_i) + \frac{1}{2}\,(a_i - b_i)\,v_i \tag{4.2}$$

de manera que la nueva variable v_i sea también admisible y verifique la siguiente relación

$$-1 \leq v_i\,(t) \leq 1 \tag{4.3}$$

para todo valor del tiempo t. Por tanto el conjunto $\mathcal{U}$ de todos los controles admisibles consistirá en todas las funciones integrables de t que o bien son no acotadas o acotadas por los valores extremos -1 y $+1$.

Dentro del conjunto de los controles acotados, hay un subconjunto importante en el que las variables de control solamente toman los valores extremos. Cualquier cambio en el valor del control es un cambio inmediato entre un valor extremo y el otro (funciona como un interruptor). Tales controles se denominan controles de tipo *bang-bang.*

La evolución del sistema comienza a partir de una determinada configuración en un valor inicial t_0 de t. Por ejemplo

$$\mathbf{x}\,(t_0) = \mathbf{x}^0 \tag{4.4}$$

donde el estado inicial $\mathbf{x}^0$ en el tiempo inicial t_0 están dados por el problema. En algunos casos también se conoce el estado final del sistema

$$\mathbf{x}\,(t_1) = \mathbf{x}^1 \tag{4.5}$$

Aunque aquí podemos distinguir diferentes casos. Por una parte podemos considerar el tiempo final o terminal t_1 bien *fijo* o bien *libre.* Por otra puede conocerse el estado final del sistema o puede ser que dicho estado esté sobre una determinada curva o superficie. Por ejemplo, se puede exigir que $x_1(t_1)$ tenga un valor fijo, pero que los otros componentes de $\mathbf{x}(t_1)$ no estén restringidas. En general, la condición del estado terminal $\mathbf{x}^1$, es que esté dentro de un determinado conjunto objetivo $\mathcal{F}$.

El ingrediente final de este planteamiento general de un problema de control optimal concierne al *coste.* La forma más general para el coste que será considerado tiene la forma

$$J(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} F(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\, dt \tag{4.6}$$

Este tipo de funciones recibe el nombre de *funcional,* puesto que asigna un único número real a un conjunto de funciones $x_i(t)$, $u_j(t)$. Este coste tiene 2 partes. La primera llamada *coste terminal*, que es una penalización respecto al estado final del sistema. Por supuesto, solamente tiene efecto cuando el estado final del sistema no está prefijado. La segunda parte depende del estado del sistema a lo largo de la trayectoria de la solución y del tiempo y, más importante, de los valores del control empleados en la solución. Un caso importante y especial, es cuando $F \equiv 1$, y $\phi \equiv 0$, no hay coste terminal. En este caso el coste $J(\mathbf{x},\mathbf{u})$ es igual al tiempo necesario para que el sistema pase del estado inicial al final. Tendremos entonces un problema de *tiempo óptimo;* que tiene que ser por supuesto, un problema de tiempo terminal no fijo.

Esto completa la lista de ingredientes de un problema de control óptimo y la pregunta que hay que resolver puede formularse de la siguiente forma. El estado del sistema puede ser conducido desde su posición inicial hasta su posición final mediante la aplicación de ciertos controles que están en el conjunto $\mathcal{U}$, mientras que la evolución del estado está gobernada por las ecuaciones de estado 4.1. Si no hay controles apropiados, diremos que el sistema es *no controlable* desde el estado inicial hasta el conjunto objetivo $\mathcal{F}$, y el problema no tiene solución. Si el sistema es *controlable* habrá, en general, muchos controles apropiados y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la función de coste $J(\mathbf{x},\mathbf{u})$, determinada por 4.6. El problema del control optimal consiste en determinar el valor mínimo de $J(\mathbf{x},\mathbf{u})$, el coste optimal, y el valor del vector de control $\mathbf{u}$, para el que se obtiene ese coste mínimo; en este caso $\mathbf{u}$ es el control optimal. Podemos también determinar la solución correspondiente a las ecuaciones de estado, que dan la trayectoria óptima, así como el valor final del tiempo, el tiempo optimal, y el estado final, si estos no han sido prefijados.

Junto con la clasificación de los problemas de control óptimo en continuos y discretos, también podemos hacer una clasificación según la variable tiempo t, esté o no explícitamente incluida en las ecuaciones de estado, de esta forma tenemos problemas

1. *Autónomos:* la ecuación de estado no depende explícitamente del tiempo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$

2. *No autónomos:* La variable t está presente en la ecuación anterior: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$

Por otra parte el conjunto $\mathcal{U}$ de los controles admisibles puede ser:

1. *No acotado*

2. *Acotado*

3. *Bang-Bang*

El tiempo final pude ser *fijo* o *libre*, mientras que el estado final del sistema puede ser *fijo, completamente libre,* o *parcialmente libre,* dependiendo de si $\mathcal{F}$ es un único punto de $\mathbb{R}^n$, todo $\mathbb{R}^n$, o algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$. La función de coste $J(\mathbf{x},\mathbf{u})$ puede tener o no función de *coste terminal.* Además del caso especial del problema de *tiempo optimal,* hay otro tipo de problemas importantes: si el problema tienen una única variable de control u, es decir $m = 1$, podemos suponer que F es proporcional a $|u|$, en este caso es un problema de *coste de combustible,* puesto que las operaciones de control contribuyen al coste total independientemente del signo. Un tercer ejemplo particular de problemas aparece cuando F es proporcional a u^2; en este caso con este *coste cuadrático,* se puede avanzar más rápidamente hacia la solución general.

Para ilustrar la descripción anterior del problema general, daremos a continuación algunos problemas particulares.

Aunque no estamos en condiciones de extraer la solución, podemos hacer un intento en la estrategia de control óptimo y determinar la solución óptima.

4.2 Índices de rendimiento

Se ha visto en los ejemplos anteriores que un *índice de rendimiento* o *coste* es una escalar que proporciona una medida por la cual podemos juzgar el rendimiento del sistema. Veremos a continuación algunos de los posibles índices que podemos encontrarnos en un problema de control optimal.

1. *Problemas de tiempo mínimo.* Como ya se ha comentado anteriormente, en este caso $\mathbf{u}(t)$ tiene que elegirse para transferir el sistema desde un estado inicial x_0 hasta otro en el menor tiempo posible. Esto es equivalente a minimizar el índice de rendimiento

$$J = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \tag{4.7}$$

donde t_1 es instante inicial de tiempo en el que se alcanza el estado buscado.

2. *Control terminal.* En este caso el estado final $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_1)$ tiene que estar lo más cerca posible de un estado prefijado $\mathbf{r}(t_1)$. Un índice adecuado para este tipo de problema es minimizar

$$\mathbf{e}^T(t_1)\,\mathbf{M}\mathbf{e}(t_1) \tag{4.8}$$

donde $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{M}$ es una matriz $n \times n$ simétrica real definida positiva

3. *Esfuerzo mínimo.* En este caso se pretende alcanzar el estado final utilizando la menor cantidad de energía o esfuerzo en el control. Índices adecuados para minimizar son

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \beta_i |u_i|\, dt \tag{4.9}$$

o

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u} dt \tag{4.10}$$

donde $\mathbf{R}$ es una matriz real y semidefinida positiva, β_i y r_{ij} son factores de ponderación.

4. *Problema del seguimiento (Tracking problem).* El objetivo principal es seguir o "perseguir" tan cerca como sea posible un estado deseado $\mathbf{r}(t)$ en el intervalo $t_0 \le t \le t_1$. En este caso un índice adecuado podría ser

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^T \mathbf{Q}\mathbf{e} dt \tag{4.11}$$

donde $\mathbf{Q}$ es real, simétrica y semidefinida positiva. Introducimos el término *servomecanismo* para este tipo de sistemas, mientras que un *regulador* es un caso especial cuando $\mathbf{r}(t)$ es constante o cero. Si las funciones $u_i(t)$ son no acotadas entonces la minimización de 4.11 puede conducir a un vector de control con componentes infinitas. Este hecho es inaceptable en problemas cotidianos, por tanto, para restringir el esfuerzo total del control, podemos utilizar una combinación de 4.10 y 4.11 para obtener

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}\right) dt \tag{4.12}$$

las expresiones de la forma 4.10, 4.11 y/o **??** se denominan índices de coste cuadrático.

4.3 Formulación hamiltoniana

La introducción sobre los métodos variacionales realizada en la sección anterior tenía como objetivo presentar el problema de la optimización de funciones que dependía de otras funciones (los funcionales). Sin embargo, a la hora de buscar las soluciones a los problemas de control óptimo (problemas que tienen funcionales y restricciones particulares), utilizaremos la llamada *formulación hamiltoniana*. Si el estado del sistema viene descrito por sus variables de estado mediante la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{4.13}$$

con estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y control $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$. Asociaremos a este sistema un índice de rendimiento del tipo:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{4.14}$$

donde $[t_0, t_1]$ es el intervalo en el que queremos estudiar el comportamiento del sistema. La función peso de *coste terminal* $\phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \in \mathbb{R}$, donde $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, depende del instante de tiempo final y del estado final del sistema, mientras que la función $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, depende de toda la trayectoria de estados y de los controles utilizados en el intervalo $[t_0, t_1]$. En principio tanto t_0 como t_1 pueden ser variables.

4.3.1 Ecuaciones de estado y co-estado

El problema *de control óptimo* consistirá en encontrar un control $\mathbf{u}^*(t)$ definido en el intervalo $[t_0, t_1]$ que conduzca el sistema 4.13 a lo largo de la trayectoria óptima $\mathbf{x}^*(t)$, de forma que se minimice la función de coste 4.14 y donde además puede ocurrir

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{0} \tag{4.15}$$

para una cierta función vectorial $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\sim}$

El papel de las funciones ϕ y ψ no debe confundirse. La función $\phi(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ es función del estado final y es un valor que queremos hacer pequeño. Por otra parte $\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ es una función del estado final que debe valer 0 en ese instante: es una restricción que debe cumplir el sistema en el intante final t_1.

Para resolver el problema de control óptimo continuo haremos uso de la teoría de los multiplicadores de Lagrange para añadir las restricciones 4.13 y 4.15 al índice de rendimiento 4.14. Puesto que se tiene que cumplir la ecuación 4.13 para cualquier valor de $t \in [t_0, t_1]$, necesitamos multiplicadores de Lagrange, $\mathbf{p}(t)$, que sean función del tiempo:

$$\mathbf{p}(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

Sin embargo, como 4.15 se cumple solamente para un instante de tiempo (el instante final t_1) necesitamos multiplicadores $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{\sim}$ que no dependan del tiempo.

El índice de rendimiento aumentado es por tanto

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \boldsymbol{\lambda}^T \psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}})\right] dt \tag{4.16}$$

Definiendo la *función Hamiltoniana* o *Hamiltoniano* como

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.17}$$

y que de forma abreviada indicaremos por

$$H = F + \mathbf{p}^T \mathbf{f}$$

entonces podemos escribir la expresión 4.16 como

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \boldsymbol{\lambda}^T \psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \left[H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{x}}\right] dt \tag{4.18}$$

Supongamos en primer lugar que $\phi = \psi = 0$, el funcional sería

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{x}}\right] dt$$

si buscamos extremales para $J_a(x, u)$, entonces podemos aplicar la teoría del tema anterior y aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange al funcional así definido. Teniendo en cuenta que en este caso es un funcional con varias variables, habrá que aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a todas ellas

$$J_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{x}}\right] dt = \int_{t_0}^{t_1} G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}})\, dt$$

y obtendremos $\dot{p}$

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}(-p_k(t)) = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$$
$$\frac{\partial G}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{u}_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial u_k}$$
$$\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{p}_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_k} - \dot{x}_k(t) - \frac{d}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow \dot{x}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Estas ecuaciones osn las condiciones de optimalidad cuando t_0, t_1, $x(t_0)$ y $x(t_1)$ son fijos y no hay ni coste terminal, ni restricción de estado terminal.

Recordemos que en el caso de que $x(t_0)$ o $x(t_1)$ son variables, entonces debería cumplirse además las condiciones

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k}\right|_{t=t_j} = 0 \Rightarrow p_k(t_j) = 0$$

En el caso general del problema de control óptimo, donde los elementos t_0, t_1, $x(t_0)$ y $x(t_1)$ pueden ser variables y existen funciones ϕ de coste terminal y ψ de estado terminal, las condiciones de contorno son

$$\left.\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T\right|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left.\left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\right|_{t=t_1} dt_1 = 0$$

$$\left.\mathbf{p}^T dx\right|_{t=t_0} - \left.H dt\right|_{t=t_0} = 0$$

sin embargo puesto que en la mayoría de problemas t_0 y $\mathbf{x}(t_0)$ son conocidas y fijas los valores $dx(t_0)$ y dt_0 son ambos cero solamente queda la primera de las ecuaciones anteriores como condición de contorno.

Teorema 4.2 *Las condiciones necesarias para que u^* sea un extremal de*

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt$$

sujeto a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad t \geq t_0,\ t_0 \text{ fijo}$$
$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \text{ fijo}$$

siendo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, es que existan funciones $p_1, \ldots, p_n : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, cumpliendo las ecuaciones:

1. *Ecuación de Estado*

$$H_{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{f}, \quad t \geq t_0 \Rightarrow \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.19}$$

2. *Ecuación de Co-estado*

$$H_{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{x}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbf{p} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \quad t \leq t_1 \Rightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.20}$$

3. *Condición de contorno*

$$\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\Big|_{t=t_1} dt_1 = 0 \tag{4.21}$$

4. *Condición estacionaria*

$$H_{\mathbf{u}}^T = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} p_j = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.22}$$

5. *Condición de estado final*

$$\psi^T \Big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow \psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 \tag{4.23}$$

Las ecuaciones de estado (ecuación 4.19) y la ecuación de co-estado (ecuación 4.20, lamadas también ecuaciones *adjuntas*) constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales no lineales con condiciones de frontera $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{p}(t_1)$. En general no es posible alcanzar una solución analítica de la solución y hay que utilizar técnicas numéricas.

La condición de contorno 4.21 necesita de una aclaración adicional. Hemos dicho que $d\mathbf{x}(t_1)$ y dt_1 no son independientes. Por tanto, no podemos poner los coeficientes de los dos primeros términos del miembro de la derecha en **??** iguales a cero de forma separada. En su lugar, tenemos que poner la expresión 4.21 igual a cero en $t = t_1$.

El control óptimo depende de la solución de un problema de contorno de dos puntos, puesto que $\mathbf{x}(t_0)$ está dado y $\mathbf{p}(t_1)$ está determinado por 4.21. En general es muy complicado resolver este tipo de problemas.

Realmente el valor de $\mathbf{p}(t)$ no es necesario, pero evidentemente su determinación es un paso intermedio para encontrar el control optimal $\mathbf{u}^*(t)$, que depende de $\mathbf{p}(t)$ a través de las condiciones estacionarias.

Notar que la derivada del Hamiltoniano respecto al tiempo t, es:

$$\dot{H} = H_t + H_{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + H_{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{f} = H_t + H_{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \left(H_{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}\right)^T \mathbf{f} \tag{4.24}$$

De manera que si $\mathbf{u}^*(t)$ es un control óptimo, utilizando las ecuaciones 4.20, 4.22, entonces

$$\dot{H}(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = H_t(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \tag{4.25}$$

Y en el caso de tiempo invariante, donde ni $\mathbf{f}$ ni F dependen explícitamente de t, y por tanto tampoco lo hará H, ocurre

$$\dot{H} = 0 \tag{4.26}$$

Por tanto, para sistemas y funciones de coste invariantes en el tiempo, el Hamiltoniano es constantes sobre la trayectoria y el control óptimos.

4.4 Ejemplos

4.4.1 Crecimiento de plantas

Supongamos que un jardinero tiene un número de determinado de plantas y que desea hacerlas crecer hasta una determinada altura en una fecha determinada. Su tasa natural de crecimiento puede acelerarse utilizando luz artificial para reducir las horas de obscuridad cuando no hay crecimiento. Después de una elección apropiada de unidades, podemos modelar este proceso mediante una ecuación diferencial para la altura $x(t)$ de la planta en tiempo t, de la forma

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u \tag{4.27}$$

donde $u \equiv u(t)$ mide el exceso de crecimiento producido por la luz artificial. Podemos suponer que la altura es cero al principio, y que el jardinero quiere una altura de dos unidades después de que haya transcurrido una unidad temporal. De esta forma, requerimos

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2 \tag{4.28}$$

El crecimiento extra producido al utilizar la luz artificial implica un coste financiero, que depende del tamaño del control; una posible función de coste podría tener la forma

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt \tag{4.29}$$

El objetivo es encontrar una variable de control u que produzca una solución de 4.27 satisfaciendo 4.28 y al mismo tiempo que minimice el valor de J. Construimos en primer lugar el Hamiltoniano para este problema

$$H(t, x, u, p) = \frac{1}{2} u^2 + p(1 + u)$$

La ecuación de co-estado es:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

que tiene como solución

$$p(t) = A$$

donde A es una constante. Aplicando la condición estacionaria

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u + p = 0 \Rightarrow u = -p = -A$$

Las ecuaciones de estado se transforman en

$$\dot{x} = 1 + u \Rightarrow \ \dot{x} = 1 - A \Rightarrow x = (1 - A)t + C$$

donde las constantes A y C se calculan utilizando la condición inicial y final impuesta al sistema

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow (1 - A) \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$x(1) = 2 \Leftrightarrow (1 - A) \cdot 2 + C = 2 \Rightarrow A = -1$$

y la solución que cumple las condiciones inicial y final es

$$x^*(t) = 2t, \quad A = -1$$

El control óptimo será por tanto $u^*(t) = 1$ para todo t y el coste óptimo es $J^* = \dfrac{1}{2}$, tal y como encontramos por métodos elementales.

4.4.2 Llenado de un embalse

Se vacía el agua de un embalse a una tasa siempre creciente. Para compensar esta pérdida de agua, se requiere elevar el nivel del agua en el embalse por encima de su altura inicial mediante el bombeo de agua dulce. El coste de esta operación por unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de la tasa de bombeo, y queremos ajustar esta tasa para minimizar el coste. Plantearemos el problema de dos formas diferentes dependiendo del conocimiento que tengamos del instante final t_1. En primer lugar un problema de tiempo final fijo, $t_1 = 1$, donde el nivel requerido debe alcanzarse en un tiempo especificado. En segundo lugar se plantea el problema de tiempo final t_1, libre.

Un conjunto de ecuaciones que pueda servir para modelar este sistema, en las unidades adecuadas, podría ser el siguiente:

$$\dot{x} = -v + u$$

$$x(0) = 0 \tag{4.30}$$

$$x(t_1) = 1$$

junto con la siguiente función de coste

$$J = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} u^2 dt \tag{4.31}$$

que mide la cantidad de energía utilizada en bombear el agua dulce.

La altura del agua por encima del nivel inicial está medida por $x(t)$. Según las condiciones iniciales de la ecuación 4.30 queremos alcanzar la altura 1 por encima del nivel inicial en el tiempo t_1. La tasa de bombeo está dada por $u(t)$, mientras que $v(t)$ es la tasa a la que el agua es vaciada. Supongamos por ejemplo que la función $v(t)$ tiene la forma:

$$v(t) = t.$$

El Hamiltoniano de este problema tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} u^2 + p(-t + u) \tag{4.32}$$

Consideremos en primer lugar el tiempo final fijo igual a $t_1 = 1$. Las ecuaciones que tienen que cumplir el control y la trayectoria óptimas son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = -t + u$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + p = 0$$

En este caso puesto que tanto t_1 como $x(t_1)$ son fijos, $dt_1 = 0$ y $dx(t_1) = 0$ y la condición de contorno 4.21 se cumple trivialmente.

De la segunda ecuación de 4.33 obtenemos que

$$p(t) = A \equiv cte.$$

Mientras que de la tercera ecuación

$$u(t) = -p(t) = -A.$$

Substituyendo en la primera ecuación de 4.33 e integrando

$$\dot{x} = -t - A \Longrightarrow x(t) = -\frac{1}{2} t^2 - At + B$$

las condiciones que deben cumplirse son

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ x(1) &= 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} - A = 1 \Rightarrow A = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por tanto la expresión de $x^*(t)$ y $u^*(t)$ quedan como

$$\begin{aligned} x^*(t) &= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t \\ u^*(t) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

El valor del índice de rendimiento óptimo se obtiene sustituyendo en 4.31 $J^* = \frac{9}{8}$.

Si ahora consideramos a t_1 libre, entonces $dt_1 \neq 0$ y la condición de contorno que se debe cumplir es

$$\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\Big|_{t=t_1} dt_1 = 0 \Rightarrow H(t_1) = 0$$

donde se ha tenido en cuenta que $\phi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ y $dx(t_1) = 0$.

De la ecuación anterior podemos obtener t_1, utilizando la ecuación 4.32

$$\frac{1}{2}u(t_1)^2 + p(t_1)(-t_1 + u(t_1)) = 0$$

Como $u(t) = -p(t) = -A$, para $t \in [0, t_1]$

$$\frac{1}{2}A^2 + A(-t_1 - A) = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2}A$$

Esta ecuación junto con las condiciones de contorno inicial y final

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ x(t_1) &= 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}t_1^2 - At_1 = 1 \end{aligned}$$

resuelven el problema, puesto que como $t_1 = -\frac{1}{2}A \Rightarrow A = -2t_1$

$$-\frac{1}{2}t_1^2 + 2t_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}t_1^2 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

y $A = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Y las expresiones de $x^*(t)$ y $u^*(t)$ son

$$x^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t$$

$$u^*(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

y el coste optimal tiene un valor de

$$J^*(u^*) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (u^*)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/\sqrt{3}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\frac{8}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 1,08866$$

Este coste optimal es menor que el valor de $\frac{9}{8} = 1.125$ que se obtenía cuando fijabamos el tiempo final t_1.

4.4.3 Control de temperatura en una habitación

Se desea calentar una habitación utilizando la menor cantidad posible de energía. Si $\theta(t)$ es la temperatura de la habitación, θ_a la temperatura ambiente fuera de la habitación (que suponemos constante) y $u(t)$ la proporción de calor que hay que suministrar a la habitación, la dinámica del modelo puede representarse mediante la ecuación

$$\dot{\theta} = -a(\theta - \theta_a) + bu \tag{4.34}$$

donde $\theta \equiv \theta(t)$, con a y b constantes que dependen de las propiedades de la habitación, como por ejemplo su aislamiento. Si definimos como variable de estado del sistema la diferencia de temperatura entre el interior y el exterior, es decir

$$x(t) = \theta(t) - \theta_a \tag{4.35}$$

podremos escribir la ecuación de estado como

$$\dot{x} = -ax + bu \tag{4.36}$$

Para controlar la temperatura dentro de un intervalo de tiempo fijo $[0, t_1]$ con la menor cantidad posible de energía proporcionada, definimos el índice de rendimiento como

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2(t)\, dt \tag{4.37}$$

que mide la cantidad de energía utilizada.

A continuación planteamos y resolvemos el problema para dos objetivos distintos: estado final fijo y estado final libre.

El Hamiltoniano para este sistema se define como

$$H = \frac{u^2}{2} + p(-ax + bu) \tag{4.38}$$

De acuerdo con el teorema 4.2 el control óptimo $u^*(t)$ se determina resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = -ax + bu \tag{4.39}$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = ap \tag{4.40}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + bp \tag{4.41}$$

La condición estacionaria 4.41 nos da el control óptimo en función de la variable de co-estado $p(t)$:

$$u(t) = -bp(t) \tag{4.42}$$

por tanto para determinar $u^*(t)$ solamente es necesario encontrar el co-estado óptimo $p^*(t)$.

Si substituimos 4.42 en 4.39 obtenemos el sistema de ecuaciones para las variables de estado y co-estado

$$\dot{x} = -ax - b^2 p \tag{4.43}$$

$$\dot{p} = ap \tag{4.44}$$

La solución de 4.44 es

$$p(t) = Ae^{at} \tag{4.45}$$

Utilizando este resultado en 4.43 obtenemos

$$\dot{x} = -ax - b^2 Ae^{at} \tag{4.46}$$

Si hacemos uso de la trasformada de Laplace para resolver la ecuación anterior obtendremos:

$$sX(s) - x(0) = -aX(s) - b^2 A\frac{1}{s-a}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2 A}{(s+a)(s-a)} \\ &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2 A}{2a}\left(\frac{-1}{s+a} + \frac{1}{s-a}\right) \end{aligned} \tag{4.47}$$

utilizando la transformada inversa

$$x(t) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2 A}{2a}\left(e^{at} - e^{-at}\right) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2 A}{a}\sinh(at) \tag{4.48}$$

Para determinar el valor de la constante A distinguiremos, como se ha comentado antes, dos casos: estado final fijo y estado final libre.

Estado final fijo

Supongamos que la temperatura inicial de la habitación es igual a $\theta_a = 20^o$. Si ahora suponemos que la temperatura en el interior coincide con la del exterior, entonces

$$x(0) = 0^o \tag{4.49}$$

Si, por ejemplo, nuestro objetivo es alcanzar la temperatura de 30^o al cabo de un tiempo fijo de t_1 segundos. El estado final tendrá un valor fijo

$$x(t_1) = 10^o \tag{4.50}$$

Puesto que el tiempo finalm, t_1, y el estado final $x(t_1)$ son ambos fijos, ocurrirá $dt_1 = 0$ y $dx(t_1) = 0$ y se cumplen trivialmente las condiciones de contorno (ecuación 4.21).

Utilizando 4.49 y 4.50 podremos determinar el valor de A

$$x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = -\frac{b^2 A}{a}\sinh(at)$$

$$x(t_1) = 10 \Rightarrow x(t_1) = -\frac{b^2 A}{a}\sinh(at_1) = 10 \Rightarrow A = \frac{-10a}{b^2\sinh(at_1)}$$

y la trayectoria óptima y el control óptimo se puede expresar como:

$$x^*(t) = -\frac{b^2 A}{a}\sinh(at) = \frac{10\sinh(at)}{\sinh(at_1)}$$

$$u^*(t) = -bp(t) = -bAe^{at} = \frac{10ae^{at}}{b\sinh at_1} \tag{4.51}$$

el coste óptimo será por tanto

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}[u^*(t)]^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left[\frac{10ae^{at}}{b\sinh at_1}\right]^2 dt = \frac{1}{2}\frac{100a^2}{b^2\sinh^2(at_1)}\int_0^{t_1} e^{2at}dt = \frac{25a}{b^2\sinh^2(at_1)}\left(e^{2at_1}-1\right)$$

Estado final libre

Supongamos ahora que no es necesario que el estado final sea exactamente $x(t_1) = 10^o$, sino un valor cercano. En ese caso podemos utilizar como índice de rendimiento el siguiente

$$J(x,u) = \frac{1}{2}s\left(x(t_1) - 10\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2(t)\,dt \tag{4.52}$$

para un determinado valor s. Este índice incluye el gasto de energía utilizada, $u(t)$, pero también un coste terminal que es más grande cuanto más lejos de la temperatura buscada esté el estado final. El factor s, es el peso de un sumando frente al otro, por ejemplo, si s es grande, la solución óptima tendrá $x(t_1)$ cercano a 10^o, puesto que solamente entonces el primer término tendrá una pequeña contribución sobre el coste.

De acuerdo con el teorema 4.2, las ecuaciones de estado y co-estado aún están dadas por 4.43 y 4.44, y el control óptimo por 4.42. Por tanto, 4.45 y 4.48 son válidas aún.

La condición inicial sigue siendo 4.49, pero ahora la condición final debe determinarse utilizando las condiciones de contorno 4.21. Como en el caso anterior, estamos suponiendo que el instante de tiempo final t_1 es fijo y por tanto $dt_1 = 0$, de ahí que el segundo término de 4.21 es automáticamente igual que 0. Puesto que ahora $x(t_1)$ no está fijado, $dx(t_1) \neq 0$ y las condiciones quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T\Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left(\phi_t + \psi_t^T\boldsymbol{\lambda} + H\right)\Big|_{t=t_1} dt_1 &= 0 \Rightarrow \\
\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T\Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{t=t_1} - p(t_1) &= 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$p(t_1) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=t_1} = s\left(x(t_1) - 10\right) \tag{4.53}$$

donde además se ha utilizado que $\psi \equiv 0$.

Para calcular el valor de la constante A, de las ecuaciones 4.48 y 4.45, necesitaremos la condición inicial $x(0) = 0$, junto con la ecuación anterior y que puede ponerse como

$$x(t_1) = \frac{p(t_1)}{s} + 10 \tag{4.54}$$

utilizando las expresiones para $p(t)$ (ecuación 4.45) y $x(t)$ (ecuación 4.48) obtenemos

$$x(t_1) = x(0)\,e^{-at} - \frac{b^2 A}{a}\sinh(at_1) = -\frac{b^2 A}{a}\sinh(at_1)$$

$$p(t_1) = Ae^{at_1}$$

utilizando 4.54

$$-\frac{b^2 A}{a}\sinh(at_1) = \frac{Ae^{at_1}}{s} + 10$$

despejando A

$$A = \frac{-10as}{ae^{at_1} + sb^2\sinh(at_1)}$$

El estado y co-estado óptimos serán

$$x^*(t) = \frac{10sb^2}{ae^{at_1} + sb^2\sinh(at_1)}\sinh(at) \tag{4.55}$$

$$p^*(t) = Ae^{at} = \frac{-10as}{ae^{at_1} + sb^2\sinh(at_1)}e^{at} \tag{4.56}$$

Finalmente la ecuación 4.42 nos proporciona el control óptimo

$$u^*(t) = -bp^*(t) = \frac{10abs}{ae^{at_1} + sb^2\sinh at_1}e^{at} \tag{4.57}$$

El estado final en $t = t_1$ es

$$x^*(t_1) = \frac{10sb^2\sinh at_1}{ae^{at_1} + sb^2\sinh at_1} \tag{4.58}$$

En este caso el valor final de $x^*(t_1)$ en 4.58 no es, en general, igual al valor deseado 10, sino que depende del peso s asignado al estado final en el índice de coste. Cuando s se hace grande, damos más importancia al término $(x(t_1) - 10)$ respecto al término dado por $u^2(t)$; es decir, damos más importancia a que $x(t_1)$ esté cerca de 10 que a que $u^2(t)$ sea pequeño en el intervalo $[0, t_1]$. De hecho, cuando $s \to \infty$, la trayectoria óptima dada por 4.55, el co-estado óptimo dado por 4.56 y el control óptimo de la ecuación 4.57 tienden hacia las expresiones encontradas en el caso anterior cuando $x(t_1)$ era fijo. En este límite, el estado final $x^*(t_1)$ en 4.58 se hace exactamente igual a 10^o.

4.5 Problemas de tiempo final libre

En esta sección estudiaremos con más profundidad las condiciones de contorno generales

$$\left.\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T\right|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left.\left(\phi_t + \psi_t^T\boldsymbol{\lambda} + H\right)\right|_{t=t_1} dt_1 = 0 \tag{4.59}$$

Concretamente estudiaremos el caso en el que t_1, el tiempo final, es libre y por tanto $dt_1 \neq 0$.

Para resolver un problema de control óptimo utilizando las ecuaciones de la tabla 4.2 podemos a menudo eliminar el control $u(t)$ teniendo en cuenta la condición estacionaria. Posteriormente, para resolver las ecuaciones de estado y co-estado, necesitamos las n componentes del estado inicial $x(t_0)$ y las n condiciones finales. También hay que encontrar las s componentes del multiplicador $\boldsymbol{\lambda}$ y el tiempo final t_1. El coeficiente de $dx(t_1)$ en 4.59 proporciona n ecuaciones, el coeficiente de dt_1 de 4.59 proporciona una ecuación, y la condición $\psi(t_1, x(t_1)) = 0$ proporciona las restantes s ecuaciones necesarias para conseguir la solución del problema de control óptimo completamente.

4.5.1 Problemas de tiempo mínimo

Como se vio en el tema anterior, una clase especial de problemas de tiempo final libre está definida mediante el índice de rendimiento

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_1} 1dt \tag{4.60}$$

que aparece cuando estamos interesados en minimizar el tiempo $(t_1 - t_0)$ que necesitamos para anular una determinada función del estado final $\psi(t_1, x(t_1))$ a partir de un estado inicial dado $x(t_0)$. A partir de este índice de coste, el Hamiltoniano es

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 1 + \mathbf{p}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.61}$$

Un caso especial de problema de tiempo óptimo se produce cuando el estado final $\mathbf{x}(t_1)$ es un determinado valor $\mathbf{r}(t_1)$ conocido, entonces $d\mathbf{x}(t_1) = 0$. Puesto que en este caso

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{r}(t_1) = 0 \tag{4.62}$$

es independiente de t_1 y puesto que $\phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0$ en el problema de tiempo mínimo, la ecuación 4.59 requiere que

$$H(t_1) = 0 \tag{4.63}$$

Como H no es una función explícita de t, según podemos comprobar en 4.61, tendrá que ocurrir

$$H(t) = 0 \tag{4.64}$$

para cualquier $t \in [t_0, t_1]$

4.5.2 Condición de transversalidad

Otro tipo de problema de tiempo final libre se da cuando tanto $\mathbf{x}(t_1)$ como t_1 son libres, pero independientes. Entonces para que se cumpla 4.59 se ha de cumplir

$$\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \bigg|_{t=t_1} = 0 \tag{4.65}$$

y

$$\left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\bigg|_{t=t_1} = 0 \tag{4.66}$$

Por otra parte si $\mathbf{x}(t_1)$ y t_1 son libres, pero dependientes, por ejemplo cuando el estado final $\mathbf{x}(t_1)$ debe caer sobre una curva $\mathbf{c}(t)$, pero por lo demás $\mathbf{x}(t_1)$ y t_1 son libres. En este caso

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{c}(t_1) \tag{4.67}$$

y

$$d\mathbf{x}(t_1) = \frac{d\mathbf{c}(t_1)}{dt_1} dt_1 \tag{4.68}$$

por tanto 4.59 se transforma en (notar que en este caso $\psi(t) \equiv 0$)

$$(\phi_{\mathbf{x}} - \mathbf{p})^T \Big|_{t=t_1} \frac{d\mathbf{c}(t_1)}{dt_1} dt_1 + (\phi_t + H)\big|_{t=t_1} dt_1 = 0 \tag{4.69}$$

puesto que $dt_1 \neq 0$

$$(\phi_{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{p}(t_1))^T \frac{d\mathbf{c}(t_1)}{dt_1} + \phi_t(t_1) + H(t_1) = 0 \tag{4.70}$$

Por último obtenemos otra clase de problemas de tiempo final libre cuando el estado final debe estar sobre una superficie (o *conjunto destino*). Si la superficie está definida por

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 \tag{4.71}$$

entonces 4.65 y 4.66 deben ocurrir independientemente. Si nos centramos en la última condición, podemos escribir

$$\psi(t_1) = \begin{bmatrix} \psi_1(t_1) \\ \psi_2(t_1) \\ \vdots \\ \psi_s(t_1) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.72}$$

Cada componente $\psi_i(t_1) = 0$ define una hipersuperficie en $\mathbb{R}^{\ltimes}$ y se requiere que el estado final esté en la intersección de esas hipersuperficies, $\psi(t_1) = 0$.

Si escribimos 4.65 como

$$(\phi_{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{p}(t_1)) = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi_1^T(t_1)}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_s^T(t_1)}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = -\left[\frac{\partial \psi_1^T(t_1)}{\partial \mathbf{x}}, \cdots, \frac{\partial \psi_s^T(t_1)}{\partial \mathbf{x}}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

se observa que el vector $(\phi_{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{p}(t_1))$ debe ser una combinación lineal de los vectores gradientes $\partial \psi_i(t_1)/\partial \mathbf{x}$. Este vector debe por tanto ser normal o *transversal* a la superficie definida por 4.71. Como caso especial, si la función peso final $\phi(t_1)$ es igual que cero, entonces $\mathbf{p}(t_1)$ debe ser normal a la superficie $\psi(t_1) = 0$

Esta condición 4.65/4.73 sobre el estado final se conoce como *condición de tranversalidad.* Si $\mathbf{x}(t_1)$ y dt_1 son dependientes (i.e. la superficie está en movimiento) la condición de transversalidad se parece a 4.70

Puesto que 4.66 es también una condición sobre el co-estado final, también a menudo se denomina condición de transversalidad.

4.6 Problemas con entradas acotadas

La ley de control óptimo dada en la tabla 4.2, sobre la que se basa todo el capítulo, proporciona el control como una función continua implícita del estado y el co-estado. Bajo ciertas asunciones de derivabilidad en $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, el control es también una función derivable del tiempo. Además, es se encuentra resolviendo un problema de frontera . A continuación veremos una forma diferente de leyes sobre el control.

4.6.1 Principio del mínimo de Pontryagin

El principio del máximo de Pontryagin (PMP) se aplica a una variedad de problemas de control óptimo muy amplia. El PMP proporciona condiciones necesarias que una solución óptima debe cumplir para que exista. Sin embargo no tenemos, en general, garantías de que un problema dado tenga solución.

Supongamos que el comportamiento de un sistema viene descrito por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.74}$$

y que lleva asociado un índice de coste de la forma

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{4.75}$$

donde el estado final debe cumplir

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 \tag{4.76}$$

y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ está dado.

Si el control no está restringido, el problema de control óptimo se resuelve utilizando la tabla 4.2, donde la condición de optimalidad es

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{4.77}$$

con

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.78}$$

En los problemas reales las variables de control están sujetas a restricciones en sus magnitudes, típicamente de la forma $|u_i(t)| \leq k_i$. Esto implica que el conjunto de estados finales que puede alcanzarse está restringido. Nuestro objetivo en este tema es derivar las condiciones necesarias para la optimalidad correspondientes al teorema 4.2 del tema anterior para el caso no acotado. Un control será *admisible* si satisface las restricciones, y consideraremos aquellas variaciones para las que $u^* + \delta u$ sea admisible y $\|\delta u\|$ sea suficientemente pequeña, de manera que el signo de

$$\Delta J = J(u^* + \delta u) - J(u^*) = \delta J(u^*) + \|\delta u\| \xi(\delta u)$$

esté determinado por $\delta J(u^*)$. Debido a las restricciones en δu, no podemos aplicar el teorema **??** y en su lugar la condición necesaria para que u^* minimice el funcional J es

$$\delta J(u^*, \delta u) \geq 0 \tag{4.79}$$

El desarrollo es el mismo que el realizado para el caso anterior; introducimos multiplicadores de Lagrange para definir J_a en 4.16 y los elegimos de forma que cumplan las ecuaciones 4.19 y 4.20. La única diferencia es que la expresión para δJ_a en **??** se substituye por

$$\delta J_a(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \mathbf{p}) - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})]\, dt \tag{4.80}$$

Y obtenemos por tanto a partir de 4.79 que una condición necesaria para que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ sea un control de mínimo es que $\delta J_a(\mathbf{u}^*)$ en 4.80 sea no negativo para cualquier valor admisible de $\delta\mathbf{u}$. Este hecho implica que

$$H(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}, \mathbf{p}^*) \geq H(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) \text{ para cualquier } \delta\mathbf{u} \text{ admisible} \tag{4.81}$$

para cualquier $\delta\mathbf{u}$ admisible y cualquier t en $t_0 \leq t \leq t_1$. Es decir cualquier variación en el control óptimo que suceda en el instante t mientras que el estado y el co-estado permanecen en sus valores óptimos en t incrementará el valor del Hamiltoniano. Esta condición puede escribirse como

$$H(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) \leq H(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \mathbf{p}^*), \text{ para cualquier } \mathbf{u} \text{ admisible} \tag{4.82}$$

La condición de optimalidad 4.82 se denomina *principio del mínimo de Pontryagin:* "El Hamiltoniano debe minimizarse sobre todos los controles admisibles u para valores óptimos del estado y el co-estado".

Si la ecuación 4.81 no se cumple en algún intervalo $t_2 \leq t \leq t_3$, con $t_3 - t_2$ suficientemente pequeño, entonces eligiendo $\delta\mathbf{u} = 0$, para t fuera de este intervalo $\delta J_a(\mathbf{u}^*)$ se haría negativo. La ecuación 4.81 establece que u^* minimiza H, por tanto podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.3 (Principio del mínimo de Pontryagin) *Las condiciones necesarias para que u^* minimice el funcional $J(\mathbf{u})$ descrito por la ecuación:*

$$J(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$$

sujeto a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad t \geq t_0,\ t_0 \text{ fijo}$$

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \text{ fijo}$$

siendo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, donde $\mathbf{u}$ está acotado ($|u_i(t)| \leq 1$, $k = 1, \ldots, m$), es que existan funciones $p_1, \ldots, p_n : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, y valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, cumpliendo las ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\overset{\bullet}{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left(\phi_{\mathbf{x}} + \psi_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}\right)^T \Big|_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) + \left(\phi_t + \psi_t^T \boldsymbol{\lambda} + H\right)\Big|_{t=t_1} dt_1 = 0$$

$$H(t, x^*, u^*, p^*, t) \leq H(t, x^*, u, p^*) \tag{4.83}$$

siendo $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ el hamiltoniano del sistema.

Con una leve diferencia en la definición de H el principio se transformaría en maximizar H, y es referido entonces en la literatura como el *principio del máximo.* Notar que u^* puede ser ahora una función continua a trozos.

En el análisis se ha asumido que t_1 es fijo y que $x(t_1)$ es libre; las condiciones de frontera para otra situación son precisamente las mismas que las dadas para el caso no acotado del tema anterior.

4.6.2 Control Bang-Bang

Discutiremos a continuación el *problema de tiempo mínimo lineal* con entradas condicionadas. Para estos problemas el sistema está descrito por la ecuación

$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.84}$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{\ltimes}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{>}$, junto con el índice de coste

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_1} 1dt \tag{4.85}$$

siendo el tiempo final t, libre. Además el control $\mathbf{u}(t)$ debe cumplir

$$|u_i(t)| \leq 1 \qquad i = 1, \dots, m \tag{4.86}$$

para cualquier $t \in [t_0, t_1]$.

El problema de control óptimo es encontrar un control $\mathbf{u}^*(t)$ que minimice $J(t)$, cumpla 4.86 para cualquier instante de tiempo, y conduzca el sistema desde un estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ hasta un estado final $\mathbf{x}(t_1)$ cumpliendo la ecuación 4.76 para una función ψ dada. Una condición como 4.86 puede aparecer en muchos problemas donde la magnitud del control está limitada por consideraciones físicas, por ejemplo, la potencia del motor de un vehículo.

Para el problema formulado en 4.84-4.86 el Hamiltoniano está dado por

$$H = F + \mathbf{p}^T \mathbf{f} = 1 + \mathbf{p}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \tag{4.87}$$

De acuerdo con el principio del mínimo de Pontryagin 4.83 el control óptimo $\mathbf{u}^*(t)$ debe cumplir

$$1 + (\mathbf{p}^*)^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^*) \leq 1 + (\mathbf{p}^*)^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

Ahora se puede observar la importancia de tener el estado y el co-estado óptimos a ambos lados de la desigualdad, para este caso podemos decir que para la optimalidad del control $\mathbf{u}^*(t)$ se tiene que cumplir

$$(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{B}\mathbf{u}^* \leq (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.88}$$

para cualquier otro control $\mathbf{u}(t)$ admisible. Esta condición permite expresar $\mathbf{u}^*(t)$ en términos del co-estado. Discutiremos en primer lugar el caso en el que solamente tenemos una variable de control $\mathbf{u}(t) \equiv u(t)$.

Para $u(t)$ escalar, si $\mathbf{b}$ representa el vector de entrada. En este caso es fácil de elegir $u^*(t)$ para minimizar el valor de $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}u(t)$. Según la ecuación 4.88 para este caso el control óptimo $u^*(t)$ debe cumplir

$$(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{b}u^* \leq (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{b}u$$

siendo $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b} \in \mathbb{R}$.

Si $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}$ es positivo, tendríamos que seleccionar $u^*(t) = -1$ para obtener el valor negativo más grande posible de $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}u(t)$. Por otra parte, si $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}$ es negativo, habría que elegir $u^*(t) = 1$ par conseguir que $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}u(t)$ sea lo más negativo posible. Si $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}$ es cero en un instante t, entonces $u^*(t)$ puede tomar cualquier valor en ese tiempo puesto que entonces $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}u(t)$ será cero para todos los valores de $u(t)$.

Esta relación entre el control óptimo y el co-estado puede expresarse de una forma sencilla utilizando la función *signo: sgn* (w), definida como:

$$sgn(w) = \begin{cases} 1 & w > 0 \\ \text{indeterminado} & w = 0 \\ -1 & w < 0 \end{cases} \tag{4.89}$$

Entonces el control óptimo para el caso $m = 1$ está dado por

$$u^*(t) = -sgn\left(\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}\right) \tag{4.90}$$

La cantidad $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}$ se denomina *función de intercambio.* Cuando la función de intercambio cambia de signo, el control *cambia* de uno de sus valores extremos a otro. Este tipo de control se llama *control bang-bang*, como ya definimos en el tema de introducción.

Si el control es un vector m–dimensional, entonces de acuerdo con el principio del mínimo expresado en 4.88, necesitamos elegir $\mathbf{u}^*(t)$ para hacer $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ lo más pequeño posible. Para ello, seleccionamos la componente $u_i^*(t) = 1$ si la componente $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}_i$ es negativa, y $u_i^*(t) = -1$ si $\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}_i$ es positiva, donde $\mathbf{b}_i$ es la i–ésima columna de $\mathbf{B}$. Esta estrategia de control hace la igualdad

$$\mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{p}^T(t)\,\mathbf{b}_i u_i(t) \tag{4.91}$$

tan pequeña como sea posible para cualquier $t \in [t_0, t_1]$.

De esta forma podemos escribir

$$\mathbf{u}^*(t) = -sgn\left(\mathbf{B}^T\mathbf{p}(t)\right) \tag{4.92}$$

donde hemos definido la función signo para un vector $\mathbf{w}$ como

$$\mathbf{v} = sgn(\mathbf{w}) \quad \text{si } v_i = sgn(w_i) \quad \text{para cada } i \tag{4.93}$$

donde v_i, w_i son las componentes de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Es posible que una componente $\mathbf{b}_i^T\mathbf{p}(t)$ de la función de intercambio $\mathbf{B}^T\mathbf{p}(t)$ sea cero durante un intervalo finito de cero. En este caso, la componente $u_i^*(t)$ del control optimal no está bien definida por 4.82. Este caso es llamado una *condición singular.* Si no sucede esto, el problema de tiempo óptimo se llama *normal.*

Problema de la posición

Aplicaremos a continuación los resultados obtenidos sobre el problema de la posición presentado y resuelto mediante métodos directos en el tema anterior. Recordemos la notación utilizada allí: La variable x_1 medía el desplazamiento del objeto a su posición deseada; mientras que x_2 representaba la velocidad; y u la fuerza que actúa sobre el objeto y que podemos controlar. Queremos controlar el sistema de forma que si inicialmente el objeto está en reposo a una distancia X del origen, alcance esta posición en un tiempo $t_1$que sea mínimo y queremos además dejar el objeto también en reposo. Por tanto el estado final está dado por $x_1(t_1) = 0$ y $x_2(t_1) = 0$. El sistema estaba descrito por las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Y como queremos minimizar el tiempo en alcanzar la posición de reposo en el origen el coste elegido es igual al tiempo t_1 transcurrido hasta alcanzar el objetivo y por tanto es:

$$J = \int_0^{t_1} 1dt \tag{4.95}$$

y este problema será de tiempo libre.

El control u es una función continua a trozos, con límites de -1 y $+1$, por tanto $u_1 \in \mathcal{U}_b$, y los estados inicial y final son

$$\begin{array}{c} x_1(0) = X, \quad x_2(0) = 0 \\ \\ x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0 \end{array} \tag{4.96}$$

Por tanto, para este problema la función de estado terminal $\psi(t, \mathbf{x}(t))$ está definida como:

$$\psi(t, \mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.97}$$

de forma que

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0$$

Para resolver el problema necesitamos el Hamiltoniano

$$H(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 1 + p_1 x_2 + p_2 u \tag{4.98}$$

donde las variables de co-estado cumplen las ecuaciones

$$\begin{array}{c} \overset{\bullet}{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \overset{\bullet}{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \end{array} \tag{4.99}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución se obtienen de forma directa

$$\begin{array}{c} p_1(t) = A \\ p_2(t) = -At + B \end{array} \tag{4.100}$$

donde A y B son constantes.

Las condiciones de contorno de este problema, teniendo en cuenta que no hay función de coste terminal, $\phi(t, x(t)) \equiv 0$, que la función de estado final está dada por 4.97, y no depende de t, y que el estado final es fijo $(d\mathbf{x}(t_1) = 0)$

$$H(t_1) = 0 \Rightarrow 1 + p_1^*(t_1)\, x_2^*(t_1) + p_2^*(t_1)\, u^*(t_1) = 0 \Rightarrow p_2^*(t_1)\, u^*(t_1) = -1 \tag{4.101}$$

Por último al aplicar el principio del mínimo tendremos

$$H(t, \mathbf{x}^*, u^*, \mathbf{p}^*) \leq H(t, \mathbf{x}^*, u, \mathbf{p}^*) \Rightarrow 1 + p_1^* x_2^* + p_2^* u^* \leq 1 + p_1^* x_2^* + p_2^* u$$

y simplificando

$$p_2^* u^* \leq p_2^* u \tag{4.102}$$

para cualquier control admisible u.

La elección de $u^*(t)$, depende del signo de la variable de co-estado $p_2^*(t)$. El contro u^* toma el valor -1 si p_2^* es positiva, y el valor 1 cuando p_2^* es negativa. De esta forma tenemos un control bang-bang que cambia de valor entre sus valores extremos cuando $p_2^*(t)$ pasa por cero. Puesto que $p_2^*(t) = -At + B$ es una función lineal de t, es decir, una recta, pueden darse los siguientes casos:

$$\text{Caso 1)} \quad p_2^*(t) > 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \Rightarrow u^*(t) = -1 \quad \forall t \in [0, t_1]$$

$$\text{Caso 2)} \quad p_2^*(t) < 0 \quad \forall t \in [0, t_1] \Rightarrow u^*(t) = 1 \quad \forall t \in [0, t_1]$$

$$\text{Caso 3)} \quad p_2^*(t) = \begin{cases} > 0 & t \in [0, t_2] \\ \\ < 0 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, t_2] \\ \\ 1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases}$$

$$\text{Caso 4)} \quad p_2^*(t) = \begin{cases} > 0 & t \in [0, t_2] \\ \\ < 0 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_2] \\ \\ -1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases}$$

Habría que estudiar los 4 casos y decidir cuál de ellos es el consigue el objetivo de situar el objeto en reposo en el origen y que además lo hace en el mínimo tiempo. Suponiendo que $X > 0$, veremos que el único caso posible es el Caso 3) anterior.

Veamos que el caso 1) no puede darse: suponemos para ello que $p_2^*(t) > 0$ en todo el intervalo $[0, t_1]$, en ese caso podemos simplificar $p_2^*(t)$ en la ecuación 4.102 sin que cambie el sentido de la desigualdad y tendremos

$$u^* \leq u$$

para cualquier u admisible. Este objetivo se conseguirá cuando tomemos $u^*(t) = -1$, para todo $t \in [0, t_1]$, puesto que $|u(t)| \leq 1$.

Si utilizamos este resultado en las ecuaciones de estado (ecuación 4.94), tendremos

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -1$$

cuya solución es fácil de obtener, ya que

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t + C \\ x_1(t) &= -\frac{t^2}{2} + Ct + D \end{aligned}$$

Los valores de las constantes C y D, que caracterizan $x_1^*(t)$ y $x_2^*(t)$, se obtienen utilizando las condiciones de contorno dadas por 4.96. Si utilizamos las condiciones iniciales

$$x_1(0) = X \Rightarrow X = C$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

y las expresiones de $x_1^*(t)$ y $x_2^*(t)$ serían

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t \\ x_1(t) &= -\frac{t^2}{2} + X \end{aligned}$$

Aplicando ahora las condiciones finales

$$x_1(t_1) = 0 \Rightarrow -t_1 = 0$$

$$x_2(t_1) = 0 \Rightarrow -\frac{t_1^2}{2} + X = 0 \Rightarrow X = 0$$

luego el problema solamente tendrá solución si $X = 0$, es decir, si ya estamos en el origen de coordenadas en el instante inicial. Como este no es el caso, ya que estamos suponiendo $X > 0$, llegaríamos a una contradicción, que aparece porque hemos supuesto que $p_2^*(t) > 0$ en $[0, t_1]$.

Consideremos ahora el caso 3). Existe un tiempo intermedio t_2 en el cual ocurre un cambio de signo para $p_2^*(t)$, que pasa de positivo a negativo. Estudiaremos el problema para los dos subintervalos $[0, t_2]$ y $[t_2, t_1]$.

1. Intervalo $I_1 = [0, t_2]$

   En este intervalo el co-estado óptimo $p_2^*(t)$ es positivo, por tanto, utilizando la ecuación 4.102 y simplificando $p_2^*(t)$, el valor de u^* es

   $$u^*(t) = -1 \qquad t \in [0, t_2]$$

y las soluciones generales para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serían la mismas que para el caso anterior

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= -\frac{t^2}{2} + Ct + D \\ x_2^1(t) &= -t + C \end{aligned}$$

donde el superíndice 1, indica que la solución se obtiene para el intervalo I_1.

En ese intervalo se aplican las condiciones de contorno para el estado inicial

$$\begin{aligned} x_1^1(0) &= X \Rightarrow D = X \\ x_2^1(0) &= 0 \Rightarrow C = 0 \end{aligned}$$

y las expresiones para los estados óptimos en I_1 son

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= -\frac{t^2}{2} + X \\ x_2^1(t) &= -t \end{aligned}$$

2. Intervalo $I_2 = [t_2, t_1]$

   En este intervalo el co-estado óptimo $p_2^*(t)$ es negativo y por tanto utilizando de nuevo la ecuación 4.102, teniendo en cuenta que la simplificación de $p_2^*(t)$ implica un cambio en el sentido de la desigualdad tendremos

$$u^* \geq u$$

   para cualquier control admisible, que se obtiene tomando u^* como

$$u^*(t) = 1 \qquad t \in [t_2, t_1]$$

   En este caso el sistema formado por las ecuaciones de estado será

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 1 \end{aligned}$$

   cuya solución se obtiene también directamente como

$$\begin{aligned} x_1^2(t) &= \frac{t^2}{2} + Et + F \\ x_2^2(t) &= t + E \end{aligned}$$

   donde el superíndice indica que estamos en I_2.

   En ese intervalo se aplican las condiciones de contorno para el estado final

$$\begin{aligned} x_1^2(t_1) &= 0 \Rightarrow \frac{t_1^2}{2} + Et_1 + F = 0 \\ x_2^2(t_1) &= 0 \Rightarrow t_1 + E = 0 \end{aligned}$$

   que es un sistema con 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Para encontrar otra ecuación que nos permita resolver el problema, supondremos continuidad en las soluciones en el instante de cambio t_2, es decir

$$\begin{aligned} x_1^1(t_2) &= x_1^2(t_2) \Leftrightarrow -\frac{t_2^2}{2} + X = \frac{t_2^2}{2} + Et_2 + F \\ x_2^1(t_2) &= x_2^2(t_2) \Leftrightarrow -t_2 = t_2 + E \end{aligned}$$

   que incluye una incógnita más, pero también dos ecuaciones.

La solución del problema para este caso se obtiene resolviendo el sistema

$$\frac{t_1^2}{2} + Et_1 + F = 0 \tag{4.103}$$

$$t_1 + E = 0 \tag{4.104}$$

$$t_2^2 + Et_2 + (F - X) = 0 \tag{4.105}$$

$$2t_2 + E = 0 \tag{4.106}$$

De 4.104 y 4.106 obtenemos

$$t_2 = \frac{t_1}{2}$$

y utilizando el resto de ecuaciones

$$t_1 = 2\sqrt{X}$$

Aunque ya no es necesario, podemos calcular la expresión para las variables de co-estado $p_1^*(t)$ y $p_2^*(t)$, utilizando para ello la condición de contorno 4.101 y el hecho de que en t_2 el co-estado óptimo $p_2^*(t)$ pasa de positivo a negativo, es decir, se anula en t_2

$$\begin{aligned} p_2^*(t_1) &= -1 \Rightarrow -At_1 + B = -1 \\ p_2^*(t_2) &= 0 \Rightarrow -At_2 + B = 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{t_1 - t_2} = \frac{1}{t_1 - t_1/2} = \frac{1}{t_1/2} = \frac{2}{t_1} \\ B &= \frac{t_2}{t_1 - t_2} = 1 \end{aligned}$$

4.6.3 Control Bang-Off-Bang

Las funciones de coste que hemos empleado hasta ahora han estado relacionadas con el tiempo y con el cuadrado de la variable de control de forma separada y conjunta. Adicionalmente, es posible, definir otro índice de rendimiento que depende del valor absoluto de la variable de control. Este índice de coste, normalmente se denomina *coste de combustible*, puesto que el combustible se consume cualquiera que sea la dirección del empuje efectuado por un motor. Los costes de esta clase introducen una nueva característica en la solución e incrementa la dificultad del mismo.

En esta sección se discute el problema de mínimo combustible con entradas de control acotadas en magnitud. El control del combustibles es importante por ejemplo en aplicaciones aerospaciales donde el combustible está limitado y debe conservarse. Supongamos el sistema descrito por la ecuación

$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.107}$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{\ltimes}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$.

Si se asume que el combustible en cada componente de la entrada es proporcional a la magnitud de esa componente, podemos definir un índice de rendimiento (o coste) de la foma

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{m} \beta_i \left| u_i(t) \right| dt \tag{4.108}$$

donde se permite la posibilidad de penalizar de forma diferente el combustible quemado en cada una de las m componentes $u_i(t)$ de $\mathbf{u}(t)$ utilizando un escalar $\beta_i > 0$ como peso. Si se define el vector valor absoluto como

$$|\mathbf{u}| = \begin{bmatrix} |u_1| \\ \vdots \\ |u_m| \end{bmatrix} \tag{4.109}$$

y el vector $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^T$ tenemos

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}(t)| \, dt \tag{4.110}$$

Si el control es acotado, entonces podemos asumir

$$|\mathbf{u}(t)| \leq 1 \tag{4.111}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$

El problema consiste en encontrar un control $\mathbf{u}^*$ que minimice $J(\mathbf{u})$, que cumpla 4.111 y que lleve el sistema desde un estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ hasta un estado final $\mathbf{x}(t_1)$. Además el estado final puede estar restingido por una condición de estado final del tipo

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 \tag{4.112}$$

para una determinada función ψ.

El instante de tiempo final t_1 puede ser fijo o libre, aunque hay que notar, sin embargo, que t_1 debe ser al menos tan grande como el mínimo tiempo requerido para llevar $\mathbf{x}(t_0)$ hasta el estado final $\mathbf{x}(t_1)$ cumpliendo 4.112.

El Hamiltoniano para este sistema es

$$H = \boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}| + \mathbf{p}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \tag{4.113}$$

y de acuerdo al principio del mínimo 4.82, el control optimal debe cumplir

$$\boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}^*| + (\mathbf{p}^*)^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^*) \leq \boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}| + (\mathbf{p}^*)^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}) \tag{4.114}$$

para cualquier otro control $\mathbf{u}(t)$ admisible. Puesto que el estado y el co-estado óptimos aparecen a ambos lados de la desigualdad, la expresión se simplifica

$$\boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}^*| + (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{B}\mathbf{u}^* \leq \boldsymbol{\beta}^T |\mathbf{u}| + (\mathbf{p}^*)^T \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.115}$$

para cualquier $\mathbf{u}(t)$ admisible.

Para traducir la ecuación 4.115 en una regla que nos permita obtener $\mathbf{u}^*(t)$ a partir del co-estado óptimo $\mathbf{p}^*(t)$, se asume que las m componentes del control son independientes por tanto, para cada $j = 1, \ldots, m$ se requiere que para cualquier control admisible $u_j(t)$ se cumpla la desigualdad

$$\left|u_j^*\right| + \frac{(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{b}_j u_j^*}{\beta_j} \leq |u_j| + \frac{(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{b}_j u_j}{\beta_j} \tag{4.116}$$

donde $\mathbf{b}_j$ denota la j–ésima columna de $\mathbf{B}$. Debemos ahora demostrar cómo seleccionar las componentes del control $u_j^*(t)$ a partir de $(\mathbf{p}^*)^T \mathbf{b}_j$

Puesto que

$$|u_j| = \begin{cases} u_j & \text{si } u_j \geq 0 \\ -u_j & \text{si } u_j \leq 0 \end{cases} \tag{4.117}$$

podemos escribir la cantidad que estamos tratando de minimizar como

$$q_j(t) \triangleq |u_j| + \frac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{p} u_j}{\beta_j} = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{p}}{\beta_j}\right) u_j & u_j \geq 0 \\ \left(-1 + \dfrac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{p}}{\beta_j}\right) u_j & u_j \leq 0 \end{cases} \tag{4.118}$$

Para *minimizar* $q_j(t)$ de forma que 4.116 se cumpla, tendremos que seleccionar valores para $u_j^*(t)$ correspondientes al límite inferior de la región sombreada de la figura. Sin embargo, si $\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = 1$, entonces cualquier valor no positivo de $u_j^*(t)$ hará $q_j(t) = 0$. Por otra parte, si $\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = -1$, entonces cualquier valor no-negativo para $u_i^*(t)$ hará que $q_i(t) = 0$. Analíticamente, al minimizar la función $q_j(t)$ tendremos lo siguientes casos:

1. Caso I)

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j < -1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j < 0 \\ -1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j < 0 \end{cases} \Rightarrow q_j(t) = \begin{cases} \left(1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \leq 0 & u_j \geq 0 \\ \left(-1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \geq 0 & u_j \leq 0 \end{cases}$$

y por tanto el mínimo de $q_j(t)$ se alcanza cuando $u_j^* = 1$.

2. Caso II)

$$-1 < \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j \\ -1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j < 0 \end{cases} \Rightarrow q_j(t) = \begin{cases} \left(1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \geq 0 & u_j \geq 0 \\ \left(-1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \geq 0 & u_j \leq 0 \end{cases}$$

y por tanto el mínimo de $q_j(t)$ se alcanzará cuando $u_j^* = 0$

3. Caso III)

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j > 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j > 0 \\ -1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j > 0 \end{cases} \Rightarrow q_j(t) = \begin{cases} \left(1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \geq 0 & u_j \geq 0 \\ \left(-1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j\right) u_j \leq 0 & u_j \leq 0 \end{cases}$$

y por tanto el mínimo de $q_j(t)$ se alcanzará cuando $u_j^* = -1$

4. caso IV)

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = -1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = 0 \\ -1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = -2 \end{cases} \Rightarrow q_j(t) = \begin{cases} 0 & u_j \geq 0 \\ -2u_j \geq 0 & u_j \leq 0 \end{cases}$$

y por tanto el mínimo de $q_j(t)$ se alcanza para cualquier valor $u_j^* \geq 0$.

5. caso V)

$$\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = 2 \\ -1 + \mathbf{b}_j^T\mathbf{p}/\beta_j = 0 \end{cases} \Rightarrow q_j(t) = \begin{cases} 2u_j & u_j \geq 0 \\ 0 & u_j \leq 0 \end{cases}$$

y por tanto el mínimo de $q_j(t)$ se alcanza para cualquier valor $u_j^* \leq 0$.

Por tanto la ley del control de mínimo combustible expresada en términos de las variables de co-estado es

$$u_j^*(t) = \begin{cases} 1 & \dfrac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}}{\beta_j} < -1 \\ \text{no negativo} & \dfrac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}}{\beta_j} = -1 \\ 0 & -1 < \dfrac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}}{\beta_j} < 1 \\ \text{no positivo} & \dfrac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}}{\beta_j} = 1 \\ -1 & 1 < \dfrac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}}{\beta_j} \end{cases} \tag{4.119}$$

De forma general se define la función *zona muerta (dead zone)*

$$dez\,(w) = \begin{cases} -1 & w < -1 \\ \text{entre } -1 \text{ y } 0 & w = -1 \\ 0 & -1 < w < 1 \\ \text{entre } 1 \text{ y } 0 & w = 1 \\ -1 & w > 1 \end{cases} \tag{4.120}$$

y entonces podemos escribir el control de mínimo combustible como

$$u_j^*\,(t) = -dez\left(\frac{\mathbf{b}_j^T\mathbf{p}\,(t)}{\beta_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.121}$$

Puesto que cada componente de $\mathbf{u}\,(t)$ es saturada o igual que cero, diremos que esta es una ley de control *bang-off-bang.*

Si $\dfrac{\mathbf{b}_i^T\mathbf{p}\,(t)}{c_i}$ es igual a 1 o -1 sobre un intervalo de tiempo finito no nulo, entonces el principio del mínimo no define la componente $u_i\,(t)$. Este es llamado un *intervalo singular.* Si $\dfrac{\mathbf{b}_i^T\mathbf{p}\,(t)}{c_i}$ es igual que 1 o -1 solo en un número finito de instantes de tiempo aislados t, el problema del mínimo combustible, se dice *normal.*

El problema de la posición con coste de combustible

Como ejemplo de aplicación práctica de un control de tipo bang-off-bang, consideraremos el problema de la posición visto para el control bang-bang, pero utilizando ahora una función de coste definida mediante la siguiente integral

$$J\,(u) = \int_0^{t_1} (k + |u|)\,dt \tag{4.122}$$

donde k es una constante positiva. Ahora tenemos dos componentes para el coste, una dependiente del tiempo y otra del combustible empleado. La constante k mide la importancia relativa entre las dos componentes. De nuevo y sin pérdida de generalidad, asumiremos que el objeto se encuentra en reposo en el instante inicial y a una distancia X del origen y que supondremos, sin pérdida de generalidad, que es positiva. El fin del problema es situar el objeto en reposo en el origen en un tiempo t_1 minimizando el índice dado por 4.122. Con estas hipótesis las condiciones de contorno inicial y final son:

$$\begin{gathered} x_1\,(0) = X > 0 \\ x_2\,(0) = 0 \\ x_1\,(t_1) = 0 \\ x_2\,(t_1) = 0 \end{gathered} \tag{4.123}$$

Siendo $x_1\,(t)$ y $x_2\,(t)$ la posición y velocidad del objeto respectivamente.

El hamiltoniano para este problema es

$$H\,(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = k + |u| + p_1 x_2 + p_2 u \tag{4.124}$$

de donde se obtienen las ecuaciones de estado y co-estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(0)\\ \overset{\bullet}{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial p_2} = -(p_1)\end{aligned}$$

Para este sistema la función de coste terminal y la función de estado final son

$$\begin{aligned}\phi &\equiv 0\\ \psi(t, \mathbf{x}(t)) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

siendo la restricción de estado final

$$\psi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

Como el tiempo final t_1 es libre, pero el estado final $\mathbf{x}(t_1)$ es fijo la ecuación de las condiciones de contorno nos proporciona la ecuación:

$$H(t_1) = 0 \Leftrightarrow k + |u^*(t_1)| + p_1^*(t_1)\, x_2^*(t_1) + p_2^*(t_1)\, u^*(t_1) = 0 \Leftrightarrow k + |u^*(t_1)| + p_2^*(t_1)\, u^*(t_1) = 0 \tag{4.125}$$

Integrando las ecuaciones de co-estado

$$\begin{aligned}p_1 &= A\\ p_2 &= B - At\end{aligned} \tag{4.126}$$

La diferencia respecto al problema de tiempo mínimo sin ahorro de combustible (control bang-bang) aparece cuando aplicamos el principio del mínimo

$$k + |u^*| + p_1^* x_2^* + p_2^* u^* \leq k + |u| + p_1^* x_2^* + p_2^* u$$

que se reduce a

$$|u^*| + p_2^* u^* \leq |u| + p_2^* u$$

Y tendremos que elegir u^*, entre -1 y 1, que minimice la cantidad

$$q(t) = p_2^* u + |u| = \begin{cases} (p_2^* + 1)\, u & u \geq 0 \\ (p_2^* - 1)\, u & u \leq 0 \end{cases}$$

El valor asignado a u^* se va a obtener comparando el valor de $p_2^*(t)$ con los valores -1 y 1

$$\begin{cases} p_2^* < -1 & \Rightarrow \begin{cases} p_2^* + 1 < 0 & \Rightarrow \text{Si } (u \geq 0) \Rightarrow (p_2^* + 1)\, u \leq 0 \\ p_2^* - 1 < -2 < 0 & \Rightarrow \text{Si } (u \leq 0) \Rightarrow (p_2^* - 1)\, u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u^* = 1 \\ -1 < p_2 < +1 & \Rightarrow \begin{cases} 0 < p_2^* + 1 & \Rightarrow \text{Si } (u \geq 0) \Rightarrow (p_2^* + 1)\, u \geq 0 \\ p_2^* - 1 < 0 & \Rightarrow \text{Si } (u \leq 0) \Rightarrow (p_2^* - 1)\, u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u^* = 0 \\ p_2 > +1 & \Rightarrow \begin{cases} p_2^* + 1 > 2 > 0 & \Rightarrow \text{Si } (u \geq 0) \Rightarrow (p_2^* + 1)\, u \geq 0 \\ p_2^* - 1 > 0 & \Rightarrow \text{Si } (u \leq 0) \Rightarrow (p_2^* - 1)\, u \leq 0 \end{cases} \Rightarrow u^* = -1 \end{cases}$$

Para los casos en que $p_2^* = -1$ o $p_2^* = 1$, el valor del control óptimo u^* está indeterminado, siendo no negativo en el primer caso y no positivo en el segundo. Combinando esos resultados, deducimos que la variable de control está dada por

$$u^* = \begin{cases} +1 & p_2^* < -1 \\ 0 & -1 < p_2 < +1 \\ -1 & p_2 < 1 \end{cases} \tag{4.127}$$

En el control bang-bang, cuando la función de coste solamente depende del tiempo final, el control cambiaba entre los valores extremos -1 y $+1$. Sin embargo, ahora hay tres posibles valores para el control, los valores extremos y donde el control se apaga. Con una función de coste que depende de la magnitud de u, es claramente ventajoso poner $u^* = 0$ cada vez que esto sea posible, pero está claro que el control debe emplearse durante cierto tiempo, de lo contrario el objeto permanecería en reposo.

De nuevo la variable de co-estado $p_2^*(t)$, que es la que sirve para la elección del control óptimo, es una función lineal de t, por lo que se pueden dar los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll}
\text{Caso 1)} & p_2^*(t) < -1 \quad t \in [0, t_1] \quad \Rightarrow u^*(t) = 1 \quad t \in [0, t_1] \\
\text{Caso 2)} & \begin{cases} p_2^*(t) < -1 & t \in [0, t_2] \\ -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_2] \\ 0 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 3)} & \begin{cases} p_2^*(t) < -1 & t \in [0, t_2] \\ -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [t_2, t_3] \\ p_2^*(t) > 1 & t \in [t_3, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_2] \\ 0 & t \in [t_2, t_3] \\ -1 & t \in [t_3, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 4)} & \begin{cases} -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [0, t_2] \\ p_2^*(t) > 1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_2] \\ -1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 5)} & p_2^*(t) > 1 \quad t \in [0, t_1] \quad \Rightarrow u^*(t) = -1 \quad t \in [0, t_1] \\
\text{Caso 6)} & \begin{cases} p_2^*(t) > 1 & t \in [0, t_2] \\ -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, t_2] \\ 0 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 7)} & \begin{cases} p_2^*(t) > 1 & t \in [0, t_2] \\ -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [t_2, t_3] \\ p_2^*(t) < -1 & t \in [t_3, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, t_2] \\ 0 & t \in [t_2, t_3] \\ 1 & t \in [t_3, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 8)} & \begin{cases} -1 < p_2^*(t) < 1 & t \in [0, t_2] \\ p_2^*(t) < -1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_2] \\ 1 & t \in [t_2, t_1] \end{cases} \\
\text{Caso 9)} & -1 < p_2^*(t) < 1 \quad t \in [0, t_1] \quad \Rightarrow u^*(t) = 0 \quad t \in [0, t_1]
\end{array} \tag{4.128}$$

que corresponden con las diferentes posiciones que puede tomar la recta dentro del intervalo $[0, t_1]$.

Con el objetivo de simplificar el problema y como en cualquier caso el control óptimo es un valor que no depende del tiempo, vamos a obtene la solución general del sistema

$$\overset{\bullet}{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \alpha$$

donde el valor de α puede ser -1, 0 o 1, según el caso, de entre los anteriores nueve, que estemos tratando.

Integrando el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha\frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma \\ x_2(t) &= \alpha t + \beta \end{aligned} \tag{4.129}$$

donde obviamente los valores de α, β, γ dependerán del valor de u^*.

En casos particulares solamente es necesaria una parte de estas secuencias; por ejemplo, puede ser posible alcanzar el objetivo sin cambiar el control. Pero debido a la linealidad de $p_2^*(t)$ es imposible cambiar directamente desde -1 hasta $+1$ o viceversa para la solución óptima sin utilizar el valor intermedio de $u^* = 0$. Notar que la determinación del control en 4.127 deja sus valores arbitrarios cuando p_2^* es igual a -1 o $+1$. En general esto solamente ocurrirá en valores discretos de t y la indeterminación del control no afectará a la solución. No obstante, en el caso extremo en el que p_2^* fuera constante e igual a alguno de estos valores, -1 o 1, entonces u^* podría tomar cualquier valor entre 0 y $+1$, si $p_2^* = -1$, o bien si $p_2^* = -1$, entonces u^* podría tomar cualquier valor entre -1 y 0.

Con las condiciones inicial y final dadas en 4.123 está claro que no podemos comenzar con un control $u^* = 0$, ya que en ese caso permaneceríamos en el estado inicial de reposo, descartando así los casos 4, 8 y 9 de la tabla dada en 4.128. Por razones similares tampoco podemos terminar la secuencia de controles con $u^* = 0$, descartamos en este caso los casos 2 y 6 de esa misma tabla.

Por otra parte, cualquier control inicial positivo movería el estado fuera del objetivo (casos 1,2 y 3) y por tanto llegamos a la conclusión de que debemos hacer que la secuencia de controles sea del tipo $\{-1, 0, +1\}$ o del tipo $\{-1\}$. Igual que para los casos anteriores demostraremos a continuación de forma analítica que la secuencia $\{-1\}$ no produce el comportamiento deseado del sistema, ya que pretendemos dejar el objeto en reposo cuando éste se encuentre en el origen.

Supongamos que la secuencia de controles es del tipo $\{-1\}$, en ese caso las ecuaciones 4.129 con $\alpha = 1$, para $t \in [0, t_1]$ nos proporcionan las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma \\ x_2(t) &= -t + \beta \end{aligned}$$

y podremos calcular β y γ utilizando las condiciones de contorno inicial y final 4.123

$$x_1(0) = X \Rightarrow \gamma = X$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$x_1(t_1) = -\frac{t_1^2}{2} + \beta t_1 + \gamma = 0 \Rightarrow t_1^2 = 2\gamma$$

$$x_2(t_1) = -t_1 + \beta = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$

y por tanto no es una solución válida ya que estamos exigiendo que

$$0 = t_1 = X > 0$$

y solamente habría solución si $X = 0$, y en ese caso no hace falta aplicar ningún control puesto que ya se dan las condiciones finales del problema.

Como se ha comentado antes el resto de casos, salvo el número 7, se puede descartar de la misma manera.

En el caso 7, la secuencia de controles es $\{-1, 0, 1\}$, que se emplean en los intervalos $[0, t_2]$, $[t_2, t_3]$ y $[t_3, t_1]$ respectivamente. Si estamos en un punto $X > 0$, situado a la derecha del origen, aplicamos un control en sentido contrario ($u^* = -1$) para iniciar el movimiento hacia el origen, después se apagan los controles para ahorrar combustible y aprovechar la inercia de movimiento, y después se emplea un control en sentido positivo, contrario al movimiento ($u^* = 1$) para dejar al objeto en reposo en el origen. La solución se da a continuación.

Existen 2 tiempos intermedios t_2 y t_3 en los cuales ocurren los cambios en el valor de u^*. Estudiamos el problema para los 3 subintervalos $[0, t_2]$, $[t_2, t_3]$ y $[t_3, t_1]$

1. Intervalo $I_1 = [0, t_2]$

   En este intervalo $u^* = \alpha = -1$ y las soluciones generales para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serían

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= -\frac{t^2}{2} + \beta_1 t + \gamma_1 \\ x_2^1(t) &= -t + \beta_1 \end{aligned}$$

   donde el superíndice en las variables de estado 1 indica que la solución se obtiene para el intervalo I_1.

   En ese intervalo se aplican las condiciones de contorno para el estado inicial

$$\begin{aligned} x_1^1(0) &= X \Rightarrow \gamma_1 = X \\ x_2^1(0) &= 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \end{aligned}$$

   y las expresiones para los estados óptimos en I_1 quedan como

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= -\frac{t^2}{2} + X \\ x_2^1(t) &= -t \end{aligned}$$

2. Intervalo $I_2 = [t_2, t_3]$

   En este intervalo $u^* = \alpha = 0$ y las soluciones generales para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en este intervalo serían

$$\begin{aligned} x_1^2(t) &= \beta_2 t + \gamma_2 \\ x_2^2(t) &= \beta_2 \end{aligned}$$

   donde el superíndice en las $x_j(t)$ indica que son la solución para el intervalo I_2.

3. Intervalo $I_3 = [t_3, t_1]$

   En este intervalo $u^* = \alpha = 1$ y las soluciones generales para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están ahora definidas por

$$\begin{aligned} x_1^3(t) &= \frac{t^2}{2} + \beta_3 t + \gamma_3 \\ x_2^3(t) &= t + \beta_3 \end{aligned}$$

   donde de nuevo el superíndice 3, indica que la solución se obtiene para el intervalo I_3.

   En ese intervalo se aplicarán las condiciones de contorno para el estado final del sistema

$$\begin{aligned} x_1^3(t_1) &= 0 \Rightarrow \frac{t_1^2}{2} + \beta_3 t_1 + \gamma_3 = 0 \\ x_2^1(t_1) &= 0 \Rightarrow t_1 + \beta_3 = 0 \end{aligned} \tag{4.130}$$

Quedan por determinar los parámetros: β^2, β^3, γ^2, γ^3, los instantes de cambios en el control t_2 y t_3 y el instante final t_1, en total 7 incógnitas. Para encontrar los valores de estos parámetros suponemos continuidad en las soluciones en los instantes de cambio t_2 y t_3, es decir

$$x_1^1(t_2) = x_1^2(t_2) \Leftrightarrow -\frac{t_2^2}{2} + X = \beta_2 t_2 + \gamma_2$$

$$x_2^1(t_2) = x_2^2(t_2) \Leftrightarrow -t_2 = \beta_2$$

$$x_1^2(t_3) = x_1^3(t_3) \Leftrightarrow \beta_2 t_3 + \gamma_2 = \frac{t_3^2}{2} + \beta_3 t_3 + \gamma_3$$

$$x_2^2(t_3) = x_2^3(t_3) \Leftrightarrow \beta_2 = t_3 + \beta_3$$

Estas cuatro ecuaciones junto con las dadas en 4.130 forman un sistema de 6 ecuaciones y 7 incógnitas. Para encontrar la ecuación que falta haremos uso de la condición de contorno dada en 4.125, teniendo en cuenta que en t_1, $u^*(t_1) = 1$

$$k + |u^*(t_1)| + p_2^*(t_1)\, u^*(t_1) = 0 \Rightarrow k + 1 + p_2^*(t_1) = 0$$

y teniendo en cuenta la expresión para $p_2^*(t)$

$$-At_1 + B + k + 1 = 0$$

ecuación que aporta 2 incógnitas más A y B. Tenemos por tanto 7 ecuaciones y 9 incógnitas. Las dos ecuaciones que faltan las proporciona el hecho de que en t_2 y t_3 la función $p_2^*(t)$ pasa de ser mayor que 1 a ser menor en t_2, mientras que en t_3 pasa de ser mayor que -1 a ser menor. Por tanto como $p_2^*(t)$ es lineal debe ocurrir:

$$p_2^*(t_2) = 1 \Rightarrow -At_2 + B = 1$$

$$p_2^*(t_3) = -1 \Rightarrow -At_3 + B = -1$$

que complentan el sistema con 9 ecuaciones y 9 incógnitas.

La resolución del sistema, que reproducimos a continuación por comodidad es sencilla :

$$\frac{t_1^2}{2} + \beta_3 t_1 + \gamma_3 = 0 \qquad \text{(S1-1)}$$

$$t_1 + \beta_3 = 0 \qquad \text{(S1-2)}$$

$$-\frac{t_2^2}{2} + X - \beta_2 t_2 - \gamma_2 = 0 \qquad \text{(S1-3)}$$

$$t_2 + \beta_2 = 0 \qquad \text{(S1-4)}$$

$$\beta_2 t_3 + \gamma_2 - \frac{t_3^2}{2} - \beta_3 t_3 - \gamma_3 = 0 \qquad \text{(S1-5)}$$

$$\beta_2 - t_3 - \beta_3 = 0 \qquad \text{(S1-6)}$$

$$-At_1 + B + k + 1 = 0 \qquad \text{(S1-7)}$$

$$-At_2 + B - 1 = 0 \qquad \text{(S1-8)}$$

$$-At_3 + B + 1 = 0 \qquad \text{(S1-9)}$$

De (S1-2) y (S1-3) obtenemos $\beta_3 = -t_1$ y $\beta_2 = -t_2$, respectivamente, sustituyendo se obtiene el siguiente sistema

$$-\frac{t_1^2}{2}+\gamma_3=0 \quad \text{(S2-1)}$$

$$\frac{t_2^2}{2}+X-\gamma_2=0 \quad \text{(S2-3)}$$

$$-t_2t_3+\gamma_2-\frac{t_3^2}{2}+t_1t_3-\gamma_3=0 \quad \text{(S2-5)}$$

$$-t_2-t_3+t_1=0 \quad \text{(S2-6)}$$

$$-At_1+B+k+1=0 \quad \text{(S2-7)}$$

$$-At_2+B-1=0 \quad \text{(S2-8)}$$

$$-At_3+B+1=0 \quad \text{(S2-9)}$$

De (S2-1) y (S2-3) obtenemos

$$\gamma_3 = \frac{t_1^2}{2}$$

$$\gamma_2 = \frac{t_2^2}{2}+X$$

y se construye el nuevo sistema con 2 incógnitas menos

$$-t_2t_3+\frac{t_2^2}{2}+X-\frac{t_3^2}{2}+t_1t_3-\frac{t_1^2}{2}=0 \quad \text{(S3-5)}$$

$$-t_2-t_3+t_1=0 \quad \text{(S3-6)}$$

$$-At_1+B+k+1=0 \quad \text{(S3-7)}$$

$$-At_2+B-1=0 \quad \text{(S3-8)}$$

$$-At_3+B+1=0 \quad \text{(S3-9)}$$

Utilizando las ecuaciones (S3-8) y (S3-9) podemos expresar las incógnitas A y B en términos de t_2 y t_3

$$A = \frac{2}{t_3-t_2}$$

$$B = \frac{t_3+t_2}{t_3-t_2}$$

que sustituido en (S3-7) nos conduce al sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

$$-t_2t_3+\frac{t_2^2}{2}+X-\frac{t_3^2}{2}+t_1t_3-\frac{t_1^2}{2}=0 \quad \text{(S4-5)}$$

$$-t_2-t_3+t_1=0 \quad \text{(S4-6)}$$

$$-\frac{2}{t_3-t_2}t_1+\frac{t_3+t_2}{t_3-t_2}+k+1=0 \quad \text{(S4-7)}$$

Ahora de (S4-6)

$$t_3=(t_1-t_2)$$

y sustituyendo en (S4-5) y (S4-7) el sistema queda como

$$t_2^2 - t_2 t_1 + X = 0 \qquad \text{(S5-5)}$$

$$\frac{t_1}{(2t_2 - t_1)} + k + 1 = 0 \quad \text{(S5-7)}$$

A partir de (S5-7) obtenemos el valor para t_2 en términos del tiempo final t_1

$$t_2 = \left(\frac{kt_1}{2(k+1)}\right)$$

que sustituido en (S5-5) nos porporciona una ecuación de segundo grado en t_1

$$\left(\frac{kt_1}{2(k+1)}\right)^2 - \left(\frac{kt_1}{2(k+1)}\right) t_1 + X = 0 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{4(k+1)X}{k(k+2)}$$

Como $t_1 \geq 0$, nos quedamos con la raíz positiva

$$t_1 = \sqrt{\frac{4(k+1)^2 X}{k(k+2)}}$$

y utilizando las ecuaciones anteriores determinamos el valor del resto de incógnitas:

$$t_2 = \frac{k}{2(k+1)} t_1 = \frac{k}{2(k+1)} \sqrt{\frac{4(k+1)^2 X}{k(k+2)}} = \sqrt{\frac{kX}{(k+2)}}$$

$$t_3 = t_1 - t_2 = t_1 - \frac{k}{2(k+1)} t_1 = \left(1 - \frac{k}{2(k+1)}\right) t_1 = \sqrt{\frac{(k+2)X}{k}}$$

$$A = \frac{2}{t_3 - t_2} = \sqrt{\frac{k(k+2)}{X}}$$

$$B = \frac{t_3 + t_2}{t_3 - t_2} = k + 1$$

$$\beta_2 = -t_2 = -\sqrt{\frac{kX}{(k+2)}}$$

$$\beta_3 = -t_1 = -\sqrt{\frac{4(k+1)^2 X}{k(k+2)}}$$

$$\gamma_2 = \frac{t_2^2}{2} + X = \frac{X(3k+4)}{2(k+2)}$$

$$\gamma_3 = \frac{t_1^2}{2} = \frac{2(k+1)^2 X}{k(k+2)}$$

El índice de rendimiento óptimo, teniendo en cuenta los valores de u^* en los intervalos $[0, t_2]$, $[t_2, t_3]$ y $[t_3, t_1]$ se obtiene como

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{x}^*, u^*) &= \int_0^{t_1} k + |u^*|\, dt = \int_0^{t_2} (k+1)\, dt + \int_{t_2}^{t_3} (k+0)\, dt + \int_{t_3}^{t_1} (k+1)\, dt = \\
&= (k+1)t_2 + k(t_3 - t_2) + (k+1)(t_1 - t_3) = \\
&= kt_1 + t_1 + t_2 - t_3 = kt_1 + 2t_2 = \\
&= \frac{k(k+2)}{(k+1)} t_1 = \sqrt{4Xk(k+2)}
\end{aligned}$$

Notar que si hacemos $k \to \infty$, la parte temporal de la integral se hace más importante y el coste depende principalmente del tiempo transcurrido en alcanzar el objetivo y en menor cantidad en el combustible gastado, el intervalo $t_3 - t_2 = \sqrt{4X/\left(k\left(k+1\right)\right)}$, durante el que el motor está parado es muy corto y en ese caso t_1 se aproxima al valor obtenido para el problema de la posición sin coste de combustible resuelto en la sección anterior.

Si por el contrario k es pequeño el ahorro de combustible es la consideración dominante. En el límite cuando $k \to 0$, entonces $t_1 \to \infty$ y no habría solución al problema, puesto que necesitamos un tiempo infinito para alcanzar el objetivo. Si hubiéramos intentado resolver el problema directamente con $k = 0$, entonces habríamos encontrado que el tiempo de intercambio $t_2 = 0$, por tanto tedríamos que haber comenzado con los motores apagados. Puesto que esto implica que permanecemos en la posición para siempre, no hay solución óptima, aunque podamos hacer un coste arbitrariamente pequeño. Si encendemos los motores por un periodo corto de tiempo τ, con $u^* = -1$, alcanzaríamos la posición $\left(x_1^1\left(\tau\right), x_2^1\left(\tau\right)\right) = \left(-\frac{\tau^2}{2} + X, -\tau\right)$, entonces podemos apagar los motores y deslizarnos en punto muerto con velocidad constante $-\tau$ hasta alcanzar la posición $\left(\frac{\tau^2}{2}\right)$ respecto al origen, es decir, recorriendo una distancia igual a $X - \tau^2$; por último utilizamos $u^* = 1$ durante el resto del tiempo para alcanzar el origen. El tiempo total utilizado es

$$\tau + \frac{X - \tau^2}{\tau} + \tau = \frac{X}{\tau} + \tau$$

siendo el coste para esta operación ($k = 0$)

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}, u\right) &= \int_0^{t_1} \left|u^*\right| dt = \int_0^{\tau} 1dt + \int_{\tau}^{\tau + \left(X-\tau^2\right)/\tau} 0dt + \int_{\tau+\left(X-\tau^2\right)/\tau}^{\frac{X}{\tau}+\tau} 1dt = \\ &= \tau + \tau = 2\tau \end{aligned}$$

Puesto que τ es arbitrario, el coste puede hacerse suficientemente pequeño, aunque el tiempo transcurrido es entonces arbitrariamente grande.