Capítulo 3

Optimización dinámica: métodos variacionales

3.1 Introducción y ejemplos

Los problemas tratados en los temas anteriores consistían en la optimización (maximización o minimización) de funciones reales de variables reales, que podían estar o no sujetas a restricciones representadas también por funciones reales de variables reales. El objetivo era buscar el punto o puntos que cumpliendo las restricciones impuestas al problema, nos proporcionaran el mejor valor (mayor o menor, dependiendo del objetivo del problema) de la función a optimizar. Para la mayoría de todos estos problemas la solución era puntual; por ello, este tipo de optimización se suele clasificar como *estática*.

En este tema se enfocará la optimización que hemos denominado *optimización dinámica* desde el punto de vista variacional. El objetivo de estos problemas también consiste en maximizar o minimizar cierto índice teniendo en cuenta un conjunto de restricciones que describen el sistema, pero a diferencia de la optimización estática, las soluciones de este problema están ahora formadas por trayectorias de puntos y no solamente por puntos particulares. Los objetivos utilizados como índices de rendimiento del sistema son en este caso funciones que dependen de otras funciones (*funcionales*) y las restricciones que describen los sistemas son en general ecuaciones diferenciales (problemas en tiempo continuo) o ecuaciones en diferencias (problemas en tiempo discreto).

Se plantean por tanto, otro tipo de problemas, en el que la solución buscada es una curva o trayectoria, obtenida de entre todas las posibles de un sistema, y que optimiza un determinado índice de coste.

A continuación se presentan y desarrollan algunos ejemplos que pueden expresarse en estos términos.

3.1.1 Problemas Geodésicos

Uno de los problemas que aparece de forma natural es el de encontrar el camino más corto entre dos puntos. Aunque en $\mathbb{R}^3$ este camino es la línea recta, en general no es posible tomar esta ruta, debido por ejemplo a objetos naturales, entonces es necesario considerar el problema más complicado de encontrar la curva *geodésica* (es decir la que tiene menor longitud) entre todas aquellas restringidas a una "hipersuperficie" dada. En particular, por ejemplo podemos intentar caracterizar en $\mathbb{R}^3$ las geodésicas sobre la superficie de una esfera, de un cilindro o de un cono.

Geodésicas en el $\mathbb{R}^n$

Una curva que une dos puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathbb{R}^n$ puede considerarse como el rango de una función vectorial $\mathbf{Y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in [0,1]$ con componentes continuas en $[0,1]$, de forma que $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{Y}(1) = \mathbf{B}$ (figura 3.1). En particular, el segmento lineal que une ambos puntos,

$$\mathbf{Y}_0(t) = (1-t)\mathbf{A} + t\mathbf{B} \qquad t \in [0,1] \tag{3.1}$$

será una de esas curvas (ver figura3.1).

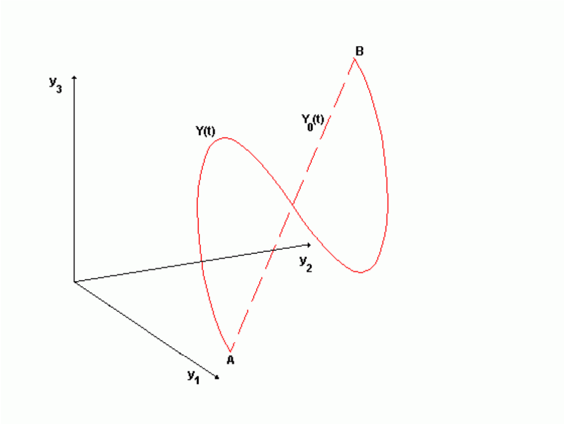

Figura 3.1: Curvas en $\mathbb{R}^3$.

Sin otra exigencia adicional la curva podría ser no rectificable, es decir, podría no tener longitud finita. Si ahora exigimos que la función $\mathbf{Y}(t)$ tenga derivada continua en $(0,1)$, entonces podremos contemplar la función $\mathbf{Y}'(t) = (y_1'(t), \ldots, y_n'(t))$ como la velocidad en t con módulo $\|\mathbf{Y}'(t)\|$ y por tanto la longitud de la curva debería ser la distancia recorrida durante el movimiento y vendrá dada por la siguiente integral

$$L(\mathbf{Y}) = \int_0^1 \|\mathbf{Y}'(t)\|\, dt$$

Para garantizar la finitud de $L(\mathbf{Y})$, habrá que exigir que cada componente de $\mathbf{Y}'(t)$ sea integrable (esta propiedad se obtiene facilmente si cada componente es continuamente diferenciable en $[0,1]$). De esta manera el problema consistirá en *minimizar* la longitud $\mathbf{Y}(t)$ sobre un determinado conjunto de funciones vectoriales y puede expresarse como

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^1 \|\mathbf{Y}'(t)\|\, dt \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{Y} \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}$ es un conjunto de funciones definido por

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{Y} : [0,1] \to \mathbb{R}^n |\, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^1(0,1)\,; \mathbf{Y}(0) = \mathbf{A}; \mathbf{Y}(1) = \mathbf{B} \right\}$$

Este problema puede resolverse de forma sencilla de forma directa. Sabemos que $\mathbf{Y}_0(t) \in \mathcal{D}$ y su derivada es $\mathbf{Y}_0'(t) = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, por tanto si existe una curva de longitud mínima $L_{\min}$, entonces

$$L_{\min} \leq L(\mathbf{Y}_0(t)) = \int_0^1 \|\mathbf{Y}_0'(t)\|\, dt = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| \tag{3.2}$$

que es la distancia euclidea entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Para comprobar la conjetura natural de que $L_{\min} = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|$, solamente habrá que comprobar la siguiente desigualdad para cualquier $\mathbf{Y}(t) \in \mathcal{D}$

$$L(\mathbf{Y}_0(t)) \leq L(\mathbf{Y})$$

Si suponemos $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ (el caso $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ es trivial) y utilizamos el teorema fundamental del Cálculo

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{Y}(1) - \mathbf{Y}(0) = \int_0^1 \mathbf{Y}'(t)\, dt$$

de esta forma

$$L(\mathbf{Y}_0(t))^2 = \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^2 = (\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = (\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot\int_0^1 \mathbf{Y}'(t)\,dt = \int_0^1 [(\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}'(t)]\,dt$$

Si ahora utilizamos la desigualdad de Cauchy para el producto escalar

$$[(\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}'(t)] \le \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{Y}'(t)\|$$

se obtiene

$$\int_0^1 [(\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{Y}'(t)]\,dt \le \int_0^1 \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{Y}'(t)\|\,dt$$

o equivalentemente

$$\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^2 \le \int_0^1 \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{Y}'(t)\|\,dt = \|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|\cdot L(\mathbf{Y}(t))$$

Como $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$, se obtiene la desigualdad buscada dividiendo por $\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|$.

Geodésicas en la esfera

Para un avión es fundamental, con el objetivo de conseguir un ahorro de combustible, conocer cuál es la ruta más corta entre dos ciudades. La Tierra no es plana, por tanto el camino más corto entre dos puntos de su superficie no será la línea recta. Para resolver este problema, es necesario encontrar las curvas geodésicas sobre la superficie de una esfera.

Cada punto $\mathbf{P}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ de la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen (excepto los polos Norte y Sur) están determinados mediante coordenadas esféricas R, φ y θ

$$\mathbf{P} = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, R\cos\varphi) \tag{3.3}$$

para un único $\varphi\in(0,\pi)$ y $\theta\in[0,2\pi)$ (figura 3.2).

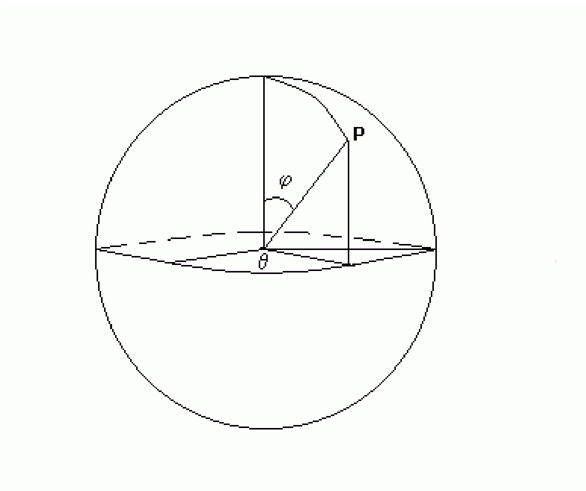

Figura 3.2: Coordenadas esféricas.

Dados dos puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre la esfera, supongamos que se eligen los ejes de forma que $\mathbf{A}$ está en el polo Norte ($\varphi=0$), mientras que $\mathbf{B}\neq\mathbf{A}$ tiene de coordenadas esféricas $(R,0,\varphi_1)$ con $\varphi_1>0$ (figura 3.3).

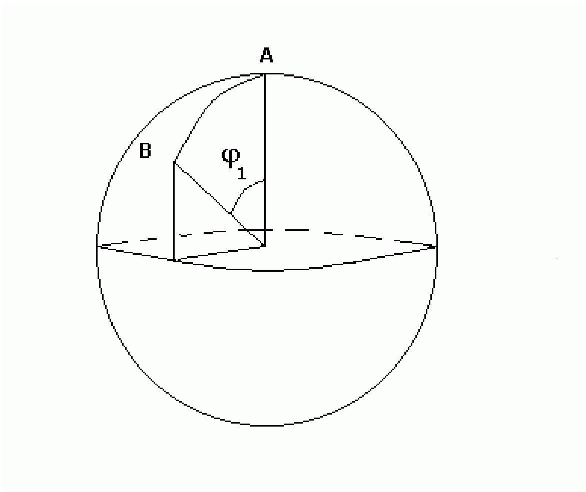

Figura 3.3: Geodésicas en la esfera.

Entonces cualquier curva que una **A** con **B** sobre la superficie de la esfera estará determinada en coordenadas esféricas mediante un par de funciones $(\theta(t), \varphi(t))$ de la siguiente forma

$$\mathbf{Y}(t) = R(\cos\theta(t) \operatorname{sen}\varphi(t), \operatorname{sen}\theta(t) \operatorname{sen}\varphi(t), \cos\varphi(t)) \qquad t \in [0,1]$$

donde además: $\varphi(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ y $\varphi(1) = \varphi_1$.

Como en el caso de las geodésicas en $\mathbb{R}^3$, supondremos que las funciones utilizadas son continuamente diferenciables en $(0,1)$. Su derivada temporal será

$$\mathbf{Y}'(t) = R\left(-\theta' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \varphi' \cos\theta \cos\varphi, \theta' \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \varphi' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, -\varphi' \operatorname{sen}\varphi\right)$$

donde se ha prescindido de la variable temporal t por comodidad. La longitud de esta curva vendrá dada por

$$L(\mathbf{Y}) = \int_0^1 \|\mathbf{Y}'(t)\| \, dt = R \int_0^1 \sqrt{(\theta')^2 \operatorname{sen}^2\varphi + (\varphi')^2} dt$$

Si eliminamos el término $(\theta')^2 \operatorname{sen}^2\varphi \geq 0$ dentro de la raíz se obtiene

$$R \int_0^1 \sqrt{(\theta')^2 \operatorname{sen}^2\varphi + (\varphi')^2} dt \geq R \int_0^1 \sqrt{(\varphi')^2} dt = R\varphi(t)|_0^1 = R\varphi(1)$$

De manera que

$$L(\mathbf{Y}) \geq R\varphi_1$$

para cualquier curva $\mathbf{Y}(t)$. La igualdad solamente se cumplirá cuandor el término $(\theta')^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 0$. Resolviendo

$$(\theta')^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2\varphi(t) = 0, \forall t \in [0,1] \\ \\ \theta'(t) = 0, \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

En el primer caso $\varphi(t) = 0$, con $t \in [0,1]$, luego $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y en este caso no hay desplazamiento. Si, por el contrario, $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, entonces $\theta'(t) = 0$, para $t \in [0,1]$, de donde $\theta(t) = cte$, en todo el intervalo $[0,1]$. Y por tanto $\theta(t) = \theta(1) = 0$, que corresponde con el menor círculo máximo que conecta **A** y **B**.

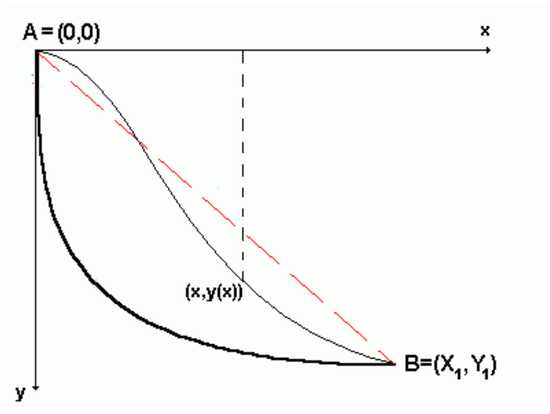

Figura 3.4: Braquistócrona.

3.1.2 Problemas temporales

Si viajamos con velocidad constante, entonces la ruta geodésica determinada en cada uno de los problemas de la sección anterior también proporciona el camino más rápido. Sin embargo, si no podemos viajar con velocidad constante y en particular si la velocidad depende del camino elegido, entonces los problemas de mínima distancia y mínimo tiempo se deben analizar de forma separada. A continuación vemos alguno de estos problemas.

Braquistócrona

Al caer bajo la acción de la gravedad un objeto acelera rápidamente. La curva que proporciona el menor tiempo de tránsito entre dos puntos distintos **A** y **B**, separados una distancia horizontal, no es ni la línea recta, ni tampoco un arco circular, sino la llamada *braquistócrona* o *cicloide*.

Si utilizamos el esquema indicado en la figura 3.4, en el que el punto inicial **A** está en el origen y las ordenadas y positivas se toman hacia abajo. Entonces una curva que una el punto $\mathbf{A} = (0, 0)$ con el punto $\mathbf{B} = (X_1, Y_1)$ situado más abajo $(X_1,\, Y_1 \geq 0)$, puede representarse como el *grafo* de una función continua $y = y\,(x)$ definida en $x \in [0, X_1]$ con $y\,(0) = 0$ e $y\,(X_1) = Y_1$.

Asumiendo que $y\,(x)$ es suficientemente derivable, esta curva tendrá una longitud finita l y el tiempo necesario para recorrerla estará dado (por consideraciones puramente cinemáticas) por

$$T = T\,(y) = \int_0^l \frac{ds}{v}$$

donde $v = ds/dt$ es la velocidad del objeto.

Del cálculo infinitesimal obtenemos que para cada $x \in [0, X_1]$

$$s = s\,(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'\,(\xi)^2}\,d\xi$$

es la longitud de arco correspondiente a la posición horizontal x. De esta forma

$$ds\,(x) = \sqrt{1 + y'\,(x)^2}\,dx$$

y el tiempo de tránsito es

$$T = T\,(y) = \int_0^{X_1} \frac{\sqrt{1 + y'\,(x)^2}}{v\,(x)}\,dx$$

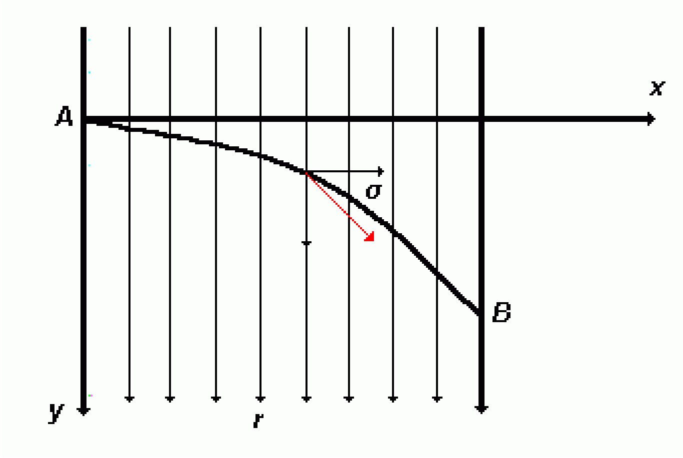

Figura 3.5: Problema de control y dirección.

siendo $v = v(x)$ la velocidad asociada.

Podemos expresar $v(x)$ en términos de $y(x)$ utilizando las leyes de Newton de la dinámica, para ello asumimos que la aceleración gravitacional g es constante durante la caída y despreciamos los efectos de otras fuerzas (incluyendo las de fricción). La velocidada de la bola a lo largo de la trayectoria $y(x)$ en tiempo t viene dada por

$$v(x) = \sqrt{2gy(x)}$$

De esta forma

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{X_1} \left(\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)} \right)^{1/2} dx$$

y el problema consistirá en minimizar $T(y)$ sobre el conjunto de todas las funciones $y = y(x)$ para las que está definida la integral anterior. Posteriormente encontraremos la solución a este problema mediante métodos analíticos.

Problemas de control y dirección

Estrechamente relacionado con el problema de la braquistócrona, está el problema de encontrar la mejor ruta de navegación al atravesar una corriente de velocidad variable. Nos preguntamos cuál será la ruta que proporcionará el menor tiempo de tránsito al intentar cruzar un río de velocidad cambiante desde un punto **A** hasta otro **B** en la orilla opuesta con un barco que navega a velocidad constante w respecto al agua. Si suponemos que las orillas del río son paralelas y utilizamos un determinado sistema de coordenadas, en el que el eje y representa una orilla y la recta $x = x_1$ la otra (siendo x_1 la distancia entre las orillas), asumimos también que $w = 1$ y que la corriente del río $r(x)$ está dirigida hacia abajo (figura 3.5).

Las componentes x e y de la velocidad del barco se obtienen de la siguiente manera. Si σ es el ángulo que forma la dirección de movimiento del barco respecto a la corriente, entonces

$$v_x = w \cos\sigma = \cos\sigma$$

$$v_y = w \operatorname{sen}\sigma + r(x) = \operatorname{sen}\sigma + r$$

puesto que a la velocidad de avance del barco hay que añadirle la velocidad de la corriente.

El tiempo de tránsito entre las orillas será

$$T = \int_0^{x_1} \frac{dx}{v_x} = \int_0^{x_1} \frac{1}{\cos\sigma} d\sigma = \int_0^{x_1} \sec\sigma d\sigma$$

El valor de la tangente a la curva $y(x)$ en cada punto, es decir su derivada $y'(x)$ en cada punto, se obtiene como

$$y'(x) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{r + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} = \frac{r}{\cos\sigma} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} = r\sec\sigma + \tan\sigma$$

y teniendo en cuenta que

$$1 + \tan^2\sigma = \frac{1}{\cos^2\sigma} = \sec^2\sigma$$

podemos obtener ahora una relación entre $y'(x)$ y $\sec\sigma$

$$y'(x) = r\sec\sigma + \tan\sigma = r\sec\sigma + \sqrt{\sec^2\sigma - 1} \tag{3.4}$$

Despejando $\sec\sigma$ de la ecuación 3.4 en función de $y'(x)$, teniendo en cuenta que $\sigma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\sigma = \frac{1}{\sec\sigma} \geq 0$

$$\sec\sigma = \left[\alpha(x)\sqrt{1 + (\alpha y')^2(x)} - \left(\alpha^2 r y'\right)(x)\right]$$

donde

$$\alpha(x) = \left(1 - r^2(x)\right)^{-1/2}$$

con $0 \leq r(x) \leq 1$, ya que debe ser posible atravesar la corriente.

El tiempo de tránsito de un barco que cruce el río desde el origen $\mathbf{A}$ hasta el punto $\mathbf{B} = (x_1, y_1)$ situado río abajo a lo largo de un camino suave representado por la gráfica de una función $y = y(x)$ en $[0, x_1]$ vendrá entonces dado por

$$T(y) = \int_0^{x_1} \left[\alpha(x)\sqrt{1 + (\alpha y')^2(x)} - \left(\alpha^2 r y'\right)(x)\right] dx$$

Este problema de control consistirá en minimizar $T(y)$sobre todas las funciones $y(x)$ que son continuamente diferenciables en $[0, x_1]$ y cumplen $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$.

Este problema se puede generalizar al caso en el que las orillas del río están representadas mediante curvas y en el que los puntos de cruce varían. También es posible considerar que la corriente varía respecto a y igual que lo hace respecto a x. En 1931, Zermelo investigó la versión bidimensional de este problema que podría ser igualmente significante para pilotar un submarino o un aeroplano.

3.1.3 Problemas Isoperimétricos

Uno de los problemas más antiguos de optimización de los que se tiene constancia es el de encontrar el área máxima que puede encerrarse mediante una curva de perímetro fijo. La solución de este problema es bien conocida y se trata del círculo. Este tipo de problema se denomina *isoperimétrico.*

Para este ejemplo, la formulación matemática sería la siguiente. Suponemos que una curva cerrada simple y suave de longitud L está representada paramétricamente por $\mathbf{Y}(t) = (x(t), y(t))$ para $t \in [0, 1]$, con $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(1)$ para que ésta sea cerrada.

De acuerdo con el teorema de Green el área del domino D encerrado por esta curva es

$$A(\mathbf{Y}) = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} xdy$$

donde ∂D representa la frontera de D orientada positivamente por la parametrización de $\mathbf{Y}$ (figura 3.6).

Utilizando esta parametrización obtenemos

$$A(\mathbf{Y}) = \int_0^1 x(t)\, y'(t)\, dt$$

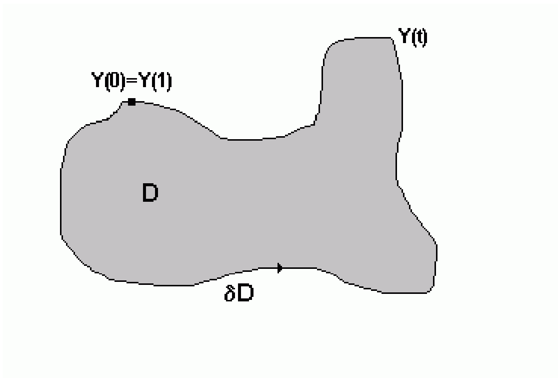

Figura 3.6: Área encerrada por una curva.

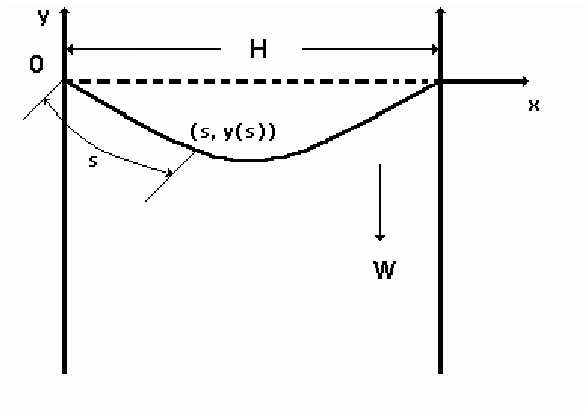

Figura 3.7: Cuerda colgante (Catenaria).

Y el problema consiste en encontrar el máximo de $A(\mathbf{Y})$ sobre todas las funciones $\mathbf{Y}(t)$ que tienen componentes continuamente diferenciables en $[0,1]$ y que cumplen la condición de clausura $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(1)$. Además también debe cumplirse la *condición isoperimétrica*

$$L(\mathbf{Y}) = \int_0^1 \|\mathbf{Y}'(t)\|\, dt = L$$

siendo L, la longitud de la cuerda, una constante.

Una versión moderna de este problema combina los problemas isoperimétricos y de dirección y consiste en encontrar el camino cerrado que debe describir un aeroplano con velocidad constante, teniendo en cuenta la velocidad del viento, para encerrar el área máxima. Cuando la velocidad del viento es cero, entonces este problema es equivalente a un problema isoperimétrico clásico.

Zenodoros también consideró el problema análogo en dimensión superior que consiste en maximizar el volumen de un solido que tiene una superficie fija.

Otro problema isoperimétrico diferente consiste en encontrar la forma que tendrá un cable o cuerda inextensible, con un peso por unidad de longitud W y una longitud L, bajo la acción de su propio peso, cuando está sujeto por sus extremos a una distancia horizontal H (figura 3.7)

Sea s es la longitud de arco a lo largo del cable (que se toma como variable independiente), este problema requiere la minimización de la energía potencial de la cuerda; dada, salvo constantes, por la integral centro de

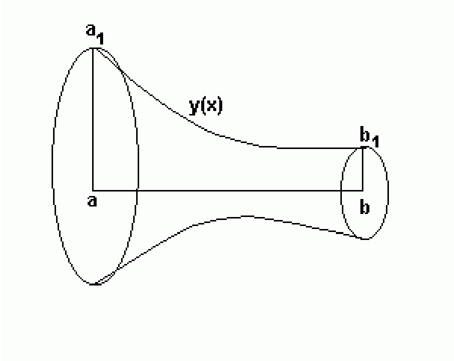

Figura 3.8: Superficie de revolución mínima.

masas

$$F(y) = W \int_0^L y(s)\, ds$$

sobre todas las funciones $y \geq 0$ continuamente diferenciables en $[0, L]$, con $y(0) = y(L) = 0$ y que cumplen la condición isoperimétrica

$$G(x) = \int_0^L dx(s) = H$$

siendo $x(s)$ el desplazamiento en la dirección horizontal.

Por geometría elemental tenemos

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$$

de donde la función $G(x)$ se puede escribir en términos de $y(s)$ como:

$$G(y) = \int_0^L \sqrt{1 - y'(s)^2} ds = H$$

En general, el término *isoperimétrico* se asigna a caulquier problema de optimización en el que la clase funciones implicadas están sujetas a restricciones integrales de la forma anterior.

3.1.4 Problemas de áreas de superficies

Un problema análogo al problema geodésico de la primera sección puede plantearse para una dimensión superior de la siguiente forma: *Encontrar la superficie de área mínima que abarcan curvas cerradas fija en* $\mathbb{R}^3$

Superficie de revolución mínima

Cuando las curvas consisten en una par de círculos paralelos "concéntricos", entonces podríamos preguntarnos por la superficie de revolución que "uniendo" ambos círculos tenga área mínima area, o equivalentemente, queremos encontrar la expresión para de la curva de su frontera (figura 3.8).

Utilizando un sistema de coordenadas adecuado llegamos al problema de minimizar la función área de la superficie lateral $S(y)$

$$S(y) = 2\pi \int_a^b y(x)\, ds(x) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

entre todas las funciones $y(x) \geq 0$, continuamente diferenciables en $[a, b]$ y para las cuales

$$y(a) = a_1 \qquad \text{y} \qquad y(b) = b_1$$

Donde a_1 y b_1 denotan los radios de cada círculo, uno de los cuales puede degenerar en un punto $(y(b) = 0)$.

Problema del área minimal.

Supongamos que las superficies en cuestión pueden representarse como el grafo de funciones suaves $u = u(x, y)$ definidas en un dominio plano común D. Entonces el área de la superficie asociada está dada por

$$S(u) = \int_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dA$$

donde dA denota el elemento bidimensional de integración sobre D; la frontera de D se denota como ∂D y se supone que se comporta bien de forma que la integración Riemann de funciones continuas puede definirse sobre D o $\overline{D}$ y sobre ∂D.

Podríamos entonces buscar el mínimo de $S(u)$ sobre todas las funciones u que son continua en $\overline{D} = D \cup \partial D$, continuamente diferenciables dentro de D y toma valores en la frontera de forma continua y determinada

$$u|_{\partial D} = \gamma(x, y)$$

3.1.5 Problemas con frontera libre

La solución que Jakob Bernouilli (1696) dió a su hermano Johann acerca del problema de la braquistócrona marcaba el comienzo de consideraciones variacionales. Sin embargo fue con los trabajos de Euler (1742) y Lagrange (1755) cuando se estableció el cálculo de variaciones tal y como se conoce actualmente.

El análisis del problema de la braquistócrona visto anteriormente estaba dirigido a la búsqueda de soluciones del problema de minimizar el siguiente funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx$$

sobre el conjunto de funciones $\mathcal{D}$; dado por

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{C}^1[a, b] : \mathbf{y}(a) = a_1; \quad \mathbf{y}(b) = b_1 \right\}$$

para a_1 y b_1 dados, este es un problema de *puntos extremos (inicial y final) fijos* (ver figura 3.4). Sin embargo para Jakob Bernouilli el interés se centraba en un conjunto más amplio

$$\mathcal{D}^b = \left\{ y \in \mathcal{C}^1[a, b] : y(a) = a_1 \right\}$$

al describir una braquistócrona para la que se pide que descienda sobre una distancia horizontal $(b - a)$ en el mínimo tiempo posible, sin especificar la distancia vertical que hay que cubrir. Este tipo de problemas es llamado de *punto extremo final libre* (ver figura 3.9).

Del mismo modo, también pueden considerarse problemas sobre el conjunto

$$\mathcal{D}^a = \left\{ y \in \mathcal{C}^1[a, b] : y(b) = b_1 \right\}$$

donde ahora el extremo final es el fijo, mientras que el extremo inicial .

Por último, es posible plantear problemas con *ambos puntos extremos libres* (ver figura 3.10)

$$\mathcal{D}^{ab} = \left\{ y \in \mathcal{C}^1[a, b] \right\}$$

o también en aquellos donde los extremos locales están en subconjuntos arbitrarios de $\mathcal{C}^1[a, b]$, por ejemplo, un problema relacionado con las condiciones sobre puntos extremos es el que caracteriza la braquistócrona que une dos curvas fijas dadas, llamadas *transversales,* lo que requiere la minimización de una integral con límites x_1 y x_2 variables

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

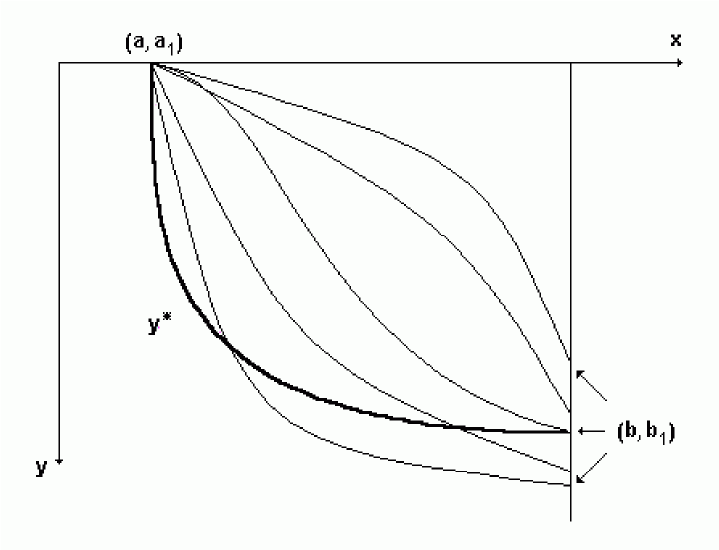

Figura 3.9: Braquistócrona de extremo final libre.

sobre un conjunto

$$\mathcal{D}_\tau = \left\{ y \in \mathcal{C}^1 [x_1, x_2] : \tau_j (x_j, y(x_j)) = 0; \quad j = 1, 2 \right\}$$

donde $[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}$ y $\{\tau_j (x_j, y(x_j))\}_{j=1}^2$ son funciones dadas (figura 3.11)

3.1.6 Resumen

Todos estos problemas presenta características comunes. Cada uno de ellos implica la búsqueda de una función real definida sobre un determinado dominio $\mathcal{D}$ de funciones $\mathbf{y}$, que minimiza o maximiza cierta función definida por medio de una integral de la forma

$$J(\mathbf{y}) = \int_a^b F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx$$

para alguna función dada $F(x, y, z)$. A este tipo de funciones cuyo valor depende de una función real de variable real los hemos denominado *funcionales.*

La función $\mathbf{y}(x)$ puede ser escalar o vectorial, puede depender de una variable independiente o de varias. Generalmente es continua y derivalbe en su dominio de definición, mientras que el conjunto $\mathcal{D}$ consistirá en aquellas funciones de esta clase que cumplen ciertas condiciones de frontera específicas en a o b, de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(a) &= a_0 \\ \mathbf{y}(b) &= b_0 \end{aligned}$$

Además, como en el caso de la braquistócrona, puede ser necesario imponer restricciones posteriores tales como exigir que $\mathbf{y} \geq 0$ en $[a, b]$.

Buscamos un elemento de $\mathcal{D}$, es decir, una función $\mathbf{y}^* \in \mathcal{D}$, para la que

$$J(\mathbf{y}) \geq J(\mathbf{y}^*) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$$

En estos problemas, pueden tambier existir restricciones integrales de igualdad (restricciones isoperimétricas)

$$H(\mathbf{y}) = \int_a^b h(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx = L$$

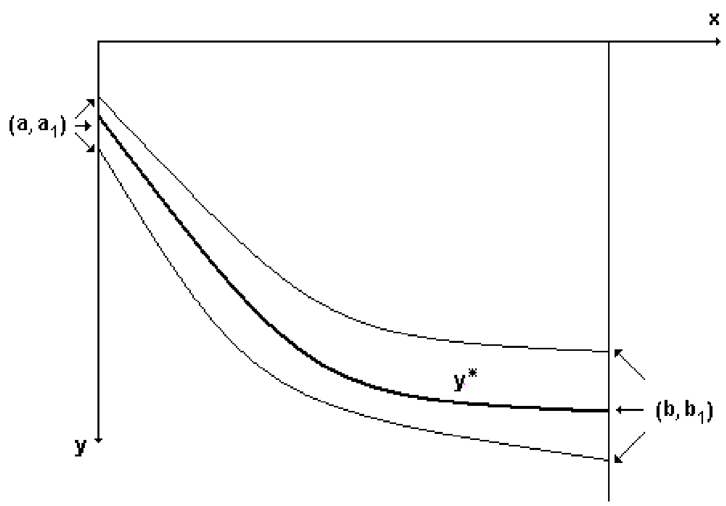

Figura 3.10: Braquistócrona de extremos libres.

o bien de desigualdades integrales

$$G(\mathbf{y}) = \int_a^b g(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))\, dx \leq M$$

o de forma Lagrangiana en las que

$$\psi(x, y(x), y'(x)) = 0 \qquad x \in (a, b)$$

para funciones h, g, ψ y constantes L y M dadas.

También es posible ampliar el grupo de problemas de este tipo, permitiendo la inclusión de derivadas de orden superior, funciones de más de una variable o condiciones de frontera variables.

La teoría general para resolver este tipo de problemas, conocida como *cálculo de variaciones,* ha sido desarrollada a lo largo de 300 años.

3.2 Lemas de Lagrange y du Bois-Reymond

Los siguientes resultados son necesarios para conseguir las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son fundamentales para la resolución de problemas variacionales.

Lema 3.1 (du Bois-Reymond) *Sea $h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ y sea $\mathcal{D}_0$ el conjunto de funciones definido como*

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ v \in \mathcal{C}^1[a,b] \middle| \, v(a) = v(b) = 0 \right\}$$

entonces se cumple

$$Si \int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}_0 \Longrightarrow h(x) = c \qquad \forall x \in [a,b]$$

con c una constante.

Demostración: Sea $c \in \mathbb{R}$, un número real cualquiera y definimos la función $v(x)$ como

$$v(x) = \int_a^x (h(t) - c)\, dt$$

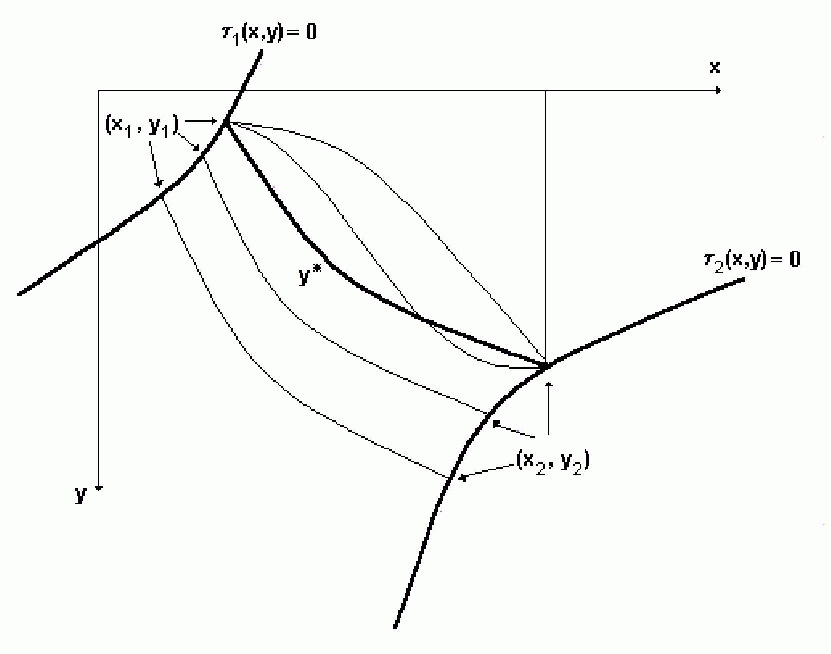

Figura 3.11: Braquistócrona con condiciones transversales.

Puesto que $h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, la función $v(x)$ estará bien definida y por el teorema fundamental del cálculo integral, $v(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$ y su derivada es

$$v'(x) = h(x) - c$$

además $v(a) = 0$.

Para que $v(x)$ esté en el conjunto $\mathcal{D}_0$, además tiene que ocurrir $v(b) = 0$. Definimos la constante c de forma que esto ocurra, es decir

$$v(b) = \int_a^b (h(t) - c)\, dt = 0 \qquad \text{o} \qquad c = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\, dt$$

Puesto que $(h(x) - c)^2 \geq 0$

$$\int_a^b (h(x) - c)^2\, dx \geq 0$$

utilizando la expresión de $v'(x)$

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \int_a^b (h(x) - c)^2\, dx = \int_a^b (h(x) - c)\, v'(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx - \int_a^b c v'(x)\, dx \\ & = \int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx - \left. c v(x)\right|_a^b \end{aligned}$$

Como $v \in \mathcal{D}_0$, entonces

$$\int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx = 0$$

$$v(b) = v(a) = 0$$

y por tanto

$$\int_a^b (h(x) - c)^2\, dx = 0$$

de donde

$$(h(x) - c)^2 \equiv 0$$

es decir

$$h(x) = c \qquad x \in [a, b]$$

Proposición 3.2 *Sea $g(x), h(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ y sea $\mathcal{D}_0$ el conjunto de funciones definido como*

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ v \in \mathcal{C}^1[a, b] \middle| \, v(a) = v(b) = 0 \right\}$$

entonces se cumple

$$Si \int_a^b [g(x) v(x) + h(x) v'(x)] \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}_0 \Longrightarrow h(x) \in \mathcal{C}^1[a, b] \qquad y \qquad h'(x) = g(x)$$

Demostración: Definimos en primer lugar la función $G(x)$ como

$$G(x) = \int_a^x g(t) \, dt \qquad x \in [a, b]$$

Puesto que $g(x)$ es continua en $[a, b] \Longrightarrow G(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ y $G'(x) = g(x)$

Si integramos por partes el primer término de la integral, obtenemos

$$0 = \int_a^b [g(x) v(x) + h(x) v'(x)] \, dx = \int_a^b [h(x) - G(x)] \, v'(x) \, dx + G(x) v(x)|_a^b$$

pero como $v(x) \in \mathcal{D}_0 \Rightarrow v(a) = v(b) = 0$, y por tanto

$$0 = \int_a^b [h(x) - G(x)] \, v'(x) \, dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}_0$$

Podemos ahora aplicar el lema anterior, para obtener

$$h(x) - G(x) = c \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \ [a, b]$$

Pero entonces

$$h(x) = G(x) + c \in \mathcal{C}^1[a, b]$$

y derivando

$$h'(x) = G'(x) = g(x)$$

Corolario 3.3 *Sea $g(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ y sea $\mathcal{D}_0$ el conjunto de funciones definido como*

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ v \in \mathcal{C}^1[a, b] \middle| \, v(a) = v(b) = 0 \right\}$$

entonces se cumple

$$Si \int_a^b g(x) v(x) \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}_0 \Longrightarrow g(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Basta con tomar $h(x) \equiv 0$ en la proposición anterior. Este resultado admite la siguiente generalización

Lema 3.4 (Lagrange) *Sea $g(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ y sea $\mathcal{D}_{0,m}$ el conjunto definido por*

$$\mathcal{D}_{0,m} = \left\{ v \in \mathcal{C}^m[a, b] | \, v^{(k)}(a) = v^{(k)}(b) = 0, k = 0, \ldots, m \right\}$$

para algún $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_a^b g(x) v(x) \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}_0$$

entonces $g \equiv 0$ en $[a, b]$

Demostración: Supongamos que $g(c) > 0$ para algún $c \in (a,b)$. Entonces por la hipótesis de continuidad de g, c está contenido en un intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ en el que $|g(x) - g(c)| \leq g(c)/2$ o $g(c)/2 > 0$. Por otra parte la función

$$v(x) = \begin{cases} [(x-\alpha)(\beta-x)]^{m+1} & x \in [\alpha,\beta] \\ \\ 0 & x \notin [\alpha,\beta] \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^m(\mathbb{R})$, no negativa y no identicamente igual a 0 (las m primeras derivadas se anulan en α y β). Se obtiene así que sobre $[a,b]$ el producto gv es continuo, no negativo, y no identicamente nulo. Por tanto

$$0 < \int_a^b g(x)\, v(x)\, dx$$

que contradice la hipótesis.

Similarmente, la suposición de que $g(c) < 0$ (o $-g(c) > 0$) conduce a otra contradicción y concluimos que $g(c) = 0$, $\forall c \in (a,b)$, pero puesto que g es continua, también debe anularse en los extremos del intervalo; es decir $g \equiv 0$ sobre $[a,b]$

3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Con el fin de mantener una estructura similar a la empleada en la teoría de control óptimo que veremos en el siguiente tema, emplearemos t como variable independiente, mientras que x será la variable dependiente, por tanto tendremos

$$x \equiv x(t)$$

3.3.1 Optimización dinámica sin restricciones

Recordemos que el problema general del cálculo de variaciones se puede plantear en términos de la optimización de un funcional de la forma

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

donde $\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, es la derivada de $x(t)$ respecto a la variable independiente. Supondremos que la integral anterior existe y que las funciones empleadas son dos veces derivables en el intervalo $[t_0, t_1]$, es decir

$$x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x(t) \in \mathcal{C}^2((t_0, t_1))$$

El problema de optimizar $J(x)$ se denomina *problema de Lagrange.* Estos problemas incluyen a los llamados *problemas de Bolza* que pueden expresarse en la forma de optimizar un funcional descrito por

$$J_B(x) = [\phi(t, x(t))]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \tag{3.5}$$

donde

$$[\phi(t, x(t))]_{t_0}^{t_1} = \phi(x(t_1), t_1) - \phi(x(t_0), t_0)$$

y por tanto sólo es función de los valores iniciales y finales, mientras que la integral de F depende de toda la trayectoria entre t_0 y t_1. Si ahora hacemos el cambio

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t)) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) + \frac{d\phi}{dt}(t, x(t))$$

el funcional se puede expresar como en un problema de Lagrange

$$J_B(x) = \int_{t_0}^{t_1} F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

En adelante buscaremos la solución de problemas de la forma

$$\min J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$$

donde

$$\begin{aligned} x &\equiv x(t) \\ \dot{x} &\equiv \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Queremos encontrar una función $x^*(t) \in \mathcal{D}$ tal que el funcional $J(x)$ alcance el máximo o mínimo sobre ella. Esta función $x^*(t)$ se dice que es un *extremal* de $J(x)$ y se cumplirá por tanto que

$$J(x^*) \leq J(x) \qquad \forall x(t) \in \mathcal{D}$$

Supongamos que $x^*(t)$ es una curva extremal para $J(x)$ y consideremos la familia de funciones descritas por

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon v(t)$$

y definidas en $[t_0, t_1]$. Esta familia incluye a $x^*(t)$, simplemente poniendo $\varepsilon = 0$. La función $v(t)$ es llamada una *variación en* $x(t)$ y ε un número pequeño, para permitir que $x(t)$ pertenezca al conjunto $\mathcal{D}$.

Con el fin de simplificar el proceso, supondremos que las funciones $x(t)$ deben cumplir las siguientes *condiciones de frontera*

$$\forall x(t) \in \mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Con estas condiciones y la definición de $x(t)$ se debe cumplir

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x^*(t_0) \Rightarrow v(t_0) = 0 \\ x(t_1) &= x^*(t_1) \Rightarrow v(t_1) = 0 \end{aligned}$$

Está claro por la definición que para $\varepsilon = 0$ y cualquiera que sea $v(t)$ todas las curvas tienen un mínimo

$$x^*(t) = x(t)|_{\varepsilon=0}$$

y la función

$$\Gamma(\varepsilon) = J(x^* + \varepsilon v)$$

tendrá un mínimo en $\varepsilon = 0$, independientemente del valor de $v(t)$. La función $\Gamma(\varepsilon)$ es una función real de variable real y por tanto si tiene un mínimo en $\varepsilon = 0$, debe cumplir la condición necesaria (para mínimo o para máximo)

$$\Gamma'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \Gamma'(0) = 0$$

que en términos del funcional J se expresa como

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x^* + \varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.6}$$

mientras que la condición para mínimo es que

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x^* + \varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} \geq 0$$

independientemente de $v(t)$, sin embargo en la mayoría de problemas ocurre que si la solución existe, entonces es una solución de la ecuación 3.6.

Vamos ahora a ver a qué nos conduce la ecuación estacionaria 3.6. Supongamos que la función $x^*(t)$ minimiza $J(x)$ entonces

$$J(x^* + \varepsilon v) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^* + \varepsilon v, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{v}, t)\, dt$$

Si ahora derivamos respecto de ε

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x + \varepsilon v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t, x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v})\, dt \right)$$

donde por simplicidad se ha eliminado el símbolo $*$ de las ecuaciones. Bajo ciertas condiciones de derivabilidad podemos pasar la derivada dentro de la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(F(t, x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v})\right) dt$$

y utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x + \varepsilon \eta) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v})\, v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v})\, \dot{v} \right\} dt$$

al evaluar en $\varepsilon = 0$ obtenemos

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x + \varepsilon \eta)\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \dot{x})\, v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\, \dot{v} \right\} dt \tag{3.7}$$

El segundo término del integrando en la ecuación 3.7 se puede integrar por partes, considerando

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \Rightarrow dU = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) dt \\ dV &= \dot{v} dt \Rightarrow V = v \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\, \dot{v} dt = \left. v \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} v \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) dt$$

Esta expresión se sustituye en 3.7 y después de sacar factor común v obtendremos la expresión buscada

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x + \varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} v \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) \right\} dt + \left. v \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{3.8}$$

Como esta expresión debe ser 0, independientemente del valor de $v(t)$, entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} v \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) \right\} dt = 0 \tag{3.9}$$

$$\left. v \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{3.10}$$

Como estamos considerando que tanto $x(t_0)$ como $x(t_1)$ son fijos, y por tanto esto implicaba que $v(t_0) = v(t_1) = 0$, el término 3.10 se anula y la condición que queda es

$$\int_{t_0}^{t_1} v \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right) \right\} dt = 0$$

expresión podemos aplicar el lema de Lagrange para obtener la condición

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right) = 0 \tag{3.11}$$

La ecuación 3.11 es la llamada *primera ecuación de Euler-Lagrange* y nos proporciona una condición necesaria (de primer orden) que debe cumplir cualquier extremal $x^*(t)$ del funcional J.

Si no se realiza la integración por partes de la ecuación 3.7 obtenemos la llamada fórmulación débil o variacional de las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(x+\varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0} = 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,\dot{x})\,v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\,\dot{v}\right\}dt = 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} v\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,\dot{x})\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\dot{v}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\,dt$$

Definición 3.5 *Cualquier función $x \in \mathcal{C}^1(t_0,t_1)$ que cumpla la primera ecuación diferencial de Euler-Lagrange (ecuación 3.11) se dice que es una* función estacionaria de $J(x)$.

Tradicionalmente se denomina a estas funciones *funciones extremales* o simplemente *extremales,* aunque no proporcionen ni máximo ni mínimo local para el problema.

Observación 3.6 *Es posible encontrar la ecuación 3.11 expresada como*

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ F_{\dot{x}} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \end{aligned}$$

3.4 Condiciones Transversales

En la sección anterior se ha deducido la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 3.11) con la condición de que los valores de $x(t)$ en los puntos t_0 y t_1 fueran fijos. Estas *condiciones de frontera* sobre la función $x(t)$ son también llamadas *condiciones transversales* o de *transversalidad* y permiten determinar la solución particular del problema a partir de la solución general de la ecuación diferencial 3.11.

Como en el caso de la braquistócrona estas condiciones transversales pueden generalizarse de forma que puedan ser fijas o libres. De esta forma tendremos cuatro casos.

1. *Extremos inicial y final fijos*

   Este es el caso empleado para deducir la ecuación de Euler Lagrange. Para determinar la solución particular del problema se utilizará la ecuación 3.11 junto con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_1 \end{aligned}$$

2. *Extremos inicial y final variables*

   En este caso, ninguno de los valores de $x(t)$ en t_0 y t_1 está condicionados y por tanto los valores de la variación $v(t)$ no tienen porqué ser cero. Sin embargo para que la condición 3.10 sea 0, independientemente del valor de $v(t)$ tendrá que ocurrir

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|_{t_0}^{t_1} = 0$$

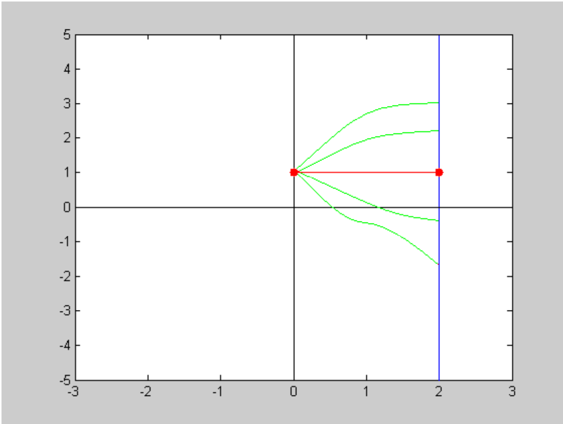

Figura 3.12:

y podemos emplear como condiciones de frontera las siguientes

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|_{t_0} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)) = 0 \\ \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|_{t_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)) = 0\end{aligned}$$

Estas son las llamadas *condiciones naturales.*

3. *Extremo inicial fijo y extremo final libre*

   En este caso mientras que $x(t_0) = x_0$ está fijo, el valor de $x(t)$ en t_1 es indeterminado. Las condiciones de frontera serán las siguientes

$$\begin{aligned}x(t_0) &= 0 \\ \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|_{t_1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)) = 0\end{aligned}$$

4. *Extremo inicial libre y extremo final fijo*

   Este caso es simétrico del anterior, ahora $x(t_0)$ es desconocido, pero $x(t_1)$ es fijo. Las condiciones de frontera serán

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x})\right|_{t_0} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)) = 0 \\ x(t_0) &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 3.7 *Encuentra la curva con la mínima longitud entre el punto $x(0) = 0$ y la línea $t_1 = 2$.*

Solución: Recordemos que para una curva $x(t)$ definida en un intervalo $[t_0, t_1]$ su longitud viene dada por el funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

El planteamiento del problema del enunciado sería

$$\min \int_0^2 \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

junto con las condiciones transversales

$$x(0) = 0$$

$$x(2) \text{ libre}$$

Planteamos la ecuación de Euler-Lagrange para $F(t, x, \dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) \end{aligned}$$

y se obtiene la relación

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c$$

donde c es una constante. Si ahora despejamos $\dot{x}$, se obtiene

$$\dot{x}^2 \left(1 - c^2\right) = c^2$$

como $c^2 \neq 1$ (¿por qué?) se obtiene teniendo en cuenta que $\dot{x}^2 \geq 0$

$$\dot{x}^2 = \frac{c^2}{1-c^2} = \alpha^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha$$

Si integramos

$$x(t) = \alpha t + \beta$$

Para calcular las constante α y β necesitamos utilizar las condiciones transversales. Como $x(0)$ es fijo tenemos

$$x(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Sin embargo, como $x(2)$ es variable tendremos

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1=2} = 0$$

es decir

$$\frac{\dot{x}(2)}{\sqrt{1 + \dot{x}(2)^2}} = 0$$

Como $\dot{x}(t) = \alpha$ para todo $t \in [0, 2]$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

y el extremal buscado será

$$x^*(t) = 1$$

La distancia mínima será

$$J(x^*) = \int_0^2 \sqrt{1 + (\dot{x}^*)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{1+0^2} dt = \int_0^2 dt = 2$$

Ejemplo 3.8 *Resuelve el siguiente problema variacional*

$$\begin{array}{ll} \min & \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x\right) dt \\ s.a. & x(0) \ \textit{libre} \\ & x(2) \ \textit{libre} \end{array}$$

Solución: Se trata de un problema de extremos inicial y final libres. Planteamos en primer lugar la ecuación de Euler-Lagrange para $F(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dot{x} + 1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + x + 1 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x} + \dot{x} \end{array}\right\} \Rightarrow (\dot{x}+1) - (\ddot{x}+\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = 1 \tag{3.12}$$

Integrando la ecuación diferencial de 3.12

$$\ddot{x} = 1 \tag{3.13}$$

$$\dot{x} = t + \alpha \tag{3.14}$$

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta \tag{3.15}$$

Como antes, obtendremos los valores de α y β utilizando las condiciones transversales; que como $x(0)$ y $x(2)$ son variables en este caso serán

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0=0} = 0 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1=2} = 0$$

es decir

$$\dot{x}(0) + x(0) + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{x}(2) + x(2) + 1 = 0 \tag{3.16}$$

Las expresiones de $\dot{x}(t)$ y $x(t)$ vienen dadas en 3.14 y 3.15 respectivamente

$$\dot{x}(0) = 0 + \alpha = \alpha$$

$$x(0) = \tfrac{0^2}{2} + \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

$$\dot{x}(2) = 2 + \alpha$$

$$x(2) = \tfrac{2^2}{2} + 2\alpha + \beta = 2\alpha + \beta + 2$$

y sustituyendo en 3.16 se obtiene un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{c} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ (2+\alpha) + (2\alpha + \beta + 2) + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha + \beta = -1 \\ 3\alpha + \beta = -5 \end{array}\right\}$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

El extremal buscado es

$$x^*(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 1$$

y el valor mínimo del funcional en $x^*(t)$ será

$$J(x^*) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(\dot{x}^*)^2 + x^*\dot{x}^* + \dot{x}^* + x^*\right) dt = \frac{4}{3}$$

3.4.1 Casos especiales de la primera ecuación

En general resolver la ecuación 3.11 es bastante difícil. Sin embargo cuando una o más variables de F no están presentes explícitamente, entonces es posible encontrar una primera integral de la ecuación diferencial de forma relativamente sencilla. Veamos tres de estos casos.

Notar en primer lugar que si $x(t) \in \mathcal{C}^2[a,b]$, al aplicar la regla de la cadena a la ecuación 3.11 se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}\right) = 0 \tag{3.17}$$

Cuando $F = F(\dot{x})$

En este caso $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ y la ecuación 3.11 se transforma en

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c$$

con c una constante.

En el caso particular de que $x(t) \in \mathcal{C}^2[a,b]$, como en este caso también $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} = 0$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = 0$ la ecuación 3.17 se transforma en

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} = 0$$

De aquí se obtiene

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x} = 0 \\ \\ \text{o} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Si $\ddot{x} = 0$ entonces

$$x(t) = \alpha t + \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y obtenemos como solución una familia biparamétrica de rectas. Los valores de α y β se determinan utilizando las condiciones transversales corresopondientes.

Si, en caso contario, ocurre $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 0$ y esta ecuación tiene una o varias raíces reales $\dot{x} = k_i$, entonces integrando

$$y = k_i x + c$$

que es una familia monoparamétrica de rectas, que podemos suponer, está contenida en la familia biparamétrica descrita con anterioridad. De esta forma, en el caso $F = F(\dot{x})$ las funciones estacionarias son todas líneas rectas.

Ejemplo 3.9 *La longitud del arco de una curva es de la forma:*

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dx$$

se trata por tanto del caso anterior, donde $F(\dot{x}) = \sqrt{1+\dot{x}^2}$.

La ecuación de Euler-Lagrange para este caso particular es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = 0$$

y derivando respecto a t

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2} - \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\dot{x}}{1+\dot{x}^2}\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left[1+\dot{x}^2\right]^{3/2}}\ddot{x} = 0$$

cuya única solución es

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow x(t) = \alpha t + \beta$$

Cuando $F = F(t, \dot{x})$

En este caso, también ocurre $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ y la ecuación 3.11 se reduce a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

que tiene como primera integral

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c$$

con c una constante. Además, como la ecuación de primer orden obtenida no contiene a x, ésta puede integrarse o bien resolviéndola directamente respecto a $\dot{x}$ e integrando o bien introduciendo un parámetro escogido en forma adecuada.

Ejemplo 3.10 *Como se ha visto al principio de la sección para caracterizar las geodésicas suaves sobre una esfera de radio R había que minimizar el funcional*

$$L(Y) = R\int_0^1 \sqrt{\dot{\theta}(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \dot{\varphi}(t)^2}dt$$

con

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \\ \theta(1) &= 0 \\ \varphi(1) &= \varphi_1 \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones paramétricas $(\theta(t), \varphi(t))$ podemos obtener una expresión de θ en términos de φ: $\theta = x(\varphi(t))$ de donde por una parte

$$\dot{\theta}(t) = \frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{x}(\varphi)\dot{\varphi}(t) \Rightarrow \frac{\dot{\theta}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \dot{x}(\varphi) \tag{3.18}$$

y por otra

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow \dot{\varphi}(t)\,dt = d\varphi \tag{3.19}$$

por lo que el funcional se puede expresar como

$$L(Y) = R\int_0^1 \sqrt{\dot{\theta}(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \dot{\varphi}(t)^2}dt = R\int_0^1 \dot{\varphi}(t)\sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + 1}dt$$

y utilizando 3.18 y 3.19 obtenemos

$$L(y) = R\int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 + (\dot{x}(\varphi)\operatorname{sen}\varphi)^2}d\varphi$$

Si tomamos ahora $\varphi = t$ como variable independiente, el problema es buscar el mínimo de

$$L(y) = R\int_0^{t_1} \sqrt{1 + (\dot{x}(t)\operatorname{sen} t)^2}dt$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{D}^1 = \left\{x \in \mathcal{C}^1\left[0, t_1\right] : x\left(t_1\right) = 0\right\}$$

En este caso

$$F = F\left(t, \dot{x}\right) = R\sqrt{1 + \dot{x}^2 \overset{2}{\operatorname{sen}} t}$$

por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{R\dot{x}\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1 + \dot{x}^2\operatorname{sen}^2 t}}$$

de manera que las funciones estacionarias $x\left(t\right)$ son aquellas para las que sucede

$$\frac{R\dot{x}\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1 + \dot{x}^2\operatorname{sen}^2 t}} = c$$

siendo c una constante, cuyo valor podemos determinar teniendo en cuenta que esta expresión es válida para todos los valores de t en el intervalo $\left[0, t_1\right]$ y tomando en particular $t = 0$

$$\left.\frac{R\dot{x}\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1 + \dot{x}^2\operatorname{sen}^2 t}}\right|_{t=0} = 0$$

luego

$$c = 0$$

De manera que tiene que cumplirse $\dot{x}\left(t\right) = 0$ y de ahí

$$x\left(t\right) = A$$

con A constante. Tal y como se dedujo en la sección correspondiente, esta expresión de $x\left(t\right)$ corresponde a los círculos máximos de la esfera.

Cuando $F = F\left(x, \dot{x}\right)$

Si F no depende explícitamente de la variable t y la función $x\left(t\right) \in \mathcal{C}^2\left(\left[t_0, t_1\right]\right)$, la ecuación de Euler-Lagrange 3.11 se reduce a una de primer orden, ya que llamando

$$H\left(t\right) = F\left(x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right)$$

al derivar respecto de x, se obtiene

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}\left[H\right] = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ y que también se cumple la ecuación de Euler-Lagrange 3.11 entonces

$$\dot{H} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)$$

e integrando

$$H = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} + c$$

con c una constante. Como $H = F$ se tiene la ecuación diferencial de primer orden

$$F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} = c \tag{3.20}$$

Ejemplo 3.11 *Resuelve el problema de la braquistócrona.*

Solución: Teniendo en cuenta en la ecuación de la braquistócrona x era la variable independiente, mientras que y era función de x, el problema consistía en minimizar la expresión

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt$$

sobre el conjunto de funciones

$$\mathcal{D} = \left\{ 0 \le x(t) \in \mathcal{C}^1[0, t_1] : x(0) = 0, x(t_1) = x_1; \int_0^{t_1} (x(t))^{-3/2} dt < +\infty \right\}$$

(la última condición se impone para que la integral sea convergente en 0).

En este caso

$$F(x, \dot{x}) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}$$

salvo el factor constante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$. De aquí obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

Y utilizando la expresión 3.20

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} - \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}}\dot{x} = c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c = \frac{1}{k}$$

Si se eleva ambos miembros al cuadrado teniendo en cuenta además que $x > 0$

$$x\left(1+\dot{x}^2\right) = k^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{k^2 - x}}\dot{x} = 1 \tag{3.21}$$

Si ahora introducimos el cambio de variable dependiente $\theta = \theta(t)$ de forma que

$$x(\theta) = k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k^2}{2}(1 - \cos\theta) \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

entonces

$$k^2 - x(\theta) = k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \dot{x}(\theta) = c^2 \dot{\theta}(t) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Y sustituyendo ambas expresiones en la ecuación diferencial 3.21

$$k^2 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \dot{\theta} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{k^2}{2}(1 - \cos\theta)\dot{\theta} = 1$$

e integrando

$$\left(\frac{k^2}{2}\right)(\theta - \operatorname{sen}\theta) = t - C$$

con C una constante.

Si hacemos el cambio $k^2/2 = K^2$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la braquistócrona

$$t = K^2(\theta - \operatorname{sen}\theta) + C$$

$$x = K^2(1 - \cos\theta)$$

Las constantes K y C se determinan a partir de las condiciones de contorno

$$x(0) = 0$$

$$x(t_1) = x_1$$

es decir, para θ_0 y θ_1 debe ocurrir

$$\begin{aligned} 0 &= K^2 (\theta_0 - \operatorname{sen}\theta_0) + C \\ 0 &= K^2 (1 - \cos\theta_0) \\ t_1 &= K^2 (\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1) + C \\ x_1 &= K^2 (1 - \cos\theta_1) \end{aligned}$$

3.4.2 La Segunda Ecuación

Cuando $F \in \mathcal{C}^1 \left([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2 \right)$ e x es una solución de clase $\mathcal{C}^1 ([a, b])$ de la primera ecuación Euler-Lagrange (ecuación 3.11) la integración directa produce

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x} dt \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x} dt + A \tag{3.22}$$

con A una constante.

Por otra parte, si $x \in \mathcal{C}^2 ([a, b])$ y derivamos F respecto a t, se obtiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}\left(F - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial F}{\partial t}$$

o integrando

$$F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial t} dt + B$$

donde B es una constante.

Proposición 3.12 *Sea*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dx$$

con $F \in \mathcal{C}^1 \left([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2 \right)$ *y*

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathcal{C}^1 [t_0, t_1] : x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1 \right\}$$

Si $x_0 \in \mathcal{D}$ *es una función extremal para* J *en* $\mathcal{D}$*, entonces en* $[t_0, t_1]$ *la función* x_0 *cumple la segunda ecuación de Euler-Lagrange*

$$F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial t} dt + B \tag{3.23}$$

para alguna constante B*.*

3.5 Condiciones de segundo orden

Para establecer la naturaleza del extremo es necesario el cálculo de

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2} (x + \varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0}$$

Recordemos que la primera derivada respecto a ε para el funcional era

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} (x + \varepsilon\eta) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} (t, x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v}, t)\, \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (x + \varepsilon v, \dot{x} + \varepsilon \dot{v}, t)\, \dot{v} \right\} dt$$

y derivando otra vez respecto de ε

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon\eta)=\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,\dot{v}\right\}dt\right)$$

metiendo la derivada dentro de la integral

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon\eta)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,\dot{v}\right\}dt$$

y utilizando de nuevo la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon\eta) &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,\dot{v}\right]v+\\ &\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,\dot{v}\right]\dot{v}dt\end{aligned}$$

y agrupando

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,v\dot{v}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x+\varepsilon v,\dot{x}+\varepsilon\dot{v})\,\dot{v}^2dt$$

y particularizando en $\varepsilon=0$

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x})\,v^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,v\dot{v}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x,\dot{x})\,\dot{v}^2dt \tag{3.24}$$

Esta ecuación puede reescribirse en notación matricial como

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}(v,\dot{v})\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ \dot{v}\end{pmatrix}dt=\int_{t_0}^{t_1}(v,\dot{v})\,HF\begin{pmatrix}v\\ \dot{v}\end{pmatrix}dt$$

Si la matriz HF es semidefinida positiva (o negativa) entonces $x(t)$ podrá ser mínimo (o máximo respectivamente). Alternativamente podemos aplicar integración por partes en la 3.24, concretamente en el segundo término dentro de la integral. Tomando en este caso

$$\begin{aligned}U &= \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,v\Rightarrow dV=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)v+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,\dot{v}\\ dV &= \dot{v}dt\Rightarrow V=v\end{aligned}$$

la integral queda

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,v\dot{v}dt &= v^2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}v\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)v+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,\dot{v}\right)dt\\ &= v^2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}v^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,v\dot{v}dt\end{aligned}$$

pasando el tercer término del miembro de la derecha a la izquierda

$$2\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\,v\dot{v}dt=-\int_{t_0}^{t_1}v^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)dt+v^2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\Big|_{t_0}^{t_1}$$

y sustituyendo en 3.24

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x})\, v^2 - v^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x,\dot{x})\,\dot{v}^2 dt + \left. v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right|_{t_0}^{t_1}$$

agrupamos en v^2

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)\right] v^2 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x,\dot{x})\right]\dot{v}^2 dt + \left. v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right|_{t_0}^{t_1}$$

La ecuación se simplifica en el caso de que los extremos inicial y final sean fijos, puesto que en este caso $v(t_0) = v(t_1) = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right)\right] v^2 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x,\dot{x})\right]\dot{v}^2 dt$$

Para establecer si x^* es un mínimo o máximo de J, la segunda condición necesaria es que

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}(x+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0} \geq 0$$

independientemente del valor de $v(t)$ y sólo sobre $x^*(t)$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right) &\geq 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t,x,\dot{x}) &\geq 0 \end{aligned}$$

En la mayoría de los problemas sólo será necesaria la condición de primer orden (ecuación de Euler-Lagrange). En otros ejemplos es posible que el integrando se ≥ 0, pero no se cumplan las condiciones anteriores, debido probablemente a que v y $\dot{v}$ no sean independientes entre sí.

Ejemplo 3.13 *Aplica las condiciones de segundo orden al problema de encontrar la curva con la mínima longitud entre el punto $x(0) = 0$ y la línea $t_1 = 2$.*

Solución: Encontramos anteriormente que la solución para el problema venía dada por la curva

$$x^*(t) = 1$$

y recordemos también que para este problema teníamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \end{aligned}$$

Para aplicar las condiciones de segundo orden tendremos que derivar otra vez

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(0) = 0 \\ \tfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} &= \tfrac{\partial}{\partial v}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(t,x,\dot{x})\right) \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = \frac{1}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}}$$

que al utilizar $x^*(t) = 1$ y por tanto $\dot{x}^*(t) = 1$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = \frac{1}{\left(1+(0)^2\right)^{3/2}} = 1 > 0$$

Ejemplo 3.14 *Aplica las condiciones de segundo orden al problema*

$$\begin{array}{ll} \min & \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x\right) dt \\ s.a. & \quad x(0) \text{ libre} \\ & \quad x(2) \text{ libre} \end{array}$$

Solución: Encontramos anteriormente que la solución para el problema venía dada por la curva

$$x^*(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 1$$

y recordemos también que para este problema teníamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \dot{x} + 1 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= x + \dot{x} + 1 \end{aligned}$$

Para aplicar las condiciones de segundo orden tendremos que derivar otra vez

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}+1) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}+1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\dot{x},t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x}(x,\dot{x},t)\right) = 0 \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(x + \dot{x} + 1) = 1 \geq 0$$

3.6 Condiciones suficientes con convexidad

Teorema 3.15 *Dado el problema*

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$$

Entonces si x^* es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange y además $F(t,x,\dot{x})$ es estricamente convexa como función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, en las variables x y $\dot{x}$, es decir, la función $F(t,x,\dot{x})$ es convexa para cada valor de t fijo en las componentes x y $\dot{x} \Rightarrow x^*$ es la única solución del problema variacional.

Ejemplo 3.16 *Definimos el siguiente problema variacional*

$$\min \quad J(x) = \int_0^T \left(\frac{k(t)}{2}\dot{x}^2(t) - f(t)\,x(t)\right) dt$$

definido sobre el siguiente conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ x : \mathcal{C}^1[0,T] \middle|\, x(0) = x(T) = 0 \right\}$$

Solución: Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este problema son

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -f(t) \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= k(t)\,\dot{x}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{k}(t)\,\dot{x}(t) + k(t)\,\ddot{x}(t) \end{aligned}$$

y por tanto tenemos que resolver las siguiente ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(k\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)\right) &= -f\left(t\right)\\
x\left(t_0\right) &= 0\\
x\left(t_1\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Veremos a continuación si la solución es única, para ello veremos si F es convexa en las variables x y $\dot{x}$. Calculamos las derivadas correspondientes

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = -f\left(t\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = 0 \end{array} \right. \\
\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = k\left(t\right)\dot{x}\left(t\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = k\left(t\right) \end{array} \right.
\end{array}
\right. \Rightarrow HF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k\left(t\right) \end{bmatrix}
$$

por tanto F será convexa si $k\left(t\right) > 0$, $\forall t \in [0, T]$.

1. Por ejemplo, como caso particular podemos tomar

$$
\begin{aligned}
k\left(t\right) &= 1\\
f\left(t\right) &= C
\end{aligned}
$$

donde C es constante. En este caso

$$
HF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

que es semidefinida positiva y por tanto una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange será una solución del problema de minimizar el funcional

$$
\min \quad J\left(x\right) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\left(t\right) - Cx\left(t\right)\right) dt
$$

Recordemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange para este problema era

$$
\frac{d}{dt}\left(k\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)\right) = -f\left(t\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\left(t\right)\right) = -C \Rightarrow \ddot{x}\left(t\right) = -C
$$

cuya solución general es

$$
x\left(t\right) = -\frac{C}{2}t^2 + c_1 t + c_2
$$

con c_1 y c_2 constantes. El valor de las constantes se determina utilizando las condiciones transversales

$$
\begin{aligned}
x\left(0\right) &= 0 \Leftrightarrow c_2 = 0\\
x\left(T\right) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{C}{2}T^2 + c_1 T + c_2 = 0
\end{aligned}
$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{CT}{2} \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$x^*(t) = -\frac{CT}{2}t^2 + \frac{CT}{2}t = \frac{CT}{2}\left(t - t^2\right)$$

es la solución buscada.

2. Por ejemplo si $k = 1$ y $f(t) = \operatorname{sen}(\pi n t)$. En este caso la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\,\dot{x}(t)\right) = -f(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(t)\right) = -\operatorname{sen}(\pi n t)$$

y tenemos que resolver el problema

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\operatorname{sen}(\pi n t) \\ x(0) &= x(1) = 0 \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t) + c_1 \\ x(t) &= \frac{1}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}(n\pi t) + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones transversales

$$\begin{aligned} x(0) &= c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \\ x(1) &= c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

luego

$$u(x) = \frac{1}{(n\pi)^2}\operatorname{sen}(n\pi t)$$

3.7 Optimización dinámica con restricciones

Para problemas isoperimétricos, como en el caso del problema de la catenaria, es posible establecer ecuaciones de Euler-Lagrange similares.

3.7.1 Restricciones de igualdad

Podemos resolver el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \\ \text{s.a.} \quad & \psi_i(t, x, \dot{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

buscando la solución del problema modificado:

$$\min \quad J_a(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x}) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(t,x,\dot{x})\, dt$$

s.a.

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

3.7.2 Restricciones Integrales

En esta sección damos las condiciones necesarias para que una función sea extremal de un funcional sujeto a restricciones de tipo integral, tanto de igualdad como de desigualdad.

Teorema 3.17 *Dado el problema*

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})\, dt$$

$$\text{s.a.} \quad \textstyle\int_{t_0}^{t_1} h_i(t,x,\dot{x})\, dt = \alpha_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

si $\exists \quad \lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}$, *tal que*

$$\tilde{F}(t,x,\dot{x}) = F(t,x,\dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(t,x,\dot{x})$$

es [estrictamente] convexa respecto de $(x,\dot{x})$ *para cualquier* t *fijo. Si* x^* *es solución del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} h_i(t,x,\dot{x})\, dt &= \alpha_i \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *entonces* x^* *es solución [la única] del problema.*

Ejemplo 3.18 *Resuelve el siguiente problema*

$$\min \quad J(x) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 \, dt$$

$$s.a. \qquad \int_0^1 x(t)\, dt = 1$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

Solución: Construimos el coste ampliado $\tilde{F} = F + \lambda h$

$$\tilde{F} = \dot{x}^2 + \lambda x$$

Comprobamos la convexidad de $\tilde{F}$, para ello necesitamos derivar respecto de $(x, \dot{x})$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \lambda \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial \dot{x}} = \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \dot{x} \partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \dot{x}^2} = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow H\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva y por tanto $\tilde{F}$ es convexa en $(x, \dot{x})$

Ahora utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\tilde{F}$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Longleftrightarrow \lambda - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda - 2\ddot{x} = 0$$

por tanto

$$\ddot{x} = \frac{\lambda}{2}$$

e integrando dos veces

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{2} t + c_1$$

$$x = \frac{\lambda}{4} t^2 + c_1 t + c_2$$

Donde c_1 y c_2 son constantes. Los valores de estas constantes y del multiplicador λ los podemos calcular utilizando las condiciones transversales y la condición integral.

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{4} + c_1 + c_2 = 1$$

$$\textstyle\int_0^1 x(t)\, dt = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(\dfrac{\lambda}{4} t^2 + c_1 t + c_2\right) dt = \dfrac{\lambda}{12} t^3 + \dfrac{c_1}{2} t^2 + c_2 t \Big|_{t=0}^{t=1} = \dfrac{\lambda}{12} + \dfrac{c_1}{2} = 1$$

Se obtiene como solución

$$c_1 = 6$$

$$c_2 = 0$$

$$\lambda = -24$$

La solución óptima del problema es

$$x^*(t) = -6t^2 + 6t$$

y el coste óptimo

$$J(x^*) = \int_0^1 (\dot{x}^*)^2 \, dt = \int_0^1 (-12t+6)^2 \, dt = \left. \frac{(-12t+6)^3}{-36} \right|_{t=0}^{t=1} = 12$$

Teorema 3.19 *Dado el problema*

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) \, dt$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & \textstyle\int_{t_0}^{t_1} h_i(t, x, \dot{x}) \, dt = \alpha_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \textstyle\int_{t_0}^{t_1} g_j(t, x, \dot{x}) \, dt \le \beta_j \quad j = 1, \ldots, p \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

si $\exists \mu_1, \ldots, \mu_p \ge 0 \in \mathbb{R}$*, tal que*

$$\tilde{F}(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(t, x, \dot{x})$$

es [estrictamente] convexa respecto de $(x, \dot{x})$ *para cualquier* t *fijo. Si* x^* *es solución del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} h_i(t, x, \dot{x}) \, dt &= \alpha_i \\ \mu_j \left(\int_{t_0}^{t_1} g_j(t, x, \dot{x}) \, dt - \beta_j \right) &= 0 \end{aligned}$$

entonces x^* *es solución [la única] del problema.*

Ejemplo 3.20 *Resuelve el siguiente problema*

$$\min \quad J(x) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2\, dt$$

$$s.a. \quad \int_0^1 x(t)\, dt \leq \frac{1}{3}$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

Solución: Construimos el coste ampliado $\tilde{F} = F + \lambda h$

$$\tilde{F} = \dot{x}^2 + \mu x^2$$

Comprobamos la convexidad de $\tilde{F}$, para ello necesitamos derivar respecto de $(x, \dot{x})$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = 2\mu x \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} = 2\mu \\ \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial \dot{x}} = \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \dot{x} \partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \dot{x}^2} = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow H\tilde{F} = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que para $\mu > 0$ es definida positiva y por tanto $\tilde{F}$ es estrictamente convexa (para $\mu = 0$, sería semidefinida positiva y por tanto convexa).

Ahora utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\tilde{F}$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Longleftrightarrow 2\mu x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0 \Longleftrightarrow 2\mu x - 2\ddot{x} = 0$$

por tanto

$$\ddot{x} = \mu x$$

Como estamos minimizando, interesa que $\mu \geq 0$ y por tanto distinguimos dos casos

$$\mu = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 t + c_2$$

$$\mu > 0 \Rightarrow \ddot{x} = \mu x \Rightarrow x(t) = c_1 e^{\sqrt{\mu} t} + c_2 e^{-\sqrt{\mu} t}$$

Para $\mu = 0$ y utilizando las condiciones transversales se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \\ x(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t) = t$$

que cumple la condición integral, ya que

$$\int_0^1 x(t)^2\, dt = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}$$

El valor del funcional para esta función es

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt = \int_0^1 (1)^2\, dt = 1$$

Para $\mu > 0$ utilizamos las condiciones transversales y la condición de holgura integral

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ x(1) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}} = 1 \\ \int_0^1 x(t)^2 \, dt - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \int_0^1 x(t)^2 \, dt = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación

$$c_2 = -c_1$$

y de la segunda

$$c_1 e^{\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}} = 1 \Rightarrow c_1 \left(e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}\right) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2 \operatorname{senh}\left(\sqrt{\mu}\right)}$$

y por tanto la función es de la forma

$$x(t) = c_1 \left(e^{\sqrt{\mu} t} - e^{-\sqrt{\mu} t}\right) = \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{\mu} t\right)}{\operatorname{senh}\left(\sqrt{\mu}\right)}$$

Utilizamos ahora la condición integral

$$\int_0^1 x^2 dt = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu} t\right)}{\operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu} t\right)}{\operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} dt = \frac{1}{2 \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} \int_0^1 \left(\cosh\left(2\sqrt{\mu} t\right) - 1\right) dt$$

integrando

$$\frac{1}{2 \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} \int_0^1 \left(\cosh\left(2\sqrt{\mu} t\right) - 1\right) dt = \frac{1}{2 \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} \left. \frac{\operatorname{senh}\left(2\sqrt{\mu} t\right)}{2\sqrt{\mu}} - t \right|_{t=0}^{t=1}$$

que nos proporciona la ecuación

$$\frac{1}{2 \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\mu}\right)} \left(\frac{\operatorname{senh}\left(2\sqrt{\mu}\right)}{2\sqrt{\mu}} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

cuya solución se obtiene (utilizando un programa adecuado) es

$$\mu = 0$$

que es el mismo caso que en el apartado anterior.

3.8 Formulación Variacional

Dado el funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) \, dt$$

supongamos que

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon v(t)$$
$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \varepsilon \dot{v}(t)$$

Podemos emplear el desarrollo de Taylor para F

$$F\left(t, x^* + \varepsilon v, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{v}\right) \simeq F\left(t, x^*, \dot{x}\right) + \frac{\partial F}{\partial x} \varepsilon v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \varepsilon \dot{v}$$

Si definimos

$$\Delta F = F\left(t, x^* + \varepsilon v, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{v}\right) - F\left(t, x^*, \dot{x}^*\right)$$

entonces

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(F\left(t, x^* + \varepsilon v, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{v}\right) - F\left(t, x^*, \dot{x}^*\right)\right) dt \simeq \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\varepsilon \dot{v}\right) dt$$

Si definimos la variación en x y $\dot{x}$ como

$$\delta x = \varepsilon v$$

$$\delta \dot{x} = \varepsilon \dot{v}$$

entonces podemos poner

$$\Delta J \simeq \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right) dt$$

La variación de J es

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right) dt$$

como para $\varepsilon = 0$ ocurre $\delta J = 0$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right) \delta x dt + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0$$

que produce las ecuaciones en variaciones siguientes

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0$$

3.9 Extensión de los métodos variacionales

En el apartado anterior se han desarrollado las ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales que dependían de una sóla variable independiente, t, y de una función $x(t)$ y su primera derivada $\dot{x}(t)$, en esta sección se plantean si profundizar las ecuaciones de Euler-Lagrange para problemas que dependen tanto de funciones vectoriales, como funcionales que dependen de derivadas de orden superior, como de funcioanles que dependen de varias variables independientes.

3.9.1 Funciones Vectoriales

Dado el problema

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right) dt$$

$$\text{s.a.} \qquad x_k(t_0) = x_{k,0} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$x(t_1) = x_{k,1} \qquad k = 1, \ldots, n$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange que debe cumplir una función vectorial $\mathbf{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)$ para ser un extremal del funcional anterior es

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right) = 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\delta x\right|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 3.21 *Resuelve el siguiente problema*

$$\min \quad J(x) = \int_0^{\pi/2} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1 x_2 dt$$

$$s.a. \qquad x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = 0$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

En este caso

$$F(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1 x_2$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange son

1. Para $k = 1$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2\ddot{x}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_2 - 2\ddot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ddot{x}_1$$

2. Para $k = 2$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 2\ddot{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 2\ddot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ddot{x}_2$$

Para encontrar los extremales hay que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ddot{x}_2 \\ x_2 = \ddot{x}_1 \end{array}\right\}$$

Si derivamos dos veces en la primera ecuación se obtiene

$$\ddot{x}_1 = \frac{d^4 x_2}{dt^4}$$

y al sustituir en la segunda

$$x_2 = \frac{d^4 x_2}{dt^4}$$

ecuación diferencial de cuarto orden, que se resuelve fácilmente utilizando las raíces de su polinomio característico $(p(\lambda) = \lambda^4 - 1)$ que son $\lambda = \pm 1, \pm i$ y por tanto la solución general es

$$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$$

y como $x_1 = \ddot{x}_2$, entonces

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \operatorname{sen} t$$

Los valores de c_k se encuentran mediante las condiciones transversales

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} + c_4 = 1$$

$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} - c_4 = -1$$

Cuya solución es

$$c_1 = 0; c_2 = 0; c_3 = 0; c_4 = 1$$

Ejemplo 3.22 *Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange para los problemas variacionales cuyo funcional es de la forma*

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x}_1, \dot{x}_2)\, dt$$

Solución: En este caso las ecuaciones de Euler-Lagrange son para x_1

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0$$

y derivando respecto a t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\dot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\ddot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\dot{x}_2 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\ddot{x}_2 = 0$$

y teniendo en cuenta que F sólo depende de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\ddot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)\ddot{x}_2 = 0$$

del mismo modo para x_2 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)\ddot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)\ddot{x}_2 = 0$$

Ambas ecuaciones se pueden poner en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^2}\right) & \left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2}\right) \\ \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1}\right) & \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución trivial es

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$$

es decir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 t + c_2 \\ x_2(t) &= c_3 t + c_4 \end{aligned}$$

con $c_k \in \mathbb{R}$, constantes.

3.9.2 Funcionales con derivadas de orden superior

Dado el problema

$$\min \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}\right) dt$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a.} & x^{(k)}(t_0) = x_{k,0} & k = 0, \ldots, n-1 \\ & x^{(k)}(t_1) = x_{k,1} & k = 0, \ldots, n-1 \end{array}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange que debe cumplir una función $\mathbf{x}^*(t)$ para ser un extremal del funcional anterior es

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right)=0$$

Ejemplo 3.23 *Resuelve el problema variacional*

$$\begin{array}{lll} \min & J(x)=\int\limits_0^1 1+\ddot{x}^2dt & \\ s.a. & x(0)=0 & x(1)=1 \\ & \dot{x}(0)=1 & \dot{x}(1)=1 \end{array}$$

Solución: Para este problema la ecuación de Euler-Lagrange es la siguiente

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}=2\ddot{x}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=2x^{(3}\Rightarrow\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=2x^{(4} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=0\Leftrightarrow 2x^{(4}=0$$

Ecuación de cuarto grado cuya solución general es

$$x(t)=c_1\frac{t^3}{6}+c_2\frac{t^2}{2}+c_3t+c_4$$

y utilizando las condiciones transversales obtenemos como solución

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2=c_4=0 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.24 *Resuelve el problema variacional*

$$\begin{array}{lll} \min & J(x)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\ddot{x}^2-x^2+t^2\right)dt & \\ s.a. & x(0)=1 & x(\pi/2)=0 \\ & \dot{x}(0)=0 & \dot{x}(\pi/2)=-1 \end{array}$$

Solución: Para este problema la ecuación de Euler-Lagrange es la siguiente

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial F}{\partial x}=-2x \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}=2\ddot{x}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=2x^{(3}\Rightarrow\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=2x^{(4} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=0\Leftrightarrow -2x+2x^{(4}=0$$

Ecuación de cuarto grado cuya solución general es

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$$

y utilizando las condiciones transversales obtenemos como solución

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c_4 = 0 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

3.9.3 Funcionales vectoriales con derivadas de orden superior

Dado el problema

$$\min \quad J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \ldots, x_1^{(n_1)}, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \ldots, x_2^{(n_2)}, \ldots, x_m, \dot{x}_m, \ddot{x}_m, \ldots, x_m^{(n_m)}\right) dt$$

$$\text{s.a.} \qquad x_j^{(k)}(t_0) = x_{j,k}^0 \in \mathbb{R}$$

$$x_j^{(k)}(t_1) = x_{j,k}^1 \in \mathbb{R}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (en este tipo de problemas se llaman ecuaciones de Euler-Poisson) que debe cumplir una función $\mathbf{x}^*(t)$ para ser un extremal del funcional anterior es

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_k}\right) + \cdots + (-1)^{n_k} \frac{d}{dt^{n_k}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k^{(n_k)}}\right) = 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

3.9.4 Funcionales derivadas parciales

Dado el problema

$$\min \quad J(u) = \iint_\Omega F(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy$$

podemos tratar de encontrar las ecuacionde de Euler-Lagrange para este tipo de problemas utilizando el procedimiento realizado para el caso de una sola variable independiente. Para ello, si consideramos que u^* es la solución del problema anterior, podemos estudiar qué ocurre cerca de esa solución y podemos definir la familia de funciones

$$u = u^* + \varepsilon v(x, y)$$

Queremos saber cómo varía J cuando hacemos cambios en ε y observar qué ocurre cuando $\varepsilon \to 0$,

$$\iint_\Omega F(x, y, u + \varepsilon v, u_x + \varepsilon v_x, u_y + \varepsilon v_y)\, dxdy$$

y derivamos ahora respecto a ε

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\iint_\Omega F(x, y, u + \varepsilon v, u_x + \varepsilon v_x, u_y + \varepsilon v_y)\, dxdy\right) = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(F(x, y, u + \varepsilon v, u_x + \varepsilon v_x, u_y + \varepsilon v_y)\right) dxdy$$

utilizando la regla de la cadena y particularizando en $\varepsilon = 0$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y dxdy$$

y para encontrar un extremal tenemos que igualar la ecuación anterior a 0

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y dxdy = 0 \tag{3.25}$$

Ahora por una parte

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}v\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)v+\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}v\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)v$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}v\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)v+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}v\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)v$$

y por tanto

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\right)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}v\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}v\right)\right)dxdy-\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)v+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)v\right)dxdy$$

Si utilizamos el teorema de Green

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}Ndy-Mdx$$

obtenemos

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_x}v}_{N}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_y}v}_{M}\right)\right)dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}dy-\frac{\partial F}{\partial u_y}dx\right)v=0$$

luego

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\right)dxdy=-\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)v+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)v\right)dxdy$$

que sustituimos en 3.25

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\right)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}v\right)dxdy-\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)v+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)v\right)dxdy$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u_x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u_x}u_x+\frac{\partial^2 F}{\partial u_x^2}u_{xx}+\frac{\partial^2 F}{\partial u_y\partial u_x}u_{xy}$$

y

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial u_y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u_y}u_y+\frac{\partial^2 F}{\partial u_y^2}u_{yy}+\frac{\partial^2 F}{\partial u_y\partial u_x}u_{xy}$$

la integral buscada es

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u_x}v_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}v_y\right)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right)vdxdy$$

y como v es arbitrario se debe cumplir la ecuación de Euler-Ostrogradski

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0 \tag{3.26}$$

En el caso de que tengamos un funcional de la forma

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int F\left(u,\nabla u,\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

siendo

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, \ldots, x_n) \\ u &= u(x_1, \ldots, x_n) \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\end{aligned}$$

la ecuación de Euler-Ostrogradski n dimensional es de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_2}}\right) - \cdots - -\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_n}}\right) = 0 \tag{3.27}$$

o equivalentemente y de forma simplificada

$$\frac{\partial F}{\partial u} - div\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_1}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_{xn}}\right) = 0$$

o

$$\frac{\partial F}{\partial u} - div\left(\nabla_{\nabla u} F\right) = 0$$

Ejemplo 3.25 *Sea Ω un disco circular de radio 1 que tiene permisividad eléctrica $\varepsilon = 1$. Supongamos también que sobre dicho disco tenemos una distribución de cargas eléctricas de densidad constante $\rho = 1$. Supongamos finalmente que el potencial sobre la frontera de dicho círculo es constante e igual a cero, esto es, $u = 0$ sobre $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. Se pide calcular la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional*

$$I(u) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{E}|^2 - \rho u\right) dxdy$$

donde

$$\mathbf{E} = -\nabla u$$

Comprueba que

$$u(x, y) = \frac{1 - \left(x^2 + y^2\right)}{4}$$

es solución de la ecuación.

Solución: Con los datos del problema el funcional es de la forma

$$I(u) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u\right) dxdy$$

y la ecuación de Euler-Lagrange (Euler-Ostrogradski) buscada es

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0$$

donde

$$F = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u$$

y por tanto

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial F}{\partial u} = -1 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial u_x} = u_x \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\right) = u_{xx} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial u_y} = u_y \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_y}\right) = u_{yy} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Vamos a comprobar que la función $u = \frac{1-\left(x^2+y^2\right)}{4}$ es solución de la ecuación anterior

$$\left| \begin{array}{l} u_x = -\dfrac{2x}{4} \Rightarrow u_{xx} = -\dfrac{1}{2} \\ \\ u_y = -\dfrac{2y}{4} \Rightarrow u_{yy} = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = -1$$

está claro que sobre Γ, ocurre $u = 0$.