

## Capítulo 3

# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

### 3.1 Introducción

Hay dos propiedades que juegan un papel fundamental en el análisis de señales: la linealidad (L) y la invariancia en el tiempo (TI). Debido a que muchos procesos físicos pueden ser modelados mediante este tipo de sistemas y estos pueden analizarse con detalle. En este tema desarrollaremos las propiedades y herramientas de este tipo de sistemas y daremos representaciones especiales para ellos.

Por una parte, gracias a la propiedad de superposición de los sistemas lineales, es posible obtener la respuesta de una entrada dada que esté formada por una combinación lineal de señales cuya respuesta es conocida, como una combinación lineal de las respuestas individuales a cada entrada. Es decir, si  $x(t)$  es una señal definida por

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k x_k(t)$$

y el sistema lineal tiene por respuesta  $y_k(t)$  cuando la entrada es  $x_k(t)$ , entonces la respuesta del sistema a la entrada  $x(t)$  es:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t)$$

Si conseguimos expresar las señales en términos de señales elementales tendremos caracterizado cualquier sistema lineal de forma completa.

En la siguiente sección se comprueba que cualquier señal viene representada en términos de impulsos unitarios tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

### 3.2 Representación de señales en términos de impulsos

En esta sección vamos a representar señales en tiempo continuo y tiempo discreto en términos de las funciones  $\delta(t)$  y  $\delta[n]$  respectivamente.

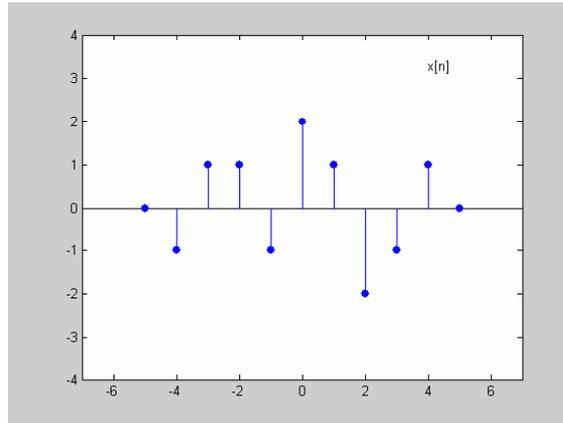


Figura 3.1: Señal en tiempo discreto.

### 3.2.1 Sistemas en tiempo discreto

Sea  $x[n]$  una señal en tiempo discreto, utilizando la definición de la función impulso unitario  $\delta[n]$ , definimos

$$x_k[n] = x[k] \delta[n - k] = \begin{cases} x[k] & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

De esta forma podemos escribir  $x[n]$  como una suma de impulsos desplazados,  $\delta[n - k]$ , cuya amplitud viene dada por  $x[k]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

ya que todos los términos del sumatorio serán 0 salvo a lo sumo cuando  $k = n$ , y en ese caso tendremos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n] \delta[0] = x[n]$$

Se ilustra este mecanismo mediante el siguiente ejemplo. Sea  $x[n]$  definida por

$$x[n] = \left\{ \dots, 0, -1, 1, 1, -1, \underbrace{2}_0, 1, -2, -1, 1, 0, 0, \dots \right\}$$

y representada en la figura 3.1

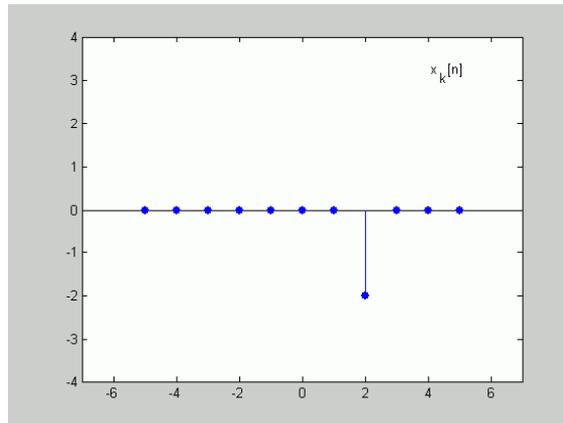
La señal  $x_k[n] = x[k] \delta[n - k]$  se anula en todos los puntos salvo en  $n = k$  y será de la forma dada en la figura 3.2 (donde en este caso se ha representado para  $k = 2$ )

y la señal  $x[n]$  puede entonces representarse como

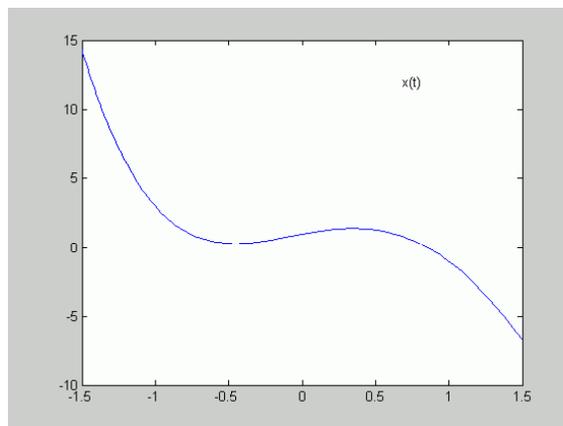
$$x[n] = \sum_{k=-4}^4 x[k] \delta[n - k] = x[-4] \delta[n + 4] + \dots + x[4] \delta[n - 4]$$

ya que el resto de sumandos en el sumatorio son 0.

Se puede entonces decir que una señal en tiempo discreto es una suma de funciones impulso desplazadas y escaladas (ponderadas) por una cantidad que depende del instante (del desplazamiento).



**Figura 3.2:**  $x_k[n]$ .



**Figura 3.3:** Señal  $x(t)$  en tiempo continuo.

La señal en tiempo discreto  $x[n]$  es una suma de impulsos  $\delta[n-k]$  desplazados hasta el instante  $k$  y escalados por  $x[k]$ . Con esta representación el escalón unitario, por ejemplo sería:

$$x[n] = u[n] \Rightarrow u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

### 3.2.2 Sistemas en tiempo continuo

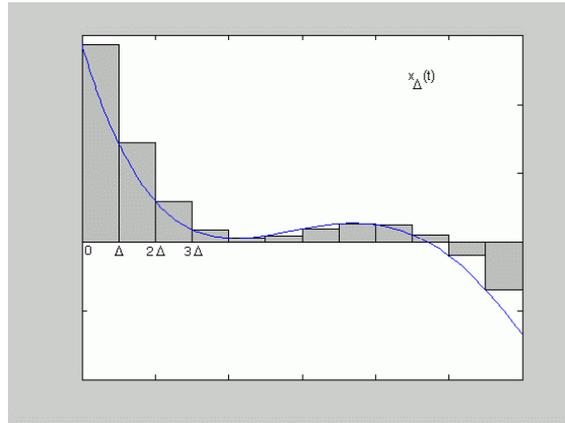
De la misma forma, para una señal en tiempo continuo,  $x(t)$ , podremos hacer una representación en términos del impulso unitario continuo  $\delta(t)$ .

Sea  $x(t)$  una señal en tiempo continuo cualquiera (ver figura 3.3).

Construimos en primer lugar una función escalonada  $x_{\Delta}(t)$ , definida como

$$x_{\Delta}(t) = \{x(k\Delta) \quad k\Delta \leq t < (k+1)\Delta \quad (3.1)$$

que gráficamente puede representarse como en la figura 3.4.

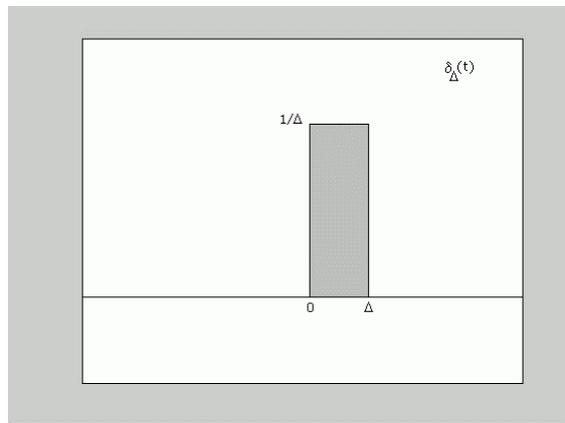


**Figura 3.4:** Función escalonada  $x_{\Delta}(t)$ .

y definimos la función impulso cuadrado,  $\delta_{\Delta}(t)$ , definida como

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y representada en la figura 3.5.



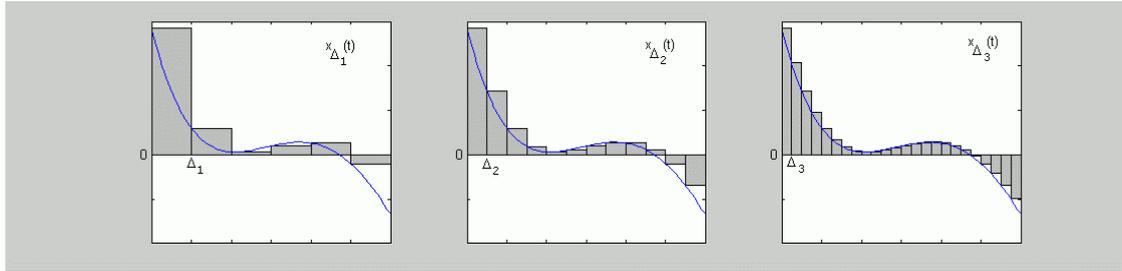
**Figura 3.5:** Función impulso cuadrado,  $\delta_{\Delta}(t)$ .

Es posible comprobar fácilmente que  $x_{\Delta}(t)$  puede representarse mediante una combinación de funciones de este tipo desplazadas y ponderadas de la siguiente forma

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (3.2)$$

puesto que  $\delta_{\Delta}(t) \cdot \Delta = 1$ , en  $0 < t < \Delta$  y  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$  está desplazada al instante  $k\Delta$ . Para un  $k$  dado, solamente uno de los sumandos del sumatorio es distinto de 0.

Si hacemos  $\Delta \rightarrow 0$ , está claro que  $x_{\Delta}(t) \rightarrow x(t)$ , como se puede apreciar en la figura 3.6.



**Figura 3.6:** La señal  $x_{\Delta}(t)$  para  $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$ .

De esta forma

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

Bajo ciertas condiciones de convergencia, que supondremos se cumplen, el sumatorio es equivalente a una integral, además  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - s)$  y obtenemos la expresión de  $x(t)$  en términos de la señal impulso unitario en tiempo continuo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t - s) ds$$

Podemos deducir la fórmula directamente ya que  $\delta(t - s)$  representa un impulso de amplitud unidad localizado en  $s$ . Podemos poner

$$x(s) \delta(t - s) = x(t) \delta(t - s)$$

e integrando sobre todo  $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t - s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - s) ds = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) ds = x(t)$$

Por ejemplo para  $x(t) = u(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) \delta(t - s) ds = \int_0^{\infty} \delta(t - s) ds = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$$

Podemos considerar que una señal en tiempo continuo es una suma (integral) de impulsos desplazados y ponderados.

### 3.3 La respuesta impulsiva de los sistemas LTI

En esta sección se deduce una característica muy importante de los sistemas LTI y es que están completamente caracterizados por su respuesta impulsiva, que es la respuesta que proporciona el sistema cuando la entrada es un impulso unitario.

### 3.3.1 Sistemas LTI en tiempo discreto

Se  $x[n]$  una señal en tiempo discreto. En la sección anterior se ha comprobado que esta señal se puede expresar como una combinación lineal de impulsos de la forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Si ahora consideramos esta señal como la entrada de un sistema lineal y utilizamos la propiedad de superposición obtendremos la respuesta como una combinación lineal de respuestas. Si llamamos  $h_k[n]$  a la respuesta del sistema al impulso desplazado  $\delta[n-k]$ , la respuesta del sistema para la entrada  $x[n]$  será

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$

donde se ha considerado a  $x[k]$  como el escalar que pondera la entrada  $k$ -ésima  $\delta[n-k]$ . Esta fórmula permite obtener la salida de cualquier entrada arbitraria a un sistema lineal. De este modo, si conocemos el comportamiento de un sistema lineal frente a los impulsos desplazados  $\delta[n-k]$  se habrá conseguido caracterizar su comportamiento para cualquier otra señal.

**Ejemplo 3.1** *Sea un sistema lineal cuyas respuesta a los impulsos desplazados vienen dadas por*

$$\delta[n+1] \rightarrow h_{-1}[n] = \left\{ \dots, 0, 3, \underbrace{2}_0, -1, 2, 0, 0 \dots \right\}$$

$$\delta[n] \rightarrow h_0[n] = \left\{ \dots, 0, -1, \underbrace{3}_0, 1, 0, 1, 0, \dots \right\}$$

$$\delta[n-1] \rightarrow h_1[n] = \left\{ \dots, 0, 1, \underbrace{0}_0, -3, -1, 0, \dots \right\}$$

$$\text{Si } k \neq -1, 0, 1 \Rightarrow \delta[n-k] \rightarrow h_k[n] = \left\{ \dots, 0, 0, \underbrace{0}_0, 0, 0, 0, \dots \right\}$$

*Encuentra la respuesta de este sistema para la señal de entrada*

$$x[n] = \left\{ \dots, 0, -3, \underbrace{2}_0, 4, 0, 0, 0 \dots \right\}$$

**Solución:** Como nos dicen que el sistema es lineal, la respuesta a  $x[n]$  se obtendrá fácilmente a partir de las respuestas  $h_k[n]$  que tiene el sistema para los impulsos desplazados  $\delta[n-k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$

En este caso la señal de entrada  $x[n]$  puede ponerse en términos de impulsos como

$$x[n] = x[-1] \delta[n+1] + x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n-1]$$

y la respuesta será entonces la misma combinación lineal para las respuestas  $h_k[n]$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[-1]h_{-1}[n] + x[0]h_0[n] + x[1]h_1[n] = \\
 &= -3 \left\{ \dots, 0, 3, \underbrace{2}_0, -1, 2, 0, 0 \dots \right\} + 2 \left\{ \dots, 0, -1, \underbrace{3}_0, 1, 0, 1, 0, \dots \right\} + 4 \left\{ \dots, 0, 1, \underbrace{0}_0, -3, -1, 0, \dots \right\} \\
 &= \left\{ \dots, 0, -9, \underbrace{-6}_0, 3, -6, 0, 0 \dots \right\} + \left\{ \dots, 0, -2, \underbrace{6}_0, 2, 0, 2, 0, \dots \right\} + \left\{ \dots, 0, 4, \underbrace{0}_0, -12, -4, 0, \dots \right\} \\
 y[n] &= \left\{ \dots, 0, -7, \underbrace{0}_0, -7, -10, 2, 0, \dots \right\} \blacksquare
 \end{aligned}$$

En general las respuestas  $h_k[n]$  no estarán relacionadas entre sí para distintos valores de  $k$ , sin embargo, para el caso particular de que el sistema sea invariante en el tiempo obtendremos

$$h_k[n] = h_0[n - k]$$

ya que la respuesta de un sistema invariante en el tiempo cuando se desplaza la entrada es un desplazamiento en la salida. Siendo  $\delta[n - k]$  una versión desplazada de  $\delta[n]$ , la respuesta  $h_k[n]$  también será una versión desplazada en el tiempo de  $h_0[n]$ . En este caso se habla de *respuesta al impulso unitario* y se define sin subíndice:  $h[n] = h_0[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

A la función  $h[n]$  también se la denomina *respuesta impulsiva*, mientras que a la expresión anterior se la conoce como *sumatorio o suma de convolución (o producto de convolución)* y se representa como

$$x[n] * h[n] = (x * h)[n]$$

Esta ecuación expresa la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de su respuesta al impulso unitario.

Las respuestas del sistema están completamente caracterizadas por su respuesta impulsiva. La respuesta debida a  $x[k]$  en el tiempo  $k$  es  $x[k]h[n - k]$  que es una versión escalada y desplazada de  $h[n]$ . La salida real es la superposición de todas estas respuestas, es decir, para un tiempo fijo  $n$ ,  $y[n]$  es la suma para todos los valores de  $k$  de  $x[k]h[n - k]$ .

En general el producto de convolución se puede definir para cualquier par de señales:

**Definición 3.2** Dadas dos señales en tiempo discreto:  $x[n]$  y  $h[n]$ , se define el producto de convolución de  $x[n]$  y  $h[n]$  y se escribe

$$(x * h)[n] = x[n] * h[n]$$

a la señal  $y[n]$  definida

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

siempre que la serie sea sumable.

**Ejemplo 3.3** Calcula el producto de convolución de  $x[n] = \alpha^n u[n]$  con  $\alpha \in (0, 1)$  y  $h[n] = u[n]$

**Solución:** Aplicando la definición

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] u[n-k]$$

y teniendo en cuenta la definición de escalón unitario ( $u[n] = 0$ , para  $n < 0$ )

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u[n-k]$$

Para  $n < 0 \Rightarrow n - k < 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \Rightarrow u[n-k] = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \Rightarrow y[n] = 0$  (es suma de ceros)

Y para  $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u[n-k] = \sum_{k=0}^n \alpha^k u[n-k] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k u[n-k]$$

En el primer sumatorio ocurre que  $k \leq n$ ; luego  $n - k \geq 0$  y por tanto  $u[n-k] = 1$ . En el segundo sumatorio ocurre lo contrario, puesto que para cualquier  $k$  en el sumatorio,  $k > n$ , entonces  $n - k < 0$  y por tanto  $u[n-k] = 0$ . La suma queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u[n-k] = \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

que es la suma  $n$ -ésima de una progresión geométrica de razón  $\alpha$ . El valor de  $y[n]$  estará dado por

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Podemos dar una expresión general más compacta para cualquier valor de  $n$

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$

**Ejemplo 3.4** 1. Calcula la respuesta de un sistema LTI para la entrada

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y cuya respuesta impulsiva es:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

**Solución:** Como el sistema es LTI y conocemos su respuesta impulsiva  $h[n]$  (figura 3.7), la respuesta ante la entrada  $x[n]$  (figura 3.8) es

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

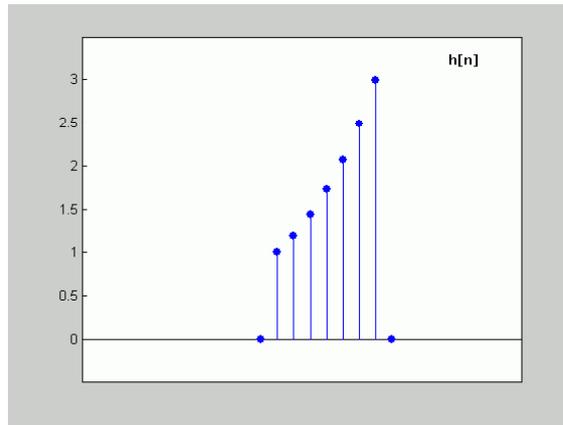


Figura 3.7: Respuesta impulsiva,  $h[n]$ .

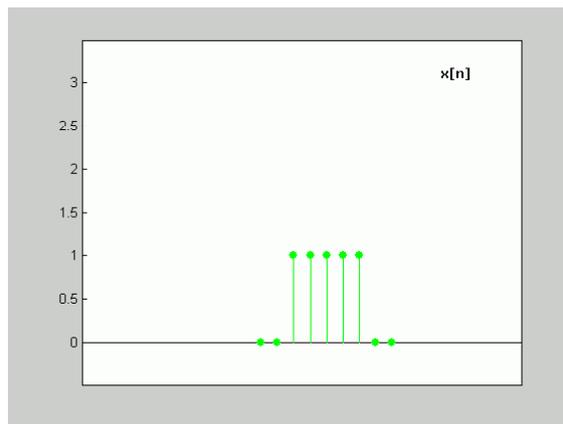


Figura 3.8: Señal de entrada,  $x[n]$ .

Obviamente de la definición de  $x[n]$  solamente los términos de  $k$  entre 0 y 4, podrán influir el sumatorio, luego este sumatorio se transforma en:

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^4 h[n-k] = \sum_{k=n-4}^n h[k]$$

Para el cálculo de la señal  $y[n]$  es conveniente considerar diferentes intervalos según el valor de  $n$ , estos intervalos están representados en la figura 3.9.

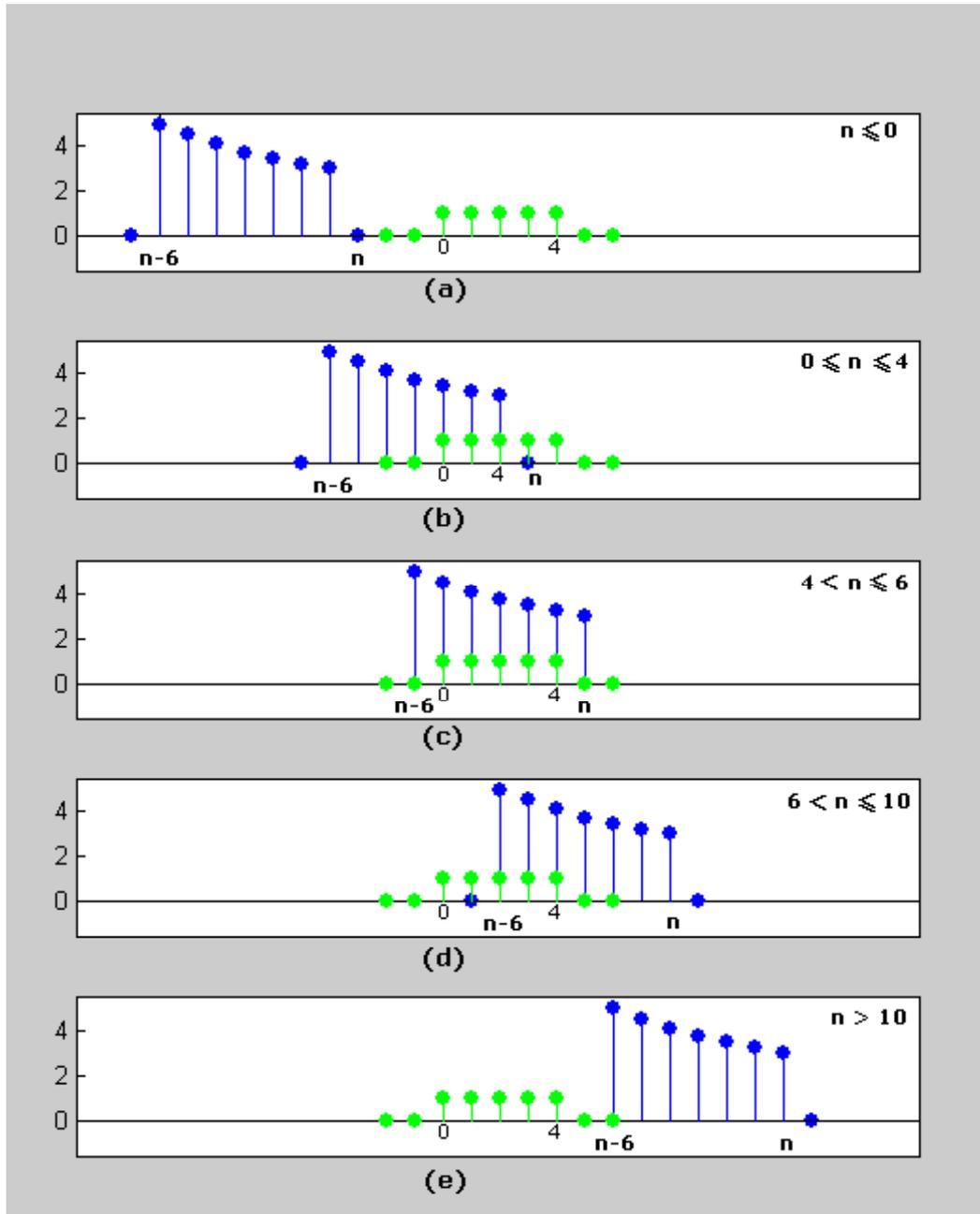


Figura 3.9: Interpretación gráfica de la convolución.

1.  $n < 0$  (figura 3.9a). En este caso  $k$  es siempre negativa y todos los sumandos del sumatorio son 0, de ahí que:

$$y[n] = 0 \quad n < 0$$

2.  $0 \leq n \leq 4$  (figura 3.9b). Aquí  $-4 \leq n - 4 \leq 0$  y el límite inferior del sumatorio será cero; puesto que más hacia la izquierda  $h[k]$  vale 0, mientras que el límite superior será  $n$ , puesto que

$n \leq 4 \leq 6$ , y en ese rango  $h[k]$  no es 0.

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

3.  $4 \leq n \leq 6$  (figura 3.9c). En este caso  $0 \leq n - 4 \leq 2$ , y como  $n - 4 \geq 0 \Rightarrow h[n - 4] \neq 0$  y el límite inferior del sumatorio será  $n - 4$ . El límite superior es de nuevo  $n$ , puesto que  $n \leq 6$  y  $h[n]$  será distinta de 0.

$$y[n] = \sum_{k=n-4}^n h[k] = \sum_{k=n-4}^n \alpha^k = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

4.  $n \geq 6 \Rightarrow n - 4 \geq 2$ . Distinguiremos dos casos en función de  $h[n]$

(a)  $n - 4 \leq 6 \Rightarrow n \leq 10$  (figura 3.9d), en este caso obtenemos  $6 \leq n \leq 10 \Leftrightarrow 2 \leq n - 4 \leq 6$ . El límite inferior será  $n - 4$ , mientras que el superior es 6:

$$y[n] = \sum_{k=n-4}^6 h[k] = \sum_{k=n-4}^6 \alpha^k = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

(b)  $n - 4 > 6 \Rightarrow n > 10$  (figura 3.9e). Por último, en este caso el límite inferior ya supera el máximo entero permitido para que  $h[n]$  sea distinta de 0, luego se anulan todos los términos en el sumatorio.

$$y[n] = 0$$

En resumen obtenemos la siguiente expresión para la respuesta  $y[n]$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 4 \leq n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha} & 6 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

**Proposición 3.5 (Propiedades del producto de convolución)** El producto de convolución de 2 señales en tiempo discreto  $x[n]$  y  $h[n]$  tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad Conmutativa: El producto de convolución es conmutativo

$$(x * h)[n] = (h * x)[n]$$

2. Propiedad Asociativa: El producto de convolución es asociativo

$$(x * (h_1 * h_2))[n] = ((x * h_1) * h_2)[n]$$

3. Propiedad Distributiva: *El producto de convolución tiene la propiedad distributiva respecto a la suma, lo que significa que:*

$$(x * (h_1 + h_2)) [n] = (x * h_1) [n] + (x * h_2) [n]$$

**Demostración:** Se demuestran a continuación cada uno de los apartados.

1. *Propiedad Conmutativa:*

$$(x * h) [n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = [\text{hacemos cambio } k = n-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[n-j] h[j]$$

y cambiando los límites del sumatorio obtenemos

$$(h * x) [n]$$

2. *Propiedad Asociativa*

$$(x * (h_1 * h_2)) [n] = (x * h) [n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (3.3)$$

donde  $h[n] = (h_1 * h_2) [n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1[j] h_2[n-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_2[j] h_1[n-j]$  y substituyendo en 3.3

$$(x * (h_1 * h_2)) [n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_2[j] h_1[k-j]$$

Si ahora reagrupamos términos de forma adecuada

$$(x * (h_1 * h_2)) [n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_2[j] \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h_1[k-j] \right)$$

haciendo el cambio de  $j = n - m$ , con  $m$  como nuevo contador

$$(x * (h_1 * h_2)) [n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2[n-m] \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h_1[k-(n-m)] \right)$$

y haciendo el cambio  $n - k = r$

$$(x * (h_1 * h_2)) [n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2[n-m] \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] h_1[m-r] \right)$$

la expresión entre paréntesis es el producto de convolución

$$(x * h_1) [m] = z [m]$$

por tanto

$$\begin{aligned} (x * (h_1 * h_2)) [n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2[n-m] \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] h_1[m-r] \right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2[n-m] z [m] = (z * h_2) [n] = ((x * h_1) * h_2) [n] \end{aligned}$$

3. *Propiedad Distributiva:*

$$\begin{aligned}
 (x * (h_1 + h_2)) [n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] (h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k] + x[k] h_2[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_2[n-k] \\
 &= (x * h_1) [n] + (x * h_2) [n]
 \end{aligned}$$

Las propiedades asociativa y conmutativa del producto de convolución permiten cambiar el orden de los sistemas en una conexión en serie de sistemas LTI, operación que en general no puede realizarse para sistemas que no sean de este tipo. Por ejemplo, dados los sistemas

$$\begin{aligned}
 y_1 [n] &= x [n]^2 \\
 y_2 [n] &= 2x [n]
 \end{aligned}$$

aunque el segundo sistema es LTI, el intercambio de orden en una conexión en serie de estos sistemas da resultados diferentes

$$\begin{aligned}
 S_1 \rightarrow S_2 &\Rightarrow y [n] = 2x [n]^2 \\
 S_2 \rightarrow S_1 &\Rightarrow y [n] = (2x [n])^2 = 4x [n]^2
 \end{aligned}$$

Se ha comprobado en esta sección que un sistema lineal está caracterizado por sus respuestas a los impulsos desplazados  $\delta [n-k]$ . Un sistema no lineal puede responder de la misma forma al impulso desplazado que un sistema lineal, sin embargo, no podremos caracterizar todas sus respuestas a partir de esta información. Veamos esta diferencia con un ejemplo.

**Ejemplo 3.6** *Sea la respuesta impulsiva*

$$h [n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

*Si el sistema, cuya respuesta al impulso unitario es  $h [n]$ , es lineal e invariante en el tiempo, entonces para cualquier otra entrada  $x [n]$ , se podrá calcular fácilmente su respuesta utilizando para ello el producto de convolución:*

$$y [n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x [k] h [n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x [n-k] h [k] = h [0] x [n] + h [1] x [n-1] = x [n] + x [n-1]$$

*El sistema estará perfectamente caracterizado. Sin embargo, los sistemas*

$$\begin{aligned}
 y_1 [n] &= (x [n] + x [n-1])^2 \\
 y_2 [n] &= \max \{x [n], x [n-1]\}
 \end{aligned}$$

*tienen la misma respuesta para la entrada  $\delta [n]$  y obviamente son sistemas no lineales y no es posible caracterizar las respuestas para otra entrada arbitraria.*

Finalmente podemos resumir que si conocemos la respuesta impulsiva  $h[n]$  de un sistema LTI, entonces:

1. Si el sistema es LTI, estará completamente caracterizado.
2. Si no tenemos información adicional sobre el sistema no podremos determinar si este es o no un sistema LTI.
3. En sistemas no lineales no podemos en general intercambiar elementos en la composición de varios.

### 3.3.2 Sistemas LTI en tiempo continuo

Se obtiene una caracterización similar para sistemas LTI en tiempo continuo. Recordaremos en primer lugar que una señal en tiempo continuo  $x(t)$  puede expresarse en términos del impulso unitario continuo mediante la integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t-s) ds$$

Si ahora recordamos la definición de la función  $x_{\Delta}(t)$  dada en 3.1

$$x_{\Delta}(t) = x(k\Delta) \quad \forall t \in [k\Delta, (k+1)\Delta[$$

y recordamos también que

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta$$

la respuesta de un sistema lineal para el sumatorio sería

$$y_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta$$

donde  $h_{k\Delta}(t)$  sería la respuesta del sistema para la entrada  $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ .

Si  $\Delta \rightarrow 0$  y bajo determinadas condiciones de convergencia que estamos suponiendo que se cumplen, ocurre

$$x_{\Delta}(t) \xrightarrow{S} y_{\Delta}(t) \implies x(t) \xrightarrow{S} y(t)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} y_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta = y(t)$$

También si  $\Delta \rightarrow 0$  el sumatorio se transforma en una integral y obtenemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h_s(t) ds$$

donde  $h_s(t)$  será la respuesta del sistema al impulso  $\delta(t-s)$ .

La interpretación es similar al caso discreto. Una señal continua puede expresarse como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t-s) ds$$

Esta integral puede considerarse como una “suma” de impulsos ponderados y desplazados, donde el peso en el impulso  $\delta(t-s)$  es  $x(s)$ . La respuesta para esta entrada en un sistema LTI continuo, utilizando la propiedad de superposición, será la “suma” ponderada de las respuestas  $h_s(t)$  al impulso desplazado  $\delta(t-s)$ , ponderadas también por  $x(s)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h_s(t) ds$$

Si además el sistema es invariante en el tiempo (LTI), entonces las respuesta  $h_s(t)$  están relacionadas entre sí

$$h_s(t) = h_0(t-s) = h(t-s)$$

siendo  $h(t)$  la *respuesta impulsiva o al impulso unidad* continuo  $\delta(t)$ . La respuesta es entonces la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds = (x * h)(t)$$

que se denomina *integral de convolución o producto de convolución* de  $x(t)$  y  $h(t)$  y como en el caso de tiempo discreto, puede definirse para cualquier par de señales.

**Definición 3.7** *Dadas dos señales en tiempo continuo,  $x(t)$  y  $h(t)$ . Definimos el producto de convolución de  $x(t)$  y  $h(t)$  y lo denotamos como*

$$(x * h)(t) = x(t) * h(t)$$

a la señal  $y(t)$  dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds$$

siempre que esta integral exista.

**Proposición 3.8 (Propiedades de la integral de convolución)** *El producto de convolución de dos señales en tiempo continuo  $x(t)$  y  $h(t)$  tiene las siguientes propiedades:*

1. Propiedad Conmutativa: *El producto de convolución es conmutativo*

$$(x * h)(t) = (h * x)(t)$$

2. Propiedad Asociativa: *El producto de convolución es asociativo*

$$(x * (h_1 * h_2))(t) = ((x * h_1) * h_2)(t)$$

3. Propiedad Distributiva: *El producto de convolución tiene la propiedad distributiva respecto a la suma, lo que significa que:*

$$(x * (h_1 + h_2))(t) = (x * h_1)(t) + (x * h_2)(t)$$

**Demostración:** La demostración de cada propiedad se hace utilizando la definición de integral de convolución.

1. *Propiedad Conmutativa:* Se demuestra fácilmente mediante el cambio de variable  $t - s = r$

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds = \int_{\infty}^{-\infty} x(t-r) h(r) (-dr) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-r) h(r) dr = (h * x)(t)$$

2. *Propiedad Asociativa:* En este caso habría que garantizar el intercambio de integración.

$$\begin{aligned} ((x * h_1) * h_2)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x * h_1)(s) h_2(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(r) h_1(s-r) dr \right) h_2(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(r) h_1(s-r) h_2(t-s) dr ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(r) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_1(s-r) h_2(t-s) ds \right) dr \end{aligned}$$

haciendo el cambio  $t - s = u$ , en la segunda integral

$$s = t - u$$

$$\begin{aligned} ((x * h_1) * h_2)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(r) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-u-r) h_2(u) du \right) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(r) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_1((t-r)-u) h_2(u) du \right) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(r) (h_2 * h_1)(t-r) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(r) (h_1 * h_2)(t-r) dr \\ &= x * (h_1 * h_2)(t) \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad conmutativa del producto de convolución y se ha supuesto que las funciones cumple las condiciones del teorema de Fubini de intercambio de integrales.

3. *Propiedad Distributiva respecto de la suma:*

$$x * (h_1 + h_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) (h_1 + h_2)(t-s) ds =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} x(s) (h_1(t-s) + h_2(t-s)) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h_1(t-s) + x(s) h_2(t-s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h_1(t-s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h_2(t-s) ds \\
&= (x * h_1)(t) + (x * h_2)(t)
\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9** *Calcula el producto de convolución de las siguientes señales*

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \alpha > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

**Solución:** A partir de la definición de producto de convolución de dos señales

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) u(t-s) ds$$

que por la definición de  $u(t)$  se reduce a

$$y(t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} u(t-s) ds =$$

Haciendo el cambio de variable  $t-s=r$  la integral queda:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-r)} u(r) dr$$

Para  $t < 0$ , vemos que el intervalo de integración es siempre negativo y en ese caso el escalón unitario  $u(r)$  es 0 y también el valor de  $y(t)$

$$y(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Para  $t \geq 0$ , solamente cuando  $r$  sea  $> 0$ , habrá contribuciones no nulas a la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(t-r)} u(r) dr + \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} u(r) dr = \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} u(r) dr = \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} dr$$

Integrando obtenemos el valor de  $y(t)$  para  $t > 0$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-r)} \Big|_{r=0}^{r=t} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad \forall t > 0$$

y la solución completa la podemos escribir de forma compacta como

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

**Ejemplo 3.10** *Calcula la respuesta de un sistema LTI para la entrada*

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

si su respuesta impulsiva es:

$$h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

con  $T \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Utilizando la definición de integral de convolución y teniendo en cuenta que el valor de  $x(t)$  fuera del intervalo  $[0, T]$  es 0

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds = \int_0^T h(t-s) ds$$

El cálculo para  $t < 0$  es muy sencillo puesto que  $s \in [0, T] \Rightarrow s \geq 0$ , de ahí  $-s \leq 0$  y la diferencia  $t-s$  es negativa en todo el intervalo de integración y utilizando su definición obtenemos  $h(t) = 0$  y la respuesta es

$$y(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Para  $t \geq 0$ , es necesario distinguir diferentes casos en función del valor de  $t$ .

1. Si  $0 < t \leq T$

$$y(t) = \int_0^T h(t-s) ds = \int_0^t h(t-s) ds + \int_t^T h(t-s) ds$$

En la primera integral ocurre  $s < t$  y por tanto  $t-s > 0 \Rightarrow h(t-s) = t-s$ . En la segunda integral ocurre lo contrario  $s > t$  y por tanto  $t-s < 0 \Rightarrow h(t-s) = 0$ . La integral queda:

$$y(t) = \int_0^t h(t-s) ds = \int_0^t (t-s) ds = -\frac{(t-s)^2}{2} \Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{t^2}{2}$$

2. Si  $t > T \Rightarrow t-T > 0$ , podemos distinguir 3 casos

(a) Si  $t-2T < 0$

En este caso y como  $s \in [0, T] \Rightarrow 0 < s < T \Rightarrow 0 > -s > -T$ , y sumando  $t$  a la desigualdad obtenemos

$$t > t-s > t-T > 0$$

y por tanto la integral incluye todo el intervalo  $[0, T]$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^T h(t-s) ds = \int_0^T (t-s) ds = -\frac{(t-s)^2}{2} \Big|_{s=0}^{s=T} = \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} = \frac{2tT - T^2}{2} \end{aligned}$$

(b) Si  $t - 2T > 0$ . En este caso hay que distinguir dos nuevos casos:

i. Si  $t - 2T \leq T$

En este caso separamos la integral en 2 partes

$$y(t) = \int_0^{t-2T} h(t-s) ds + \int_{t-2T}^T h(t-s) ds$$

Para la primera integral ocurre

$$0 \leq s \leq t - 2T \Rightarrow t - s \geq 2T \Rightarrow h(t-s) = 0$$

ya que estamos fuera del intervalo  $[0, 2T]$ , que es donde  $h(t)$  es distinta de 0.

Para la segunda integral ocurre lo contrario

Es decir

$$t - 2T \leq s \leq T \Rightarrow t - 2T < s \Rightarrow t - s \leq 2T$$

y además

$$t > 2T \Rightarrow t - s > 2T - s \geq 2T - T = T > 0$$

luego

$$0 < t - s \leq 2T$$

y en ese caso

$$h(t-s) = t-s$$

luego la integral queda:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t-2T} h(t-s) ds + \int_{t-2T}^T h(t-s) ds = \\ &= 0 + \int_{t-2T}^T h(t-s) ds \\ &= \int_{t-2T}^T (t-s) ds \\ &= -\frac{(t-s)^2}{2} \Big|_{s=t-2T}^{s=T} \\ &= \frac{(t-(t-2T))^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} \\ &= \frac{4T^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} \\ &= \frac{3T^2 + 2tT - t^2}{2} \end{aligned}$$

ii. Si  $t - 2T > T$

En este caso en la integral

$$y(t) = \int_0^T h(t-s) ds$$

ocurre

$$0 \leq s \leq T \Rightarrow 0 \geq -s \geq -T \Rightarrow -s > -T$$

Utilizando las hipótesis obtenemos

$$t - 2T > T \Rightarrow t > 3T$$

Sumando ambas desigualdades

$$t - s > 3T - T = 2T$$

y de ahí

$$h(t-s) = 0$$

Obteniendo un valor nulo para la respuesta,  $y(t)$ , en este caso

$$y(t) = 0$$

Se resumen los resultados a continuación

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 \leq t < T \\ \frac{2tT - T^2}{2} & T \leq t < 2T \\ \frac{3T^2 + 2tT - t^2}{2} & 2T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases}$$

Notar que la función es continua.

## 3.4 Propiedades de los sistemas LTI

En esta sección se estudia el significado particular que las propiedades de los sistemas tienen para sistemas lineales invariantes en el tiempo, tanto para sistemas en tiempo discreto como sistemas en tiempo continuo.

### 3.4.1 Memoria

Un sistema era sin memoria (en tiempo continuo o discreto) si y sólo si la respuesta del sistema en un instante dado solamente dependía de la entrada en ese instante. En el caso de un sistema lineal la

respuesta viene dada mediante el producto de convolución de la entrada y la respuesta impulsiva, por ejemplo para el caso en tiempo discreto tenemos

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Si el sistema no tiene memoria,  $y[n]$  solamente puede depender de  $x[n]$  y debe ser de la forma

$$y[n] = x[n] h[0]$$

Como la entrada,  $x[n]$ , es arbitraria se debe cumplir

$$h[n] = 0 \quad \forall n \neq 0$$

y la respuesta impulsiva debe ser de la forma

$$h[n] = K\delta[n]$$

con  $K$  constante.

Por tanto un sistema LTI será sin memoria si es de la forma

$$y[n] = Kx[n]$$

Si por el contrario  $h[n] \neq 0$  para algún  $n \neq 0$ , entonces el sistema tiene memoria. Por ejemplo, para el sistema con memoria

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

sucede

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

que es distinta de 0 para los instantes  $n = 0$  y  $n = 1$ .

Para sistemas en tiempo continuo el análisis es similar y el sistema no tendrá memoria si  $h(t) = 0$ ,  $\forall t \neq 0$ ; en este caso

$$y(t) = Kx(t)$$

cuya respuesta impulsiva es

$$h(t) = K\delta(t)$$

### 3.4.2 Invertibilidad

Recordemos ahora que un sistema es invertible si podemos construir otro sistema (el sistema inverso) que conectado en serie al sistema inicial produce la identidad. Es fácil demostrar que el sistema inverso de un sistema LTI debe ser también un sistema LTI. Puesto que si el sistema inicial,  $S$ , cumple

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t)$$

Su sistema inverso,  $S^{-1}$ , debe cumplir

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) \xrightarrow{S^{-1}} x_1(t)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t) \xrightarrow{S^{-1}} x_2(t)$$

Como  $S$  es lineal, cumple la propiedad de superposición, por tanto

$$\alpha x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{S} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

como el sistema  $S^{-1}$  aplicada a la respuesta de  $S$ , debe devolver la señal original

$$\alpha x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{S} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \xrightarrow{S^{-1}} \alpha x_1(t) + x_2(t)$$

luego está claro que  $S^{-1}$  es lineal ya que

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \xrightarrow{S^{-1}} \alpha x_1(t) + x_2(t)$$

que es la combinación lineal de las respuestas individuales de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ .

La invariancia en el tiempo se demuestra de la misma forma, si  $y(t)$  es la respuesta de  $S$  para la entrada  $x(t)$ , entonces debe ocurrir

$$y(t) \xrightarrow{S^{-1}} x(t)$$

si desplazamos la respuesta obtenemos

$$x(t - t_0)$$

Si ahora desplazamos la entrada

$$z(t) = y(t - t_0)$$

la respuesta tiene que coincidir con la anterior. Como  $y(t - t_0)$  es el desplazamiento de la respuesta de un sistema LTI para una entrada  $x(t)$ , el sistema  $S$  debe responder de la misma forma cuando desplazamos su entrada

$$x(t - t_0) \xrightarrow{S} y(t - t_0)$$

y por tanto al acoplar en serie con el inverso debemos obtener la identidad

$$x(t - t_0) \xrightarrow{S} y(t - t_0) \xrightarrow{S^{-1}} x(t - t_0)$$

que es lo que tratábamos de demostrar, puesto que para la entrada  $y(t - t_0)$ , el sistema ha respondido con un desplazamiento en la salida  $x(t)$ .

De esta forma, para conocer el sistema inverso de un sistema LTI será suficiente con conocer su respuesta impulsiva. Sea un sistema LTI en tiempo continuo, cuya respuesta impulsiva sea  $h(t)$ , es decir

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Buscamos un sistema LTI cuya respuesta impulsiva  $\tilde{h}(t)$  tenga la propiedad

$$x(t) = y(t) * \tilde{h}(t)$$

pero teniendo en cuenta la definición de  $y(t)$  y la propiedad asociativa del producto de convolución

$$x(t) = y(t) * \tilde{h}(t) = x(t) * h(t) * \tilde{h}(t) = x(t) * (h(t) * \tilde{h}(t))$$

y deberá cumplirse

$$h(t) * \tilde{h}(t) = \delta(t)$$

Por ejemplo, si consideramos el sistema LTI dado por un desplazamiento temporal

$$y(t) = x(t - t_0)$$

y tomamos como entrada  $\delta(t)$ , obtenemos

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

El sistema inverso se obtiene fácilmente desplazando la salida en el otro sentido

$$\tilde{h}(t) = \delta(t + t_0)$$

de esta forma

$$h(t) * \tilde{h}(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

Para el caso de un sistema en tiempo discreto el resultado es completamente análogo. Por ejemplo, dado el sistema LTI cuya respuesta impulsiva es

$$h[n] = u[n]$$

Se puede comprobar fácilmente que este sistema es un acumulador y la respuesta,  $y[n]$ , para una entrada arbitraria,  $x[n]$ , se obtiene mediante la convolución como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n-k]$$

como  $u[n]$  es el escalón unitario

$$u[n-k] = 0 \Leftrightarrow n-k < 0$$

y por tanto la suma debe extenderse solamente a términos,  $k$ , más pequeños que  $n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Para encontrar su inverso podemos comprobar que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \Rightarrow y[n] = y[n-1] + x[n]$$

y podemos despejar  $x[n]$  en términos de la señal  $y[n]$

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

el sistema inverso será por tanto

$$\tilde{y}[n] = x[n] - x[n-1]$$

y su respuesta impulsiva

$$\tilde{h}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

### 3.4.3 Causalidad

Un sistema era causal si la respuesta en un instante no dependía de las entradas en instantes de tiempo futuros. Se caracteriza a continuación esta propiedad para sistemas LTI utilizando el producto de convolución.

Supongamos, por ejemplo, que el sistema es en tiempo discreto, en este caso, al ser un sistema LTI, la respuesta para cualquier entrada podrá obtenerse por convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Si esta respuesta no puede depender de instantes posteriores a  $n$ , está claro que  $h[n-k]$  debe ser 0 cuando  $k > n$ , es decir,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k]$$

y tomando  $n = 0$  obtenemos

$$h[-k] = 0 \quad \forall k > 0$$

la respuesta impulsiva de un sistema LTI causal debe cumplir entonces

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

Análogamente para el caso de un sistema en tiempo continuo se obtiene la caracterización correspondiente

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

### 3.4.4 Estabilidad

La estabilidad de un sistema se daba cuando las respuestas a entradas acotadas también eran acotadas. Supongamos ahora que estamos analizando la estabilidad de un sistema LTI. De nuevo emplearemos la caracterización de este tipo de sistemas mediante la utilización del producto de convolución.

Si suponemos que el sistema es en tiempo discreto y tomamos  $x[n]$  como la entrada al sistema entonces

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

siendo  $h[n]$  la respuesta impulsiva  $h[n]$  del sistema.

Si tomamos una entrada acotada, es decir si

$$\exists M > 0 : |x[n]| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

entonces

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right|$$

utilizando la desigualdad triangular y el hecho de que  $x[n]$  está acotada tendremos

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| |h[n-k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} M |h[n-k]| = M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Por tanto si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq R$$

es una cantidad finita, es decir, la sucesión  $h[n]$  es absolutamente sumable, entonces podremos poner

$$|y[n]| \leq MR$$

y la respuesta  $y[n]$  estará acotada, luego el sistema es estable.

Comprobaremos a continuación que el recíproco también es cierto, es decir si el sistema es estable, entonces  $h[n]$  es absolutamente sumable. Supongamos en caso contrario que el  $h[n]$  no es absolutamente sumable, es decir, la suma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \rightarrow \infty$$

es no acotada.

Si ahora tomamos como señal de entrada la definida por

$$x[n] = \text{signo}(h[-n]) = \begin{cases} -1 & n < 0 \\ 0 & n = 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

que tiene por valores 1, 0 y  $-1$ , está acotada y tiene por respuesta

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{signo}(h[-k]) h[n-k]$$

que para  $n = 0$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{signo}(h[-k]) h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]|$$

que es no acotada.

Para el caso de un sistema en tiempo continuo el resultado teórico alcanzado está dado por la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(s)| ds < \infty$$

Por ejemplo, un sistema que desplace la señal (desplazamiento temporal) es estable

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta(k - n_0)| = 1$$

Por el contrario el acumulador es inestable, por ejemplo, podemos tomar como entrada un señal constante, que está acotada, pero la salida crece indefinidamente, además para este caso  $h[n] = u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

### 3.5 Respuesta de un sistema LTI al escalón unitario

Además de por la respuesta impulsiva de un sistema LTI, es posible intentar caracterizar a estos sistemas por sus respuestas a otras señales. Una de estas señales es el escalón unitario  $u(t)$  o  $u[n]$  en tiempo continuo y tiempo discreto respectivamente. La respuesta de un sistema LTI en tiempo

continuo o discreto a un escalón unitario se llama *respuesta al escalón unitario* y se suele representar por  $s(t)$  o  $s[n]$ , respectivamente.

Podemos relacionar fácilmente esta respuesta con la respuesta impulsiva gracias a las propiedades de los sistemas LTI. La respuesta de un sistema LTI a el escalón unitario vendrá dado por el producto de convolución de la entrada, que es el escalón unitario, y la respuesta impulsiva  $h(t)$  (o  $h[n]$  respectivamente). Podemos escribir

$$s(t) = u(t) * h(t)$$

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

Sin embargo, por la propiedad conmutativa del producto de convolución, sabemos que

$$s(t) = h(t) * u(t)$$

$$s[n] = h[n] * u[n]$$

y podemos considerar que la respuesta al escalón unitario es la respuesta a la entrada  $h(t)$  o  $h[n]$  de un sistema LTI cuya respuesta impulsiva es el escalón unitario, es decir un acumulador tal y como se comprobó en la sección anterior. Entonces

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

de donde podemos obtener los valores de  $h(t)$  y  $h[n]$  si conocemos  $s(t)$  y  $s[n]$  respectivamente

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

A través de estas dos relaciones, es posible caracterizar y modelar un sistema LTI mediante su respuesta al escalón unitario, ya que a partir de esta respuesta podemos obtener la respuesta impulsiva del sistema.

## 3.6 EDO's y sistemas lineales en tiempo continuo

### 3.6.1 Introducción

Utilizaremos en esta sección la siguiente notación:

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) : \text{Vector de entradas}$$

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : \text{Vector de estado del sistema}$$

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) : \text{Vector de salida}$$

Generalmente la mayoría de los sistemas mecánicos, eléctricos, físicos, etc., proporcionan la respuesta ante una entrada determinada en términos de ecuaciones diferenciales. Esta representación se

puede hacer de dos formas diferentes. Una de ellas es relacionar directamente la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  mediante una ecuación diferencial de la forma:

$$g\left(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t), u^{(m-1)}(t), \dots, u'(t), u(t)\right) = 0 \quad (3.4)$$

donde

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y}{dt^k}(t)$$

siendo  $g$  una función vectorial arbitraria. En este caso se ha definido  $y(t)$  implícitamente en términos de  $u(t)$  a través de la ecuación diferencial 3.4.

La otra forma es escribir la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando variables internas  $x_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . En este caso el comportamiento del sistema se representa mediante un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned}$$

y se obtiene su respuesta mediante un sistema de ecuaciones como

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ y_2(t) &= h_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned}$$

donde las funciones  $f_k$  y  $h_j$  para  $k = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, p$ , respectivamente, son funciones arbitrarias con determinadas propiedades de continuidad y derivabilidad que garanticen la solución de los sistemas. En notación vectorial las ecuaciones anteriores se expresan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

### Ejemplo 3.11 (Sistema Ecológico)

Supongamos que se quiere estudiar un sistema ecológico ideal compuesto por dos especies de animales. Se plantea el problema en el caso de que ambas especies compitan por la misma comida (caso 1) y en el caso en el que una de las especies sea depredador de la otra (caso 2). En el caso general estamos interesados en medir la variación del número de individuos en cada especie. Si definimos  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  como el número de individuos de cada especie en el instante  $t$  y asumimos que la tasa de natalidad es constante en cada especie,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, el número de nacimientos en cada instante  $t$  será

$$\lambda_i N_i(t)$$

La tasa de mortalidad de cada una de las especies,  $\mu_i$ , depende de la disponibilidad de comida así como del riesgo de ser comido. En ambos casos esta de mortalidad depende de la población de cada especie, escribiremos por tanto que

$$\mu_i = \mu_i(N_1(t), N_2(t))$$

y el número de muertes en cada instante  $t$  se obtiene como

$$\mu_i(N_1(t), N_2(t)) \cdot N_i(t)$$

La variación de individuos en cada instante  $t$  se obtiene como la diferencia entre nacimientos y muertes, pudiendo expresar esta variación con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \mu_1(N_1(t), N_2(t))) \cdot N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \mu_2(N_1(t), N_2(t))) \cdot N_2(t)$$

### 1. Caso 1: Las especies compiten por la misma comida:

Si las dos especies se alimentan de la misma comida, el número total de individuos influirá en la disponibilidad de alimento y por tanto en sus respectivas tasas de mortalidad: cuantos más individuos haya, menos disponibilidad de alimento habrá y por tanto la tasa de mortalidad aumentará. Un modelo simple para este comportamiento es considerar la tasa de mortalidad proporcional al número total y definir

$$\mu_i(N_1(t), N_2(t)) = \gamma_i + \delta_i(N_1(t) + N_2(t)); \quad \delta_i > 0 \quad i = 1, 2$$

Siendo  $\gamma_i$  la tasa de mortalidad natural.

Las ecuaciones diferenciales que dan la variación de individuos se puede expresar entonces como

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \delta_1(N_1(t) + N_2(t)) \cdot N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \delta_2(N_1(t) + N_2(t)) \cdot N_2(t)$$

### 2. Caso 2: Depredador y presa

Asumiremos ahora que la primera especie es un depredador de la segunda. De esta forma la cantidad de alimento disponible para la primera especie es proporcional a la cantidad de individuos de la segunda especie,  $N_2(t)$ , y su tasa de mortalidad decrecerá cuando  $N_2(t)$  crezca. Utilizaremos una relación simple para indicar este hecho

$$\mu_1(N_1(t), N_2(t)) = \gamma_1 - \alpha_1 N_2(t), \quad \alpha_1 > 0$$

Por otra parte la tasa de mortalidad de la segunda especie aumentará cuando el número de depredadores  $N_1(t)$  se incrementa

$$\mu_2(N_1(t), N_2(t)) = \gamma_2 + \alpha_2 N_1(t), \quad \alpha_2 > 0$$

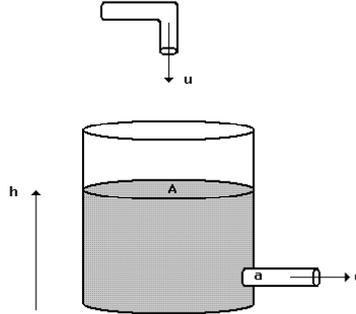
Obtenemos así el modelo

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) \cdot N_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \alpha_2 N_1(t) \cdot N_2(t)$$

**Ejemplo 3.12 Sistema de flujos**

Consideremos ahora un depósito de agua con un sistema sencillo de entrada y salida de flujo, tal y como se observa en la figura 3.10.



**Figura 3.10: Modelo de depósito de líquido.**

Donde  $A$  es la sección de superficie del depósito,  $a$  es el área del agujero de salida. El nivel de agua en el depósito está dado por  $h$ , mientras que el caudal de entrada es  $u$  y el de salida es  $q$ . El problema consiste en modelar este sistema de entrada-salida de caudal en el depósito.

Utilizando la ley de Bernouilli, que relaciona el nivel de líquido del tanque y la velocidad de flujo de salida obtenemos

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

donde  $g$  es la gravedad.

La relación entre el caudal de salida y la velocidad del flujo es

$$q(t) = av(t) \quad (3.6)$$

Por otra parte el volumen de líquido en el tanque es

$$V = Ah(t)$$

Este nivel varía según la diferencia entre el caudal de entrada y salida (suponiendo la densidad constante):

$$\frac{dV}{dt} = u(t) - q(t)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(Ah(t)) = u(t) - q(t) \quad (3.7)$$

Las ecuaciones 3.6 y 3.7 constituyen un modelo para el sistema del depósito del tipo dado en la ecuación 3.5, donde  $u(t) \equiv u(t)$ ,  $x(t) \equiv h(t)$  e  $y(t) = q(t)$ .

Es posible expresar este modelo mediante una ecuación diferencial no lineal explícita substituyendo el valor de  $q(t)$  dado en 3.6 en la ecuación 3.7

$$\frac{d}{dt}(h(t)) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t)$$

### 3.6.2 El concepto de estado y espacio de estados

En los ejemplos anteriores se podía comprobar que era necesario conocer el estado del sistema en instantes de tiempo pasado (o al menos en un instante) para obtener la respuesta del sistema en instantes futuros, es decir, no es suficiente con conocer  $\mathbf{u}(t)$  con  $t \geq t_0$ , para conocer y calcular  $\mathbf{y}(t)$  (la respuesta) para  $t \geq t_0$ , es necesario tener información sobre el sistema.

Por estado del sistema en  $t_0$  se indica a la cantidad de información necesaria para que con este conocimiento y con el conocimiento de  $\mathbf{u}(t)$  para  $t \geq t_0$ , podamos calcular  $\mathbf{y}(t)$  para  $t \geq t_0$ .

Supongamos un sistema descrito mediante las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.9)$$

Un estado en  $t_0$  para este sistema es el vector  $\mathbf{x}(t_0)$ . Este resultado se obtiene de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias:

*“Si  $f(x, u)$  se comporta bien (por ejemplo  $f(x)$  es continuamente diferenciable y  $u(t)$  es continua a trozos, entonces la ecuación diferencial con  $x(t_0)$  tiene una única solución para  $t \geq t_0$ ”*

Intuitivamente si  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$  se conocen en  $t_0$  entonces utilizando la EDO

$$\mathbf{x}(t_0 + \delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))$$

y podremos conocer  $\mathbf{x}(t)$  en  $t = (t_0 + \delta t) > t_0$ , y posteriormente calcular  $\mathbf{y}(t)$  en  $t \geq t_0$  mediante la expresión 3.9. Las variables  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  son un estado del modelo.

El modelo descrito por 3.8-3.9 es un *modelo de espacio de estados*. El vector  $\mathbf{x}(t)$  es un vector de estados y  $x_j(t)$  son las variables de estado. La dimensión de  $\mathbf{x}(t)$ ,  $n$ , es el orden del modelo.

También es posible discretizar el modelo

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

En este caso si  $\mathbf{x}(t_0)$  es el estado en  $t_0$  y si conocemos  $\mathbf{u}(t)$  para  $t \geq t_0$ , podremos calcular  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  para  $t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + n$ .

### 3.6.3 Modelos lineales

Si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  son funciones lineales en  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$ , el modelo se dice lineal. Estos modelos son de la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

donde  $\mathbf{A}(t) \in M_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(t) \in M_{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}(t) \in M_{p \times n}$  y  $\mathbf{D}(t) \in M_{p \times m}$ . El caso más sencillo se obtiene cuando estas matrices son constantes para todo instante  $t$  y el sistema es lineal e invariante en el tiempo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Para un sistema descrito mediante una ecuación diferencial ordinaria lineal en forma implícita la ecuación tiene la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.10)$$

donde las variaciones de las entradas  $x(t)$  (utilizando la notación usual  $x(t)$  en vez de  $u(t)$ ) y salidas  $y(t)$  son función del tiempo y donde además puede ocurrir que los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  sean funciones del tiempo

$$a_k = a_k(t)$$

$$b_k = b_k(t)$$

La ecuación 3.10 es una *ecuación diferencial lineal de orden  $N$* . Además, generalmente  $M \geq N$ .

**Observación 3.13** Podemos comprobar que si  $y_j(t)$  es la respuesta de un sistema descrito mediante la ecuación 3.10 a la entrada  $x_j(t)$  para  $j = 1, \dots, n$ , entonces, si tomamos  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ , podemos calcular la respuesta  $y(t)$  para la combinación lineal

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t)$$

Utilizando la ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

y substituyendo  $x(t)$  por su expresión

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t) \right)$$

y al operar

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \sum_{j=1}^n \frac{d^k}{dt^k} (\alpha_j x_j(t)) = \sum_{k=0}^M b_k \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{d^k}{dt^k} (x_j(t)) = \sum_{k=0}^M \sum_{j=1}^n \alpha_j b_k \frac{d^k}{dt^k} (x_j(t))$$

intercambiando ahora los sumatorios

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} (x_j(t)) \right\}$$

y como  $y_j(t)$  es la respuesta a  $x_j(t)$  verificarán la ecuación diferencial 3.14

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_j(t)}{dt^k} \right\}$$

que es una combinación lineal de las  $y_j(t)$  y sus derivadas.

Para el caso general, la entrada  $x(t)$  es conocida, y también sus derivadas, por lo que el miembro de la derecha de la ecuación 3.10 puede considerarse como una sola función dependiente del tiempo y podemos representar la ecuación de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \quad (3.11)$$

Esta ecuación diferencial lineal es de orden  $N$ .

Además podemos suponer que  $N \geq 1$ , ya que para  $N = 0$  la ecuación 3.10 queda

$$y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

y tendremos la respuesta  $y(t)$  en forma explícita.

En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos de sistemas descritos mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

### 3.6.4 Ejemplos

#### Circuitos eléctricos

En estos sistemas se describen las relaciones entre resistencias, condensadores, inductores, transformadores, etc. y están basadas en las relaciones entre las cantidades fundamentales:

$$\begin{aligned} \text{Voltaje} &: V(t) \text{ en voltios} \\ \text{Intensidad} &: i(t) \text{ en amperios} \end{aligned}$$

Para un inductor se cumple

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad L: \text{ inductancia (Henrios)}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V(s) ds$$

mientras que para un condensador

$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt} \quad C: \text{ capacitancia (Faradios)}$$

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

y para una resistencia lineal

$$V(t) = R \cdot i(t)$$

aunque es posible considerar resistencias no lineales.

Al conectar diversos elementos en un circuito eléctrico, las leyes fundamentales (leyes de Kirchoff) son

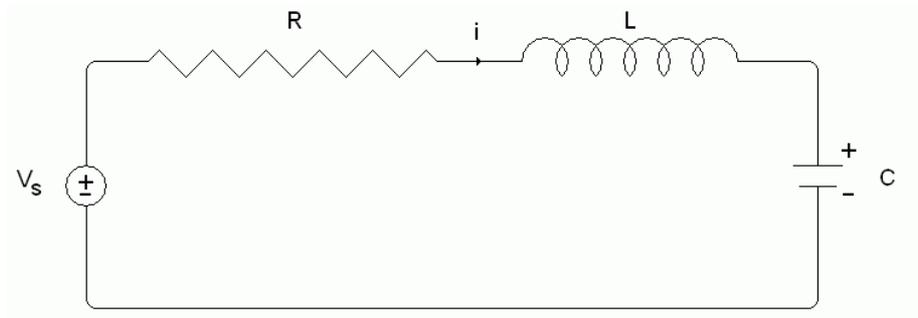
$$\sum_k i_k(t) = 0$$

para la corriente y

$$\sum_k V_k(t) = 0$$

para el voltaje.

**Ejemplo 3.14** Consideremos un circuito como el de la figura 3.11



**Figura 3.11: Circuito simple RLC.**

donde  $R$  es la resistencia en Ohmios;  $L$  la inductancia en Henrios y  $C$  la capacitancia en faradios. El voltaje en cada uno de los dispositivos del circuito viene dado por:

$$\text{Resistencia} \Rightarrow V_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$\text{Bobina} \Rightarrow V_L(t) = \frac{di(t)}{dt} L$$

$$\text{Condensador} \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Si  $V_S(t)$  es la fuente de voltaje independiente (input) utilizada para producir una corriente,  $i(t)$ , a través del circuito RLC, la ley de Kirchoff del voltaje nos dice que

$$\text{Variación Total de Voltaje} = (\text{Variación en } R) + (\text{Variación en } L) + (\text{Variación en } C)$$

que en ecuaciones se expresa como

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C}$$

donde

$$V_C(t) = \int \frac{i}{C} dt$$

Para este ejemplo, podemos considerar la corriente  $i(t)$  o el voltaje a través de los elementos como la salida.

Consideraremos ahora una aplicación de las leyes de Kirchoff de la corriente para modelar el circuito de la figura 3.12.

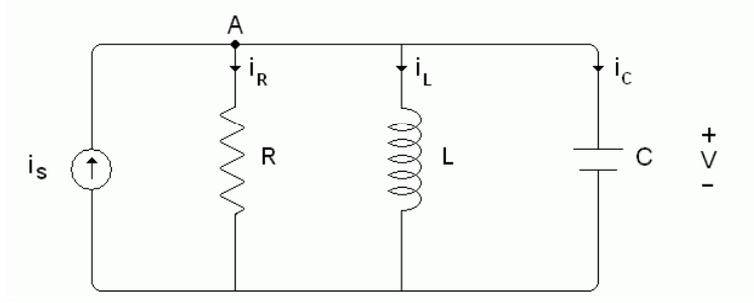


Figura 3.12: Circuito RLC.

Si aplicamos la ley en el nodo **A**:

$$i_s(t) = \frac{V(t)}{R} + \frac{1}{L} \int V(t) dt + C \frac{dV(t)}{dt}$$

Y definiendo el flujo magnético como

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = V(t)$$

la ecuación anterior se transforma en

$$i_s(t) = C \frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Psi(t)}{dt} + \frac{\Psi(t)}{L}$$

Notar que para resolver cualquiera de los sistemas eléctricos anteriores necesitamos un conjunto de condiciones iniciales.

### Dinámica

Los siguientes ejemplos de sistemas están basados en las leyes de Newton de la dinámica, que describe relaciones entre las variables

Fuerza :  $F(t)$  en newton

Velocidad :  $v(t)$  en metros por segundo

Cuando un conjunto de fuerzas actúan sobre un cuerpo en reposo, su suma debe ser cero

$$\sum_k F_k(t) = 0$$

**Ejemplo 3.15** Un cuerpo de masa  $m$ , cuyo movimiento está restringido en una dirección, acelera bajo la influencia de una fuerza  $F$ , o en otro caso permanecerá en reposo o en movimiento uniforme. Si definimos

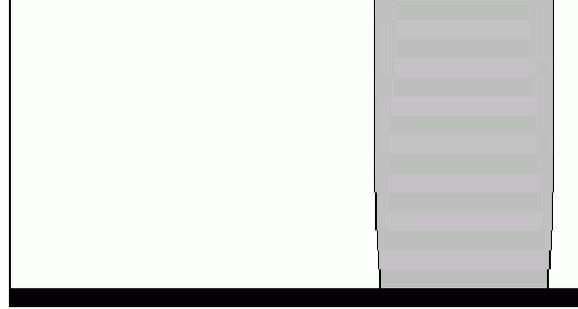
$x(t)$  : posición de la masa en tiempo  $t$  respecto al origen

La velocidad y la aceleración serán  $v(t) = \dot{x}(t)$  y  $a(t) = \ddot{x}(t)$  respectivamente. La ley de Newton implica

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}(t) = m \ddot{x}(t)$$

donde  $F$  es el conjunto de las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ .

Como aplicación tenemos  
podemos ver en la figura 3



la pared por un muelle que

**Figura 3.13: Representación del modelo de muelle simple.**

Si el sistema permanece en reposo,  $x(t) = 0$ . Mientras que si estiramos o comprimimos el muelle se cumple la ecuación

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t)$$

donde el signo “-”, indica la dirección de la fuerza contraria al movimiento y  $k$  es la constante de compresión asociada al muelle.

Este modelo está referido a un muelle ideal, en un caso más general el muelle pierde sus propiedades de recuperación cuando es estirado (muelle suave) o comprimido (muelle duro) más allá de una distancia y la ley que sigue el modelo es del tipo

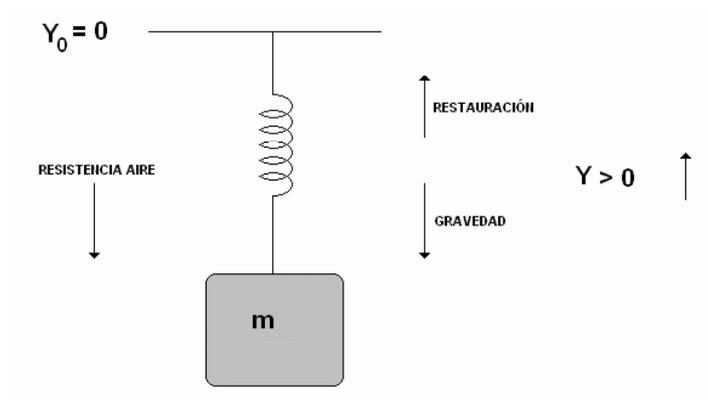
$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) \pm ax(t)^3 \quad (+ \text{ suave}, - \text{ duro})$$

Si se tiene en cuenta el rozamiento del objeto con la superficie o con el fluido sobre el que se desplaza el objeto (por ejemplo el aire), la ecuación del modelo se transforma en

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - k_1 \dot{x}(t) \quad (\text{Medio})$$

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) - k_1 \text{signo}(\dot{x}(t)) \quad \dot{x}(t) \neq 0 \quad (\text{Rozamiento})$$

Otro ejemplo relacionado con la dinámica y los modelos de muelles es el constituido por un muelle suspendido del techo que sostiene un objeto de masa  $m$  y cuyo esquema se presenta en la figura 3.14.



**Figura 3.14: Muelle en suspensión.**

Para una masa  $m \neq 0$  actúa la gravedad en sentido hacia descendente y por tanto existe una fuerza de restauración en sentido contrario

$$m \ddot{y}(t) = -ky(t) - k_1 \dot{y}(t) - mg$$

y mediante el cambio

$$r = \frac{k_1}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

la ecuación se transforma en

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) - r \dot{y}(t) - g \Rightarrow \ddot{y} + r \dot{y} + \omega^2 y = -g$$

Por último si hacemos el cambio

$$z = y + \frac{g}{\omega^2}$$

en

$$\ddot{z} + r \dot{z} + \omega^2 z = 0$$

que es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Si ahora asumimos un movimiento oscilatorio (armónico simple) en la dirección vertical tal y como se muestra en la figura 3.15

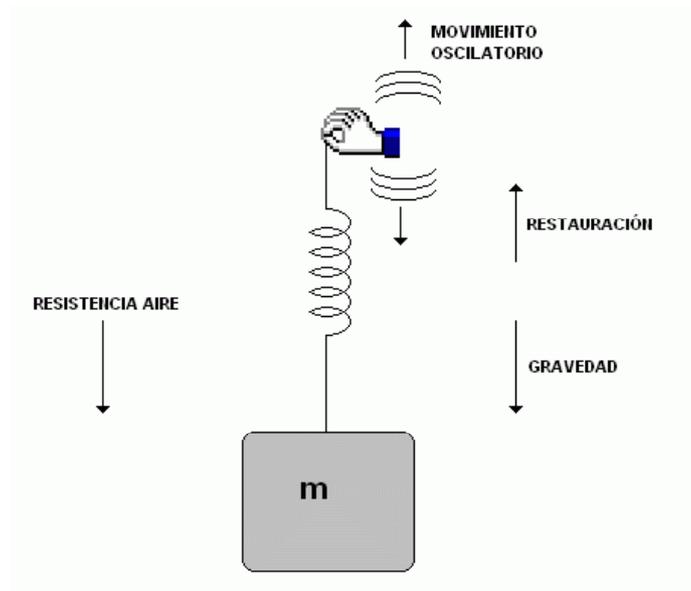


Figura 3.15: Muelle suspendido con oscilación.

entonces el modelo es del tipo

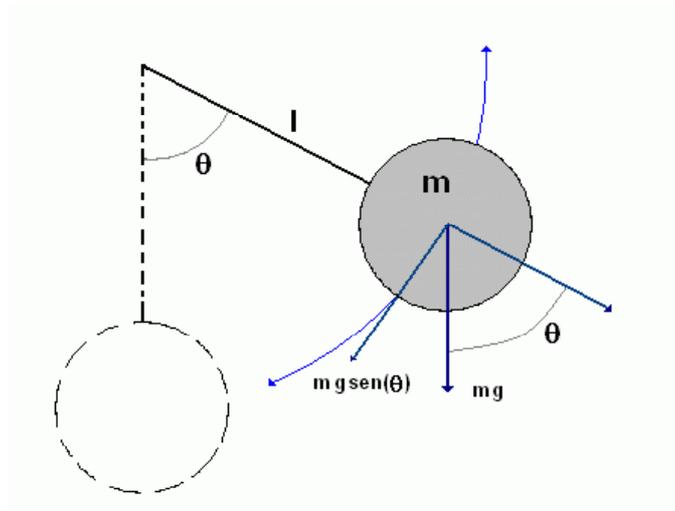
$$\ddot{z} + r \dot{z} + \omega^2 z = B \text{sen}[\omega_0 t]$$

donde

$\omega_0$  : frecuencia de oscilación

$B$  : Amplitud.

**Ejemplo 3.16** Dado el modelo de péndulo simple de la figura 3.16.



**Figura 3.16: Péndulo simple.**

si  $s$  es la longitud de arco recorrido ( $s = l \cdot \theta$ ), entonces la velocidad vendrá dada por

$$\dot{s} = l \dot{\theta}$$

y la aceleración por

$$\ddot{s} = l \ddot{\theta}$$

La fuerza de resistencia se supone proporcional a la velocidad

$$k_1 \dot{s} = k_1 l \dot{\theta}$$

y aplicando la ley de Newton

$$m \ddot{s} = -k_1 \dot{s} - mg \sin(\theta) \Rightarrow ml \ddot{\theta} = -k_1 l \dot{\theta} - mg \sin(\theta)$$

### Modelos químicos

Otro principio utilizado en la descripción de modelos mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's), establece que la tasa de variación de una sustancia dentro de un ambiente depende solamente de la tasa de materia que entra menos la que sale (*Principio de conservación de la masa*).

**Ejemplo 3.17** Consideremos, por ejemplo, un tanque de agua que es llenado con una tasa constante (Volumen/tiempo). El agua del tanque se evapora con una tasa proporcional a  $v^{2/3}$ , siendo  $v$  el volumen del tanque. Si aplicamos el principio de conservación

$$\dot{v} = k_1 - k_2 v^{2/3}$$

siendo

$k_1$  : tasa de llenado

$k_2$  : Proporcionalidad de evaporación

**Ejemplo 3.18** Una empresa vierte una sustancia contaminante a un lago con tasa constante. El efecto del agente contaminante se contrarresta mediante la acción bacteriana que descompone el producto con una velocidad proporcional a la cantidad de residuo y por la inyección de oxígeno a la misma velocidad que se descompone el agente polucionante.

Sin embargo el oxígeno ambiente (aire) entra en el lago a través de la superficie con una tasa proporcional a la diferencia entre el nivel máximo de oxígeno disuelto que el lago puede soportar y el valor actual.

Si queremos encontrar el nivel de oxígeno disuelto en el agua,  $x_2$ , en un instante  $t$ , observemos que esta tasa de cambio depende de una entrada proporcional a  $x_m - x_2$  (donde  $x_m$  es el máximo de oxígeno permitido) y una salida proporcional a la tasa del agente  $x_1$ :

$$\dot{x}_2 = -kx_1 + k_1(x_m - x_2) \quad k, k_1 > 0$$

Al mismo tiempo la variación del agente,  $x_1$ , depende de una constante  $\sigma > 0$ , de vertido y una tasa decreciente lineal en  $x_1$

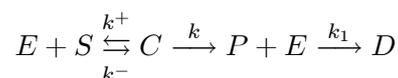
$$\dot{x}_1 = \sigma - kx_1$$

**Ejemplo 3.19** Un gran número de reacciones químicas implica la acción de una enzima sobre un substrato, con concentraciones  $E$  y  $S$ , respectivamente. Ambas sustancias interaccionan para formar un complejo cuya concentración es  $C$ .

Este proceso es reversible y se produce a una tasa proporcional al producto de  $S$  y  $E$ , con constante  $k^+$ . La disociación del complejo en sus componentes se produce con una tasa proporcional a  $C$ , con tasa  $k^-$ .

Si la energía de la reacción es suficientemente grande, la enzima puede dividir el substrato para formar un nuevo producto con concentración  $P$ . Cuando esto sucede la enzima se libera y está disponible de nuevo. El proceso es irreversible y sucede a una velocidad proporcional a  $C$ , con constante  $k$ . Finalmente  $P$  se hace inactivo en la forma  $D$  con tasa proporcional a su concentración, con constante  $k_1$ .

El mecanismo puede expresarse gráficamente como



con ecuaciones

$$\dot{C} = k^+(ES) - (k + k^-)C$$

$$\dot{P} = kC - k_1P$$

$$\dot{S} = k^-C - k^+(ES)$$

$$\dot{D} = k_1P$$

$$\dot{E} = k^-C - k^+(ES)$$

### 3.6.5 Soluciones estacionarias, relaciones estáticas y linealización

Dado un sistema descrito mediante el conjunto de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

y bajo condiciones de existencia adecuadas, tendremos que para un estado inicial  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

y para una función de entrada  $\mathbf{u}(t)$ , existirá una única solución del sistema anterior. Esta solución que se denomina *trayectoria* se representa como

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}(\cdot))$$

para indicar que esta solución depende del valor inicial  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0$  y de la entrada  $\mathbf{u}(\cdot)$  utilizada. La respuesta del sistema,  $\mathbf{y}(t)$  para  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  es también función del estado inicial y de la entrada  $\mathbf{u}(t)$

$$y(t) = h(x(t; x_0, t_0, u(\cdot)), u(t))$$

#### Solución estacionaria

En muchos casos prácticos la entrada,  $\mathbf{u}(t)$ , es constante sobre un periodo largo de tiempo y podemos considerar por tanto que

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$$

para algún  $\mathbf{u}_0$ .

Consideremos ahora para  $u_0$  la ecuación

$$\dot{x}(t_0) = f(x_0, u_0) = 0$$

que es un sistema que puede tener distintas soluciones, una única solución o ninguna, dependerá de la ecuación y del valor de  $\mathbf{u}_0$  elegido. Si ahora consideramos  $\mathbf{x}_0^s$  una solución de esta ecuación y resolvemos la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$$

con la condición inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0^s$$

entonces se obtiene

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0 \quad \forall t$$

Esta solución es una *solución estacionaria* y el par  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\}$  es un *punto estacionario* para 3.8-3.9, o a veces *punto singular* o *de equilibrio*.

Todas las soluciones constantes  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ , para la respuesta  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  deben cumplir

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_0)$$

es decir, todos los puntos estacionarios se obtienen al resolver la ecuación

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

respecto a  $\mathbf{x}_0$ .

Si  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  es una solución estacionaria, entonces su correspondiente respuesta,  $\mathbf{y}(t)$ , también es constante en el tiempo:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

**Ejemplo 3.20** Buscaremos las soluciones estacionarias para el modelo ecológico depredador-presa. Las ecuaciones para este sistema eran

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) \cdot N_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \alpha_2 N_1(t) \cdot N_2(t)$$

El sistema que proporciona las soluciones estacionarias es

$$(\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) \cdot N_2(t) = 0$$

$$(\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \alpha_2 N_1(t) \cdot N_2(t) = 0$$

cuyas soluciones son la solución trivial

$$N_1 = N_2 = 0$$

y

$$N_1^* = \frac{\lambda_2 - \gamma_2}{\alpha_2}$$

$$N_2^* = \frac{\gamma_1 - \lambda_1}{\alpha_1}$$

**Ejemplo 3.21** Para el modelo del depósito de agua, los puntos estacionarios vienen dados por

$$-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u_0 = 0$$

de donde

$$h(t) = h_0 = \frac{1}{a^2 2g} u_0^2$$

y el flujo estacionario

$$q(t) = q_0 = a\sqrt{2g}\sqrt{h_0} = u_0$$

### Estabilidad

Supongamos ahora que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  es una solución estacionaria, es decir, es una solución del sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

La cuestión que aparece ahora de forma natural es preguntarse qué le ocurrirá a la solución si cambian las condiciones iniciales, o de otra forma, ¿qué relación existirá entre esta solución y la del siguiente sistema?

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_1\end{aligned}$$

Obviamente la respuesta a esta cuestión depende de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$ .

Diremos que la solución estacionaria  $\mathbf{x}_0$  es *asintóticamente estable* si para cualquier solución  $\mathbf{x}(t)$  que comienza cerca de  $\mathbf{x}_0$ , converge a  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir  $\exists \epsilon > 0$  tal que

$$\forall \mathbf{x}_1 \text{ con } \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1, t_0, \mathbf{u}_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$$

La solución será *globalmente estable* si cualquier solución  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1, t_0, \mathbf{u}_0)$  con  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ , converge a  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir

$$\forall \mathbf{x}_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1, t_0, \mathbf{u}_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$$

### Relaciones estáticas

Para una entrada constante  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  y una solución estacionaria  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ , asintóticamente estable, la respuesta

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

converge hacia el valor estacionario

$$\mathbf{y}_0 = h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

Vamos a discutir la relación entre  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{y}_0$ . El punto  $\mathbf{x}_0$  determinado por  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$  es una función implícita de  $\mathbf{u}_0$ , es decir

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{u}_0)$$

por tanto la respuesta  $\mathbf{y}_0$  es una función también de  $\mathbf{u}_0$  a través de la función  $\mathbf{h}$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_0) = g(\mathbf{u}_0) \quad (3.12)$$

La relación 3.12 es la *relación estática* que existe entre la entrada constante y la correspondiente salida estacionaria.

Si la solución estacionaria es asintóticamente estable y la entrada cambia, la respuesta estacionaria asumirá con el tiempo el valor  $\mathbf{y}_0$ .

El término *constante de tiempo de un sistema* se utiliza para indicar en qué escala de tiempo, la salida se aproxima al valor estacionario  $\mathbf{y}_0$ . Por ejemplo, si decimos que “el sistema (para  $\mathbf{u}_0$ ) tiene una constante de tiempo de 5 segundos”, estaremos indicando que 5 segundos después de un cambio en la entrada, la salida del sistema estará cerca del nuevo valor estacionario.

Si la constante de tiempo del sistema es más corta que el rango temporal en el que estamos interesados, entonces la ecuación diferencial definida en 3.8-3.9, puede substituirse por el modelo estático descrito en 3.12.

Si cambiamos  $\mathbf{u}_0$  por  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= g(\mathbf{u}_1) = g(\mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}_0) = g(\mathbf{u}_0) + g'(\mathbf{u}_0) \cdot \delta\mathbf{u}_0 = \\ &= \mathbf{y}_0 + g'(\mathbf{u}_0) \cdot \delta\mathbf{u}_0\end{aligned}$$

El valor  $g'(\mathbf{u}_0)$  se denomina la ganancia estática (*Static Gain*)

**Ejemplo 3.22** *Por ejemplo para el sistema de depósito de agua teníamos*

$$q(u_0) = u_0$$

por tanto

$$\frac{\partial q(u_0)}{\partial u_0} = 1$$

*Resultado trivial ya que si el nivel es constante es porque el flujo de salida y entrada son iguales.*

### Linealización

Si para el sistema 3.8-3.9, tenemos una solución estacionaria  $\{x_0, u_0\}$ , entonces la respuesta estacionaria es

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

y podemos linealizar el sistema cerca de la solución. Si definimos

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$$

$$\Delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0$$

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0$$

el sistema de ecuaciones se puede poner como

$$\dot{\Delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}$$

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{y} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}$$

siendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , las matrices jacobianas (derivadas parciales) de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  evaluadas en  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

**Ejemplo 3.23** *Para el modelo ecológico depredador-presa las soluciones estacionarias eran*

$$N_1^* = \frac{\lambda_2 - \gamma_2}{\alpha_2}$$

$$N_2^* = \frac{\gamma_1 - \lambda_1}{\alpha_1}$$

y evaluando las derivadas parciales de  $\mathbf{f}$  (en este caso  $\mathbf{h} = 0$ ) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial N_1} ((\lambda_1 - \gamma_1) N_1 - \alpha_1 N_1 \cdot N_2) = (\lambda_1 - \gamma_1) - \alpha_1 N_2$$

$$\frac{\partial}{\partial N_2} ((\lambda_1 - \gamma_1) N_1 - \alpha_1 N_1 \cdot N_2) = -\alpha_1 N_1$$

$$\frac{d}{dN_1} ((\lambda_2 - \gamma_2) N_2 - \alpha_2 N_1 \cdot N_2) = -\alpha_2 N_2$$

$$\frac{d}{dN_2} ((\lambda_2 - \gamma_2) N_2 - \alpha_2 N_1 \cdot N_2) = (\lambda_2 - \gamma_2) - \alpha_2 N_1$$

Evaluando en los puntos estacionarios  $N_1^*$  y  $N_2^*$  obtenemos el sistema linealizado

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta N_1(t) \\ \Delta N_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\lambda_2 - \gamma_2) \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\lambda_1 - \gamma_1) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_1(t) \\ \Delta N_2(t) \end{pmatrix}$$

La linealización tiene algunas limitaciones como son:

1. La linealización solamente se puede utilizar para estudiar las propiedades locales, cerca de las soluciones estacionarias.
2. Es difícil medir cuantitativamente cómo es de buena la aproximación lineal, es decir, el error cometido es difícil de cuantificar.

### 3.7 Relaciones entre los sistemas LTI y las EDO's

Vamos a establecer las condiciones que deben cumplir los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma dada en 3.10 para que estos sistemas tengan las propiedades de linealidad, tal y como la hemos definido para sistemas, y la invariancia en el tiempo. Utilizaremos un ejemplo para realizar este análisis.

Supongamos un sistema en tiempo continuo en el que la entrada y salida están relacionadas mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

Y consideraremos como entrada la señal  $x(t)$  definida por

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t) u(t) \quad k \in \mathbb{R}$$

Para encontrar la respuesta a este sistema tenemos que resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) + 2y(t) = k \cos(\omega_0 t) u(t)$$

Distinguimos la solución para los casos  $t \geq 0$  y  $t < 0$ .

- Caso I:  $t < 0$

En este caso la ecuación diferencial es una ecuación homogénea de la forma

$$y'(t) + 2y(t) = 0$$

cuya solución general, utilizando la ecuación característica de la ecuación

$$\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

es de la forma

$$y^-(t) = Be^{-2t}$$

El superíndice  $-$ , indica que se trata de la solución a la izquierda de 0.

- Caso II:  $t \geq 0$

Ahora la ecuación queda como

$$y'(t) + 2y(t) = k \cos[\omega_0 t]$$

y su solución general puede obtenerse bien mediante la ecuación general de la forma

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

donde  $y_g(t)$  representa la solución general,  $y_h(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea e  $y_p(t)$  una solución particular de la ecuación diferencial. O bien puede obtenerse mediante el método de variación de las constantes a partir de la solución de la ecuación de la homogénea

$$y_g(t) = B(t) e^{-2t}$$

Si utilizamos el primer método, solamente será necesaria una solución particular  $y_p(t)$  de la ecuación, ya que disponemos de la solución general de la ecuación homogénea. Para encontrarla y teniendo en cuenta la forma que tiene el miembro de la derecha de la expresión, probaremos con una solución de la forma

$$y_p(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t)$$

y cuya derivada es

$$y_p'(t) = -k_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + k_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Substituyendo en la ecuación diferencial

$$y_p'(t) + 2y_p(t) = k \cos(\omega_0 t)$$

$$-k_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + k_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) + 2 * (k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t)) = k \cos(\omega_0 t)$$

Si agrupamos los términos en  $\sin(\omega_0 t)$  y  $\cos[\omega_0 t]$

$$\cos(\omega_0 t) (k_2 \omega_0 + 2k_1) + \sin(\omega_0 t) (-k_1 \omega_0 + 2k_2) = k \cos(\omega_0 t)$$

identificando coeficientes

$$k_2 \omega_0 + 2k_1 = k$$

$$-k_1 \omega_0 + 2k_2 = 0$$

y resolviendo el sistema, obtenemos los valores para las constantes  $k_1$  y  $k_2$  de la solución particular

$$k_1 = \frac{2k}{\omega_0^2 + 4}$$

$$k_2 = \frac{k\omega_0}{\omega_0^2 + 4}$$

La expresión para la solución particular,  $y_p(t)$ , queda

$$y_p(t) = \frac{2k}{\omega_0^2 + 4} \cos(\omega_0 t) + \frac{k\omega_0}{\omega_0^2 + 4} \sin(\omega_0 t)$$

La solución general es entonces

$$y^+(t) = y_g(t) = \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)] + Ae^{-2t} \quad t \geq 0$$

**Observación 3.24** Para resolver la ecuación diferencial mediante el método de variación de las constantes, consideramos la solución de la ecuación homogénea

$$y_h(t) = Be^{-2t}$$

y obtendremos la solución de la ecuación general al considerar que la constante  $B$  es en realidad una función del tiempo

$$y_g(t) = B(t) e^{-2t}$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación diferencial

$$y_g'(t) + 2y_g(t) = k \cos(\omega_0 t)$$

obtenemos

$$(B'(t) e^{-2t} - 2B(t) e^{-2t}) + 2B(t) e^{-2t} = k \cos(\omega_0 t)$$

y simplificando

$$B'(t) e^{-2t} = k \cos[\omega_0 t] \Leftrightarrow B'(t) = k \cos(\omega_0 t) e^{2t}$$

e integrando obtenemos el valor de  $B(t)$ .

$$B(t) = \int k \cos(\omega_0 t) e^{2t} dt = \frac{ke^{2t}}{\omega_0^2 + 4} [\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t)] + A$$

donde ahora  $A \in \mathbb{R}$  y la integración se ha hecho por partes.

La solución general es de nuevo

$$y_g(t) = B(t) e^{-2t} = \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t)] + Ae^{-2t}$$

Para poder determinar completamente la solución es necesario especificar un conjunto de condiciones iniciales. Supongamos sin pérdida de generalidad que el estado del sistema es conocido en el instante  $t_0 = 0$

$$y(0) = y_0$$

Recordando la solución general que hemos obtenido para  $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \begin{cases} y^-(t) = Be^{-2t} & t < 0 \\ y^+(t) = \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)] + Ae^{-2t} & t \geq 0 \end{cases}$$

y si exigimos continuidad en  $t = 0$

$$y^-(0) = y^+(0)$$

es decir

$$y^-(0) = B = y_0$$

$$y^+(0) = \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 * 1 + \omega_0 * 0] + A = y_0$$

y de aquí

$$A = y_0 - \frac{2k}{\omega_0^2 + 4}$$

La solución será

$$y(t) = \begin{cases} y^-(t) = y_0 e^{-2t} & t < 0 \\ y^+(t) = \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)] + \left(y_0 - \frac{2k}{\omega_0^2 + 4}\right) e^{-2t} & t \geq 0 \end{cases}$$

que puede ponerse como

$$y(t) = \begin{cases} y^-(t) = y_0 e^{-2t} & t < 0 \\ y^+(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) - 2e^{-2t}] & t \geq 0 \end{cases}$$

o de forma más compacta

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{k}{\omega_0^2 + 4} [2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) - 2e^{-2t}] u(t)$$

Para que el sistema sea lineal debe cumplirse que para una entrada nula el sistema también tenga respuesta nula. Si ahora tomamos  $k = 0$ , la entrada será la entrada nula y la respuesta en este caso es

$$y(t) = y_0 e^{-2t}$$

que solamente será nula si  $y_0 = 0$ .

Hemos llegado a la conclusión de que la condición necesaria (que también es suficiente) para que un sistema descrito mediante una EDO lineal con coeficientes constantes sea un sistema lineal es que el valor inicial empleado para resolver el sistema completamente sea del tipo

$$y(t_0) = 0$$

**Teorema 3.25** Dado un sistema modelado mediante una EDO lineal con coeficientes constantes de orden  $N$  del tipo

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

donde  $a_k, b_j \in \mathbb{C}$ , junto con el conjunto de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_{0,0} \\ y'(t_0) &= y_{0,1} \\ &\vdots \\ y^{N-1}(t_0) &= y_{0,N-1} \end{aligned}$$

donde  $y_{0,k} \in \mathbb{C}$ . Entonces el sistema es lineal si y sólo si

$$y_{0,k} = 0 \quad \forall k = 0, \dots, N-1$$

Además si  $\exists k \in \{0, \dots, N-1\}$  con  $y_{0,k} \neq 0$ , el sistema será de incremento lineal.

Utilizamos el ejemplo anterior para comprobar que esto es lo que sucede. Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  dos entradas al sistema con respuestas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  respectivamente, es decir

$$y_1'(t) + 2y_1(t) = x_1(t)$$

$$y_2'(t) + 2y_2(t) = x_2(t)$$

junto con las condiciones

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 0$$

Si ahora consideramos la entrada

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

es fácil comprobar que la señal

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

cumple la ecuación

$$y_3'(t) + 2y_3(t) = x_3(t)$$

Derivando y substituyendo

$$\begin{aligned} (\alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t)) + 2(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) &= \alpha (y_1'(t) + 2y_1(t)) + \beta (y_2'(t) + 2y_2(t)) \\ &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = x_3(t) \end{aligned}$$

y además

$$y_3(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = 0$$

En la solución general obtenida en el ejemplo anterior, hay dos términos, uno de ellos se obtiene para una condición inicial 0, y el segundo aparece cuando esta condición es distinta de 0 (ver figura 3.17)

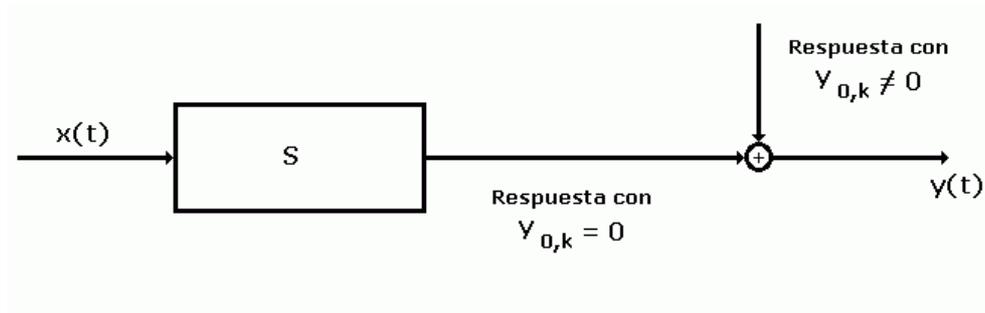


Figura 3.17: Sistema de incremento lineal.

### Causalidad e invariancia en el tiempo

Otro aspecto que puede ser estudiado en sistemas modelados por EDO lineales con coeficientes constantes es la causalidad. Veremos que en este caso es necesaria una condición auxiliar más fuerte que la condición inicial cero exigida para la linealidad. Para ello, consideremos la misma ecuación diferencial del caso anterior, es decir:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

junto con la condición inicial

$$y(0) = 0$$

Y supongamos las dos entradas siguientes

$$x_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 & t > -1 \end{cases}$$

como el sistema es lineal (por la condición inicial  $y(0) = 0$ ), la respuesta del sistema para la primera entrada  $x_1(t)$  será

$$y_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Buscamos ahora la solución para la entrada  $x_2(t)$ , y para ello distinguimos dos casos:  $t \leq -1$  y  $t > -1$ .

- Caso I: Para  $t \leq -1$

La ecuación diferencial es la ecuación homogénea

$$y'(t) + 2y(t) = 0$$

que tiene por solución

$$y^-(t) = Be^{-2t}$$

- Caso II: Para  $t > -1$

La ecuación diferencial en este caso es

$$y'(t) + 2y(t) = 1$$

que no es homogénea.

Utilizamos la forma general

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

donde  $y_h(t)$  es la solución de la ecuación homogénea (que es de la forma  $y_h(t) = Ae^{-2t}$ ) e  $y_p(t)$  una solución particular, que podemos suponer es del tipo

$$y_p(t) = M$$

puesto que el término independiente en la ecuación diferencial es de ese tipo.

Para encontrar el valor de  $M$  sustituimos en la ecuación, considerando que  $y'_p(t) = 0$

$$0 + 2 * M = 1 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}$$

y la solución particular es

$$y_p(t) = \frac{1}{2}$$

siendo entonces la solución general para  $t > -1$

$$y^+(t) = y_g(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2}$$

**Observación 3.26** Como alternativa al método anterior, podemos utilizar de el método de variación de las constante: se considera una solución general del tipo

$$y_g(t) = B(t) e^{-2t}$$

y se substituye en la ecuación general para obtener  $B(t)$

$$(B'(t) e^{-2t} - 2B(t) e^{-2t}) + 2 * B(t) e^{-2t} = 1 \Leftrightarrow B'(t) = e^{2t} \Leftrightarrow B(t) = \frac{e^{2t}}{2} + A$$

dando como solución general

$$y_g(t) = \left( \frac{e^{2t}}{2} + k \right) e^{-2t} = \frac{1}{2} + Ae^{-2t}$$

Para obtener los valores de las constantes de integración, tendremos en cuenta tanto la condición inicial  $y(0) = 0$ , como la continuidad de la solución en  $t = -1$ , de esta forma

$$y^+(0) = 0 \quad (0 > -1)$$

$$y^-(-1) = y^+(-1)$$

que conduce a la ecuación

$$y^+(0) = A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

y a las ecuaciones

$$y^-(-1) = Be^2$$

$$y^+(-1) = \frac{1}{2} + Ae^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

Igualando ambas

$$Be^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$$

La respuesta  $y_2(t)$  del sistema para  $x_2(t)$  es

$$y_2(t) = \begin{cases} y^-(t) = \frac{1}{2}(1 - e^2)e^{-2(t+1)} & t \leq -1 \\ y^+(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & t > -1 \end{cases}$$

Para que el sistema sea causal (la salida solamente debe depender del instante actual y pasados), el sistema debería responder de la misma forma para  $x_1(t)$  y para  $x_2(t)$  con  $t < -1$ , puesto que ambas entradas coinciden hasta ese instante,  $x_1(t) = x_2(t) = 0$  para  $t < -1$ . Sin embargo para  $t < -1$

$$y_1(t) = 0$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^2)e^{-2(t+1)} \neq 0$$

luego el sistema con esta condición inicial no será causal.

Supongamos ahora que definimos el sistema de la siguiente forma

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

junto con la siguiente condición auxiliar, llamada *condición de reposo inicial*:

$$\text{Si } x(t) = 0 \text{ para } t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \text{ para } t \leq t_0$$

Entonces las respuestas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  de este sistema para las entradas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son

$$x_1(t) = 0 \forall t \Rightarrow y_1(t) = 0 \forall t$$

y

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 & t > -1 \end{cases} \Rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ Ae^{-2t} + \frac{1}{2} & t > -1 \end{cases}$$

para obtener el valor de  $A$ , consideramos continuidad,  $y(-1) = 0$

$$A + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

y la respuesta  $y_2(t)$  es

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & t > -1 \end{cases}$$

o de forma compacta

$$y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t+1)})u(t+1)$$

La condición auxiliar en un punto fijo en el tiempo ( $y(t_0) = 0$ ) genera un sistema que no es causal puesto que el sistema antes de ese instante  $t_0$  está condicionado por ese valor. Para  $t < t_0$  el sistema debe tener en cuenta que en  $t_0$  la respuesta será nula, y por tanto los valores de la respuesta en  $t < t_0$  están afectados por valores futuros y el sistema no será causal.

La condición de reposo inicial:  $x(t) = 0 \forall t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \forall t \leq t_0$ , lleva implícita la condición inicial  $y(t_0) = 0$ . Además también implica invariancia temporal. Comprobaremos este resultado utilizando el sistema anterior y una entrada  $x_1(t)$ , con la propiedad  $x_1(t) = 0, \forall t \leq t_0$

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) + 2y_1(t) &= x_1(t) \\ y_1(t_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

junto con la condición de reposo inicial.

Si ahora consideramos un desplazamiento en la entrada

$$x_2(t) = x_1(t - T)$$

para  $T \in \mathbb{R}$ . Como  $x_1(t) = 0, \forall t \leq t_0 \Rightarrow x_2(t) = 0, \forall t \leq t_0 + T$ . Por la condición de reposo inicial, la respuesta  $y_2(t)$  debe cumplir

$$y_2(t) = 0, \forall t \leq t_0 + T$$

y cumplir la ecuación diferencial

$$y_2'(t) + 2y_2(t) = x_2(t)$$

Sin embargo  $y_3(t) = y_1(t - T)$  es una señal que cumple la ecuación diferencial ya que simplemente substituyendo  $t$  por  $t - T$ , en la expresión de la EDO

$$y_1'(t - T) + 2y_1(t - T) = x_1(t - T) \Rightarrow y_3'(t) + 2y_3(t) = x_1(t - T) \Rightarrow y_3'(t) + 2y_3(t) = x_2(t)$$

y también la condición inicial

$$y_3(t_0 + T) = y_1(t_0 + T - T) = y_1(t_0) = 0$$

por la unicidad de la solución

$$y_1(t - T) = y_2(t)$$

y la respuesta a la entrada desplazada es un desplazamiento en la respuesta.

A continuación se incluye un resultado sobre la causalidad de sistemas LTI.

**Teorema 3.27** *Un sistema LTI en tiempo continuo es causal  $\Leftrightarrow$  Cumple la condición de reposo inicial, es decir, si la entrada cumple  $x(t) = 0, \forall t \leq t_0$ , entonces la respuesta del sistema cumple  $y(t) = 0, \forall t \leq t_0$ .*

**Demostración:** Sea un sistema lineal invariante en el tiempo  $\Rightarrow$  Si  $h(t)$  es su respuesta impulsiva, entonces  $\forall t$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t - s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - s) h(s) ds$$

- “ $\Rightarrow$ ”

Supongamos que el sistema LTI es causal. Esto quiere decir que  $h(t) = 0 \forall t < 0$ , y por tanto

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds$$

puesto que para  $s > t \Rightarrow t-s < 0 \Rightarrow h(t-s) = 0$ . Si ahora consideramos una señal  $x(t)$ , con la propiedad

$$x(t) = 0 \forall t \leq t_0$$

y calculamos la respuesta,  $y(t)$ , para  $t \leq t_0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds = 0$$

puesto que  $x(s) = 0, \forall t$  con  $-\infty < s \leq t \leq t_0$

- “ $\Leftarrow$ ”

Supongamos ahora que  $x(t) = 0 \forall t \leq t_0$ , implica  $y(t) = 0 \forall t \leq t_0$ . La respuesta impulsiva del sistema,  $h(t)$ , es la respuesta del sistema a  $\delta(t)$ ; pero esta función tiene la propiedad

$$\delta(t) = 0 \forall t < 0$$

luego  $h(t)$  debe cumplir

$$h(t) = 0 \forall t < 0$$

que es la propiedad que caracteriza la causalidad de los sistema LTI.

**Teorema 3.28** *Un sistema descrito mediante una EDO lineal con coeficientes constantes de orden  $N$  del tipo*

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

donde  $a_k, b_j \in \mathbb{C}$ , describe un sistema LTI si cumple la condición de reposo inicial; en este caso se toma como conjunto de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(t_0) &= 0 \\ y'(t_0) &= 0 \\ &\vdots \\ y^{N-1}(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Además un sistema con estas característica es también causal.

### 3.8 Ecuaciones en diferencias y sistemas lineales en tiempo discreto

En el caso de tiempo discreto un sistema lineal puede venir expresado como una ecuación en diferencias finitas del tipo

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j] \quad (3.13)$$

donde  $a_k$  y  $b_j$  son coeficientes que pueden ser o no, dependientes del tiempo.

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, aquí es posible expresar la solución general  $y[n]$  de 3.13 como la suma de una solución particular de la ecuación y una solución de la ecuación homogénea definida por

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (3.14)$$

El procedimiento para resolver las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas con coeficientes constantes es similar al empleado para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En principio, podemos suponer que la solución  $y_h[n]$  de la ecuación homogénea 3.14 es de forma exponencial, es decir

$$y_h[n] = \lambda^n$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación 3.14 obtendremos la ecuación característica

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{n-k} = 0 \Leftrightarrow a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_N \lambda^{n-N} = 0$$

y sacando factor común  $\lambda^{n-N}$

$$\lambda^{n-N} (a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N) = 0$$

La expresión entre paréntesis es el *polinomio característico* de la ecuación en diferencias y que tiene, por el teorema fundamental del álgebra,  $N$  raíces:  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  que pueden ser reales o complejas. Si los coeficientes  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ , entonces las raíces complejas serán conjugadas dos a dos.

Para el caso particular de que las  $N$  raíces sean reales y distintas, la solución de la ecuación en diferencias homogénea será de la forma:

$$y_h[n] = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_N \lambda_N^n$$

donde  $C_1, \dots, C_N \in \mathbb{C}$  se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Cuando el polinomio característico tiene raíces múltiples la expresión para la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$y_h[n] = C_{11} \lambda_1^n + C_{12} n \lambda_1^n \dots + C_{1m_{o1}} n^{m_1-1} \lambda_1^n + \dots + C_{s1} \lambda_s^n + C_{s2} n \lambda_s^n \dots + C_{sm_s} n^{m_s-1} \lambda_s^n$$

siendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$   $s$  raíces distintas entre sí y  $m_1, \dots, m_s$  su grado de multiplicidad con

$$m_1 + \dots + m_s = N$$

La solución general de la ecuación general no homogénea 3.13 dependerá de la señal de entrada  $x[n]$ , pero en cualquier caso necesitamos, junto con la solución de la ecuación homogénea, una solución particular que dependerá por tanto de la señal de entrada que tengamos. Una forma de encontrar esta

Señal de Entrada $x[n]$	Solución Particular $y_p[n]$
$A \in \mathbb{C}$	$K \in \mathbb{C}$
$AM^n \quad A, M \in \mathbb{C}$	$KM^n \quad K \in \mathbb{C}$
$An^M \quad A, M \in \mathbb{C}$	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M \quad K_j \in \mathbb{C}$
$A^n n^M \quad A, M \in \mathbb{C}$	$A^n (K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M) \quad K_j \in \mathbb{C}$
$A \cos(\omega_0 n)$	$K_1 \cos(\omega_0 n) + K_2 \sin(\omega_0 n) \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}$
$A \sin(\omega_0 n)$	$K_1 \cos(\omega_0 n) + K_2 \sin(\omega_0 n) \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}$

Tabla 3.1: Soluciones particulares para diversos tipos de señal de entrada.

solución particular,  $y_p[n]$ , es suponer que es del mismo tipo que la entrada. Por ejemplo, si la entrada es el escalón unidad,  $x[n] = u[n]$ , entonces podemos probar con una solución particular de la forma

$$y_p[n] = Ku[n] \quad K \in \mathbb{C}$$

En la tabla 3.1 se indican algunas soluciones particulares para señales de entrada determinadas.

**Ejemplo 3.29** *Determina la solución particular de la ecuación en diferencias*

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + x[n]$$

cuando la función de entrada  $x[n]$  es

$$x[n] = 2^n u[n]$$

**Solución:** Por la forma de la señal de entrada se puede probar con una solución particular del tipo

$$y_p[n] = K2^n u[n]$$

Tras substituir  $y_p[n]$  en la ecuación en diferencias, obtenemos

$$K2^n u[n] = \frac{5}{6}K2^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{6}K2^{n-2}u[n-2] + 2^n u[n]$$

Para determinar el valor de  $K$ , es necesario evaluar la ecuación en un valor de  $n$ , con  $n \geq 2$ , puesto que es necesario que ninguno de los escalones se anule. Así para  $n = 2$ , obtenemos

$$K2^2 = \frac{5}{6}K2 - \frac{1}{6}K + 2^2 \Leftrightarrow 4K = \frac{10}{6}K - \frac{1}{6}K + 4 \Leftrightarrow K = \frac{8}{5}$$

siendo en este caso la solución particular

$$y_p[n] = \frac{8}{5}2^n u[n]$$

Al igual que para sistemas en tiempo continuo, modelados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, se deduce la teoría asociada a sistemas en tiempo discreto descritos por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes; aunque en este caso podremos tratar el problema desde otro punto de vista. En cualquier caso para determinar la respuesta de un sistema modelado mediante una ecuación del tipo 3.13 es necesario conocer una condición auxiliar.

De la ecuación general 3.13 podemos obtener la respuesta del sistema en el instante  $n$ -ésimo despejando  $y[n]$  para obtener la ecuación

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{j=0}^M b_j x[n-j] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (3.15)$$

que expresa la salida en el instante  $n$  en términos de  $(M + 1)$  entradas y los  $N$  valores anteriores de la salida. Esta ecuación (3.15) se denomina *ecuación recursiva*.

Para el cálculo de  $y[n]$  basta con conocer  $N$  respuestas del sistema en instantes consecutivos, por ejemplo

$$y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$$

En general conoceremos la entrada  $x[n]$  para cada instante y un conjunto de condiciones auxiliares del tipo anterior, generalmente

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

Para el caso particular en el que  $N = 0$ , obtenemos la ecuación *no recursiva*:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

e  $y[n]$  se obtiene de forma explícita a partir de  $(M + 1)$  valores de la entrada  $x[n]$ . En este caso además, no necesitamos condiciones auxiliares y se puede considerar la ecuación como una convolución entre dos señales,  $x[n]$  y  $h[n]$  donde

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_j}{a_0} & j = 0, \dots, M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

es la respuesta impulsiva del sistema. En estos casos la respuesta impulsiva,  $h[n]$ , es de duración finita y el sistema se denomina de Respuesta Impulsiva Finita *FIR* (Finite Impulse Reponse).

Sabemos que las respuestas,  $y[n]$ , de un sistema LTI en tiempo discreto pueden expresarse en términos de los valores de la entrada  $x[n]$  a través del producto de convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

La dificultad de esta expresión estriba en que la suma es infinita y es necesario utilizar todos los valores de la entrada. A veces es más conveniente utilizar respuestas ya conocidas para encontrar la respuesta en un instante. Si consideramos, por ejemplo, el sistema que devuelve la media acumulada de una señal  $x[n]$

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x[k] \quad n = 0, 1, \dots,$$

se observa que cuando  $n$  crece, por una parte el número de términos en el sumatorio crece y por otra es necesario mantener los valores de  $x[n]$  para el cálculo de  $y[n]$ . Sin embargo, si la salida en el instante  $n-1$ , es conocida

$$y[n-1] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \Rightarrow ny[n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$$

es posible comprobar que

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] \Rightarrow (n+1)y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

y despejando  $y[n]$

$$y[n] = \frac{n}{n+1}y[n-1] + \frac{1}{n+1}x[n]$$

obtenemos la respuesta en un instante  $n$ , a partir de la respuesta en el instante anterior y del valor de la entrada en ese instante. En este caso solamente es necesario conocer la salida en un instante dado  $n_0 - 1$ , para poder conocer la respuesta en instantes sucesivos. El término  $y[n_0 - 1]$  se llama *condición inicial del sistema*.

**Ejemplo 3.30** Dado el sistema

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad a \in \mathbb{R}$$

Supongamos que utilizamos una señal de entrada  $x[n]$  y que es conocida la respuesta  $y[-1]$ , entonces

$$y[0] = ay[-1] + x[0]$$

$$y[1] = ay[0] + x[1] = a^2y[-1] + ax[0] + x[1]$$

$$\vdots$$

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + a^n x[0] + \dots + ax[n-1] + x[n]$$

y se deduce la respuesta para cualquier instante  $n \geq 0$

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k] \quad n \geq 0$$

Notar que la solución tiene dos partes: el primer término que contiene a la condición inicial  $y[-1]$

$$a^{n+1}y[-1]$$

y el segundo

$$\sum_{k=0}^n a^k x[n-k]$$

que viene expresado en términos de la entrada  $x[n]$ .

Para encontrar la respuesta del sistema en  $n < 0$ , es necesario expresar la ecuación en diferencias de otra forma. Podemos poner  $y[n-1]$  en términos de  $y[n]$  y de  $x[n]$  como

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n])$$

de esta forma, una vez que  $y[-1]$  y la respuesta  $x[n]$  en  $n < 0$ , son conocidas, podemos calcular  $y[n]$  para  $n < 0$

$$y[-2] = a^{-1}(y[-1] - x[-1])$$

$$y[-3] = a^{-1}(y[-2] - x[-2]) = a^{-2}y[-1] - a^{-2}x[-1] - a^{-1}x[-2]$$

$$\vdots$$

$$y[-m] = a^{-m+1}y[-1] - a^{-m+1}x[-1] - \dots - a^{-2}x[-m+2] - a^{-1}x[-m+1]$$

con  $m > 0$ , si ahora hacemos  $-m = n$ , entonces  $n < 0$

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] - a^{n+1}x[-1] - \dots - a^{-2}x[n+2] - a^{-1}x[n+1]$$

y en forma más compacta

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] - \sum_{k=n+1}^{-1} a^k x[n-k] \quad n < 0$$

En resumen la respuesta del sistema para cualquier  $n$ , sabiendo la respuesta en un instante  $y[-1]$  y los valores de la entrada será

$$y[n] = \begin{cases} a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k] & n \geq 0 \\ a^{n+1}y[-1] - \sum_{k=n+1}^{-1} a^k x[n-k] & n < 0 \end{cases}$$

Podemos expresar esta respuesta como

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \left( \sum_{k=0}^n a^k x[n-k] \right) u[n] - \left( \sum_{k=n+1}^{-1} a^k x[n-k] \right) u[-n-1]$$

Podemos observar que para que el sistema sea lineal y por tanto cumpla que a entrada nula, el sistema proporcione una respuesta nula, la condición inicial  $y[-1]$ , debe ser nula de la misma forma que ocurría para sistemas en tiempo continuo.

**Ejemplo 3.31** Sea la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

o equivalentemente

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

supongamos que  $y[-1] = \alpha$  y que  $x[n] = M\delta[n]$ . Este ejemplo es un caso particular del ejercicio anterior con  $y[-1] = \alpha$  y  $a = \frac{1}{2}$ . La solución es entonces

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k M\delta[n-k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha + M \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 0$$

y cuando  $n < 0$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha - \sum_{k=n+1}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k M\delta[n-k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$$

puesto que el sumatorio empieza en  $n+1 > n$ .

La respuesta para cualquier  $n$  será

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha + M \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Y comprobamos que si  $M = 0$ , entonces

$$x[n] = M\delta[n] = 0$$

es la entrada nula y la respuesta de sistema será

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$$

y si  $y[-1] = \alpha \neq 0$ , entonces esta respuesta no es nula y el sistema es no lineal..

Análogamente, para que el sistema sea causal, debe cumplirse la siguiente condición de *reposo inicial*:

$$\text{Si } x[n] = 0, \forall n \leq n_0 \Rightarrow y[n] = 0, \forall n \leq n_0$$

Y sólo necesitamos resolver la ecuación en diferencias para  $n > n_0$ ; y utilizar la condición inicial  $y[n_0] = 0$ . En este caso el sistema es además, como en el caso de tiempo continuo, invariante en el tiempo.

**Teorema 3.32** *Dado un sistema en tiempo discreto modelado mediante una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden  $N$  del tipo*

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

donde  $a_k, b_j \in \mathbb{C}$ , junto con el conjunto de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y[n_0] &= y_{0,0} \\ y[n_0 - 1] &= y_{0,1} \\ &\vdots \\ y[n_0 - (N - 1)] &= y_{0,N-1} \end{aligned}$$

donde  $y_{0,k} \in \mathbb{C}$ . Entonces el sistema es lineal si y sólo si

$$y_{0,k} = 0 \quad \forall k = 0, \dots, N - 1$$

Además si  $\exists k \in \{0, \dots, N - 1\}$  con  $y_{0,k} \neq 0$ , el sistema será de incremento lineal.

**Teorema 3.33** *Un sistema en tiempo discreto modelado mediante una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden  $N$  del tipo*

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

donde  $a_k, b_j \in \mathbb{C}$ , describe un sistema LTI si cumple la condición de reposo inicial; en este caso se toma como conjunto de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y[n_0] &= 0 \\ y[n_0 - 1] &= 0 \\ &\vdots \\ y[n_0 - (N - 1)] &= 0 \end{aligned}$$

Además un sistema con estas características es también causal.

Para sistemas LTI en tiempo discreto existe un resultado equivalente al conseguido para los sistemas en tiempo continuo.

**Teorema 3.34** *Un sistema LTI en tiempo discreto, es causal  $\Leftrightarrow$  Cumple la condición de reposo inicial, es decir, si la entrada cumple  $x[n] = 0, \forall n \leq n_0$ , entonces la respuesta del sistema cumple  $y[n] = 0, \forall n \leq n_0$ .*

**Demostración:** Sea un sistema lineal invariante en el tiempo  $\Rightarrow$  Si  $h[n]$  es su respuesta impulsiva, entonces  $\forall n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k]$$

- "  $\Rightarrow$  ". Supongamos que el sistema LTI es causal. Esto quiere decir que  $h[n] = 0 \forall n < 0$ , y por tanto

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k]$$

puesto que para  $k > n \Rightarrow n - k < 0 \Rightarrow h[n - k] = 0$ . Si ahora consideramos una señal  $x[n]$ , con la propiedad

$$x[n] = 0 \forall n \leq n_0$$

y calculamos la respuesta para esos instantes  $n \leq n_0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = 0$$

puesto que  $x[k] = 0, \forall t$  con  $-\infty < k \leq n \leq n_0$

- "  $\Leftarrow$  ". Supongamos ahora que  $x[n] = 0 \forall n \leq n_0$ , implica  $y[n] = 0 \forall n \leq n_0$ . La respuesta impulsiva del sistema,  $h[n]$  es la respuesta del sistema a  $\delta[n]$ ; y esta función tiene la propiedad

$$\delta[n] = 0 \forall n < 0$$

luego  $h[n]$  debe cumplir

$$h[n] = 0 \forall n < 0$$

y esta es la propiedad que caracteriza la causalidad de un sistema LTI.

Volviendo al ejemplo inicial

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

y considerando a  $y[-1] = a$ , como condición inicial; la solución del sistema para  $n \geq 0$  era

$$y[n] = \alpha^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^n \alpha^k x[n-k]$$

El primer término del miembro de la derecha es la *respuesta a entrada nula*, es decir la respuesta del sistema cuando la entrada es  $x[n] = 0 \forall n$ .

$$y_{zi}[n] = \alpha^{n+1} y[-1]$$

Mientras que el segundo término es la *respuesta en estado nulo o respuesta forzada* y es la respuesta del sistema cuando las condiciones iniciales son nulas

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k x[n-k]$$

Para cada respuesta,  $y[n]$ , podemos poner

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

**Ejemplo 3.35** Determina la respuesta del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] + ay[n-1] = x[n] \quad n \geq 0$$

para la entrada  $x[n] = u[n]$  y la condición inicial  $y[-1] = b$ . Calcula su respuesta a entrada nula,  $y_{zi}[n]$  y su respuesta en estado nulo,  $y_{zs}[n]$ .

**Solución:** Como alternativa al proceso recursivo utilizado anteriormente, buscaremos ahora la solución general de la ecuación

$$y[n] + ay[n-1] = x[n] \quad n \geq 0$$

a partir de la expresión de la solución general  $y_g[n]$

$$y_g[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

donde  $y_h[n]$  es la solución general de la ecuación homogénea

$$y[n] + ay[n-1] = 0$$

e  $y_p[n]$  es una solución particular de la ecuación en diferencias.

- *Solución de la ecuación homogénea:* Buscamos las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación en diferencias. En el ejemplo, esta ecuación característica es

$$\lambda + a = 0$$

que tiene por solución

$$\lambda = -a$$

y la ecuación general de la ecuación homogénea es

$$y_h[n] = C_1 (-a)^n$$

siendo  $C_1 \in \mathbb{C}$ .

- *Solución particular:* Para buscar una solución particular de la ecuación en diferencias, se observa el término independiente y se prueba con una señal del mismo tipo. Como en este caso  $x[n] = u[n]$ , podemos probar con soluciones particulares de la forma

$$y_p[n] = Ku[n] \quad K \in \mathbb{C}$$

y habrá que determinar el valor de la constante  $K$ . Para ello sustituimos en la ecuación general

$$y[n] + ay[n-1] = u[n]$$

que nos proporciona

$$Ku[n] + aKu[n-1] = u[n]$$

y evaluando para  $n \geq 1$ , puesto que no se anula ningún término de la ecuación, obtenemos con  $n = 1$

$$K + aK = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{1+a} \quad n \geq 1$$

Construimos ahora la solución general

$$y_g[n] = C_1 (-a)^n + \frac{1}{1+a} \quad n \geq 0$$

Para determinar la constante  $C_1$ , utilizamos la condición inicial  $y[-1] = b$ . Sin embargo, la solución anterior es válida para  $n \geq 0$ , pero  $-1$  no pertenece a ese conjunto, aunque es posible usar la ecuación en diferencias

$$y[n] + ay[n-1] = x[n]$$

que para  $n = 0$  tiene la forma

$$y[0] + ay[-1] = 1$$

y utilizando, ahora sí, la ecuación general para  $y[0]$

$$y[0] = C_1 + \frac{1}{1+a}$$

valor que substituido en la ecuación anterior

$$\left(C_1 + \frac{1}{1+a}\right) + ab = 1 \Rightarrow C = \frac{a(1-b(1+a))}{1+a}$$

y la solución de la ecuación en diferencias junto con la condición inicial  $y[-1] = b$ , es

$$y[n] = \frac{(-1)^n a^{n+1} (1-b(1+a)) + 1}{1+a}$$

Podemos ahora obtener, las respuestas a entrada nula  $y_{zi}[n]$  y en estado nulo  $y_{zs}[n]$ . Para la respuesta en estado nulo tenemos que considerar la condición inicial nula:

$$y_{zs}[n] \Rightarrow (y[-1] = b = 0) \Rightarrow y_{zs}[n] = \frac{(-1)^n a^{n+1} + 1}{1+a}$$

La respuesta a entrada nula se puede obtener restando la respuesta en estado nulo a la solución general:

$$y_{zi}[n] = y[n] - y_{zs}[n] \Rightarrow y_{zi}[n] = b(-a)^{n+1}$$

También es posible obtener  $y_{zi}[n]$  resolviendo la ecuación homogénea

$$y_{zi}[n] = y_h[n] = C_2 (-a)^n \quad n \geq 0$$

con la condición inicial

$$y[-1] = b$$

y después utilizar la ecuación en diferencias para hallar el valor de la constante

$$y[0] + ay[-1] = 0 \Rightarrow C_2 + ab = 0 \Rightarrow C_2 = -ab$$

$$y_{zi}[n] = -ab(-a)^n = (-a)^{n+1} b$$

Igual que antes como era de esperar.

**Ejemplo 3.36** Determina la respuesta  $y[n]$  para  $n \geq 0$  del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

si la entrada es  $x[n] = 4^n u[n]$ . Utiliza como condiciones iniciales  $y[-1] = a$ ,  $y[-2] = b$ .

**Solución:** Calculamos la solución general a partir de la solución de la ecuación homogénea y una solución particular.

- *Solución ecuación homogénea:* La ecuación homogénea es

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 0$$

cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 4$$

La solución general de la ecuación homogénea

$$y_h[n] = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

- *Solución particular de la ecuación en diferencias.* Para obtener una solución particular de la ecuación en diferencias se observa el término independiente y se prueba con una solución similar. En este caso el término independiente es

$$x[n] = 4^n u[n]$$

y deberíamos probar con una solución particular del tipo

$$y_p[n] = K4^n u[n] \quad K \in \mathbb{C}$$

sin embargo este tipo de soluciones ya aparece en la solución general, estas soluciones son linealmente dependiente de la solución general y por tanto redundantes. Hay que probar con una solución independiente, en este caso se puede utilizar una solución particular de la forma

$$y_p[n] = Kn4^n u[n]$$

Al substituir en la ecuación general

$$Kn4^n u[n] - 3K(n-1)4^{n-1}u[n-1] - 4K(n-2)4^{n-2}u[n-2] = 4^n u[n] + 2 * 4^{n-1}u[n-1]$$

que es válida para todo  $n \geq 2$ , puesto que a partir de este elemento no se anula ninguno de los escalones implicados. Si tomamos el caso  $n = 2$

$$K * 2 * 4^2 - 3K(2-1)4^{2-1} - 4K(2-2)4^{2-2} = 4^2 + 2 * 4^{2-1} \Rightarrow 32K - 12K = 16 + 8 \Rightarrow 20K = 24$$

de donde  $K$  toma el valor

$$K = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

y la solución particular es

$$y_p[n] = \frac{6}{5}n4^n u[n]$$

Obtenemos la solución general sumando esta solución particular a la solución general de la ecuación homogénea

$$y_g[n] = (C_1(-1)^n + C_2(4)^n) + \frac{6}{5}n4^n \quad n \geq 0 \quad (3.16)$$

Puesto que la expresión que se ha encontrado para la solución general es para  $n \geq 0$ , no es posible utilizar las condiciones iniciales,  $y[-1]$  e  $y[-2]$ , y esta fórmula directamente para el cálculo de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ . Sin embargo podemos utilizar la ecuación en diferencias para encontrar los valores de  $y[0]$  e  $y[1]$  en términos de  $y[-1]$  e  $y[-2]$  que son conocidos

$$y[0] = 3y[-1] + 4y[-2] + 1 = 3a + 4b + 1$$

$$\begin{aligned} y[1] &= 3y[0] + 4y[-1] + 4 + 2 = 3(3a + 4b + 1) + 4a + 6 \\ &= 13a + 12b + 9 \end{aligned}$$

Para los valores  $n = 0$  y  $n = 1$  sí es posible utilizar la expresión general 3.16

$$y[0] = C_1 + C_2$$

$$y[1] = -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5}$$

e igualando y resolviendo las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 3a + 4b + 1 &= C_1 + C_2 \\ 13a + 12b + 9 &= -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= \alpha \\ -C_1 + 4C_2 &= \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(4\alpha - \beta)}{5} \\ C_2 &= \frac{(\alpha + \beta)}{5} \end{aligned} \right\}$$

donde se ha definido  $\alpha$  y  $\beta$  como

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 3a + 4b + 1 \\ \beta &= 13a + 12b + \frac{21}{5} \end{aligned} \right\}$$

El cálculo de  $y_{zs}[n]$  se lleva a cabo considerando  $y[-2] = y[-1] = 0$ , de aquí se obtiene

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{21}{5}$$

y

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{25} \\ C_2 &= \frac{26}{25} \end{aligned} \right\}$$

siendo la respuesta en estado nulo

$$y_{zs}[n] = \left( \frac{1}{25} (-1)^{n+1} + \frac{26}{25} (4)^n \right) + \frac{6}{5} n 4^n \quad n \geq 0$$

Mientras que  $y_{zi}[n]$  se obtiene al utilizar la entrada nula  $x[n] = 0$ , es decir resolviendo la ecuación homogénea, cuya solución es

$$y_{zi}[n] = (C_3 (-1)^n + C_4 (4)^n)$$

y considerando esta solución y la ecuación en diferencias homogénea

$$y_{zi}[0] = C_3 + C_4 = 3y_{zi}[-1] + 4y_{zi}[-2] = 3a + 4b$$

$$y_{zi}[1] = -C_3 + 4C_4 = 3y_{zi}[0] + 4y_{zi}[-1] = 3(3a + 4b) + 4a = 13a + 12b$$

se obtienen los valores para  $C_3$  y  $C_4$

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{4b - a}{5} \\ C_4 &= \frac{16(a + b)}{5} \end{aligned} \right\}$$

### 3.8.1 Respuesta impulsiva y ecuaciones en diferencias

Dado un sistema descrito mediante la ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

junto con la condición de reposo inicial (para que el sistema sea LTI) es posible obtener su respuesta impulsiva utilizando el impulso unidad  $\delta[n]$  como entrada

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j \delta[n-j]$$

El sumatorio del miembro de la derecha es  $b_n$  si  $n \in \{0, \dots, M\}$ , mientras que es 0 para el resto.

En este caso la solución particular de la ecuación general es  $y_p[n] = 0$ ; puesto que la entrada es 0 salvo para  $n = 0$ , y en consecuencia podemos calcular la respuesta impulsiva del sistema  $h[n]$  a partir de la solución de la homogénea y calculando sus coeficientes de manera que se satisfagan las condiciones iniciales impuestas por el impulso  $\delta[n]$ .

**Ejemplo 3.37** *Determina la respuesta impulsiva  $h[n]$  del sistema descrito mediante la ecuación en diferencias de segundo orden*

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

*junto con la condición de reposo inicial.*

**Solución:** Utilizando  $\delta[n]$  como entrada del sistema obtenemos:

$$h[n] - 3h[n-1] - 4h[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$$

Como para  $\delta[n]$  ocurre

$$\delta[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

por la condición de reposo inicial también debe ocurrir

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

Para  $n \geq 0$  utilizamos la ecuación en diferencias y la solución de la ecuación homogénea ya que para  $n \geq 2$  el término de la derecha es 0 y la ecuación se transforma en:

$$h[n] - 3h[n-1] - 4h[n-2] = 0$$

cuya solución podemos calcular mediante las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 4$$

Por tanto para  $n \geq 2$  la solución de la ecuación es de la forma

$$h[n] = C_1 (-1)^n + C_2 (4)^n$$

Para calcular las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , así como los valores de  $h[0]$  y  $h[1]$ , se utilizarán la ecuación en diferencias y el hecho de que  $h[n] = 0$  cuando  $n < 0$ .

Para  $n = 0$  y  $n = 1$  tenemos

$$h[0] - 3h[-1] - 4h[-2] = \delta[0] + 2\delta[-1] = 1 \Rightarrow h[0] = 1$$

$$h[1] - 3h[0] - 4h[-1] = \delta[1] + 2\delta[0] = 2 \Rightarrow h[1] = 5$$

Si ahora utilizamos la expresión general de  $h[n]$

$$h[0] = C_1 (-1)^0 + C_2 (4)^0 = C_1 + C_2 = 1$$

$$h[1] = C_1 (-1)^1 + C_2 (4)^1 = -C_1 + 4C_2 = 5$$

Sistema cuya solución es

$$C_1 = -\frac{1}{5}$$

$$C_2 = \frac{6}{5}$$

con lo que se ha determinado completamente la respuesta impulsiva del sistema

$$h[n] = \left( \frac{1}{5} (-1)^{n+1} + \frac{6}{5} (4)^n \right) u[n]$$

que como vemos es de duración infinita. Estos sistemas se denominan de Respuesta Impulsiva Infinita o *IIR* (Infinite Impulse Response).

Sea el sistema en tiempo discreto modelado mediante la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

junto con la condición de reposo inicial. Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  las raíces del polinomio característico,  $P(\lambda)$ , asociado a la ecuación

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k}$$

Si todas las raíces  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  entonces la respuesta impulsiva del sistema será

1. Si todas las raíces del polinomio característico son distintas

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j \Rightarrow h[n] = \left( \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n \right) u[n]$$

2. Si hay  $M$  raíces  $\{\lambda_k\}_{k=1}^M$  cada una con multiplicidad  $\{m_k\}_{k=1}^M$  (donde  $\sum_{k=1}^M m_k = N$ )

$$h[n] = \left( \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{m_k} c_{j,k} n^j \lambda_k^n \right) u[n]$$

A partir de estas raíces es posible obtener algunas propiedades para los sistemas LTI descritos mediante ecuaciones en diferencias. Si recordamos, por ejemplo, la condición de estabilidad para sistemas LTI ( $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ ) y puesto que con la condición de reposo inicial el sistema es causal ( $h[n] = 0 \forall n < 0$ ). Si todas las raíces fueran distintas

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N |c_k \lambda_k^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N |c_k| |\lambda_k|^n \\ &= \sum_{k=1}^N |c_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n \end{aligned}$$

de forma que si  $|\lambda_k| < 1, \forall k = 1, \dots, N$ , la suma infinita es la suma de una progresión geométrica de razón menor que la unidad luego es finita, la suma total será finita y por tanto el sistema será estable. Si, por el contrario, existe algún  $\lambda_j$  de forma que  $|\lambda_j| \geq 1$ , el sistema será inestable, puesto que en este caso

$$\sum_{k=1}^N |c_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n > \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_j|^n$$

y este último término es la suma de una progresión geométrica de razón mayor que la unidad y por tanto la suma total será infinita.