

# 3 Resolución numérica de ecuaciones y sistemas no-lineales

## Generalidades

Denominamos *ecuación no lineal* a una ecuación del tipo

$$f(x) = 0$$

donde  $f$  es una función real de variable real no lineal. La función  $f$  puede ser polinomial, trascendente (aparecen en su expresión funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) e incluso puede ocurrir que no se disponga de una expresión explícita de  $f(x)$ , pero que se conozcan las reglas para su cálculo, por ejemplo, una función descrita mediante una ecuación diferencial.

**Definición 1** Llamamos *raíz* o *solución* de una ecuación no lineal  $f(x) = 0$  a un valor  $r$  tal que  $f(r) = 0$ . En este caso se dice también que  $r$  es un **cero** de  $f$ .

En general, las raíces de una ecuación no lineal no pueden ser calculadas de forma exacta. El objetivo de este capítulo consiste en ofrecer métodos numéricos que permitan obtener aproximaciones numéricas de las mismas.

En un proceso de cálculo de raíces de una ecuación no lineal pueden distinguirse tres fases:

### 1. Localización

Interesa conocer la zona en la que se encuentran las raíces. En general, podemos obtener esta información bien a partir de una tabla de valores de la función, bien mediante un estudio analítico, o incluso mediante una representación gráfica aproximada cuando la función sea demasiado compleja. En la mayoría de los casos las ecuaciones provienen de un problema técnico o científico, cuyo conocimiento nos puede ayudar en la localización de las raíces.

### 2. Separación

A veces dos raíces diferentes de una ecuación están muy próximas. En estos casos, antes de aplicar un método numérico, conviene separar las raíces; es decir, determinar intervalos que contengan una y sólo una raíz de la ecuación.

### 3. Aproximación numérica

El objetivo de esta fase es construir una sucesión de valores que converja hacia la raíz buscada. Esta sucesión se construye normalmente de forma iterativa a partir de valores iniciales que supondremos están suficientemente cerca de la raíz buscada: a partir de los valores  $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$ , obtenemos el valor de  $x_{k+1}$ , mediante una expresión del tipo  $x_{k+1} = G(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m})$ .

Un de los teorema más importantes utilizados en esta parte del cálculo numérico es el teorema de Bolzano que nos da condiciones suficientes para la existencia de una raíz en un intervalo.

**Teorema 1 (Teorema de los ceros de Bolzano)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  con  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists r \in [a, b]$  donde  $f(r) = 0$ .

**Teorema 2** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  con  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , si además  $f'(x) > 0$  (o  $f'(x) < 0$ )  $\Rightarrow \exists^\circ r \in (a, b)$  con  $f(r) = 0$ .

**Demostración:**

Si  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  es estrictamente creciente en  $(a, b) \Rightarrow \exists^\circ r \in [a, b] : f(r) = 0$ . Si existiera otro punto  $s \in [a, b], r \neq s, f(s) = 0 \Rightarrow$  (Utilizando el Teorema de Rolle)  $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f'(\xi) = 0$ , y llegamos a una contradicción con la hipótesis inicial.

**Proposición 1** Si  $r$  es una raíz de  $f(x)$  en  $[a, b]$ ;  $\alpha$  es una aproximación de  $r$  y  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$  con  $|f'(x)| \geq m_1 > 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|r - \alpha| \leq \frac{|f(\alpha)|}{m_1}$$

**Demostración:**

Utilizando el teorema de los incrementos finitos,  $\exists \xi \in [a, b] :$

$$f(\alpha) - f(r) = f'(\xi)(\alpha - r) \Rightarrow (r \text{ es una raíz})$$

$$f(\alpha) = f'(\xi)(\alpha - r) \Rightarrow (\text{tomando valores absolutos})$$

$$|f(\alpha)| = |f'(\xi)| |\alpha - r| \Rightarrow (\text{Utilizando la cota inferior } m_1)$$

$$|f(\alpha)| \geq m_1 |\alpha - r| \Rightarrow \mathbf{q.e.d.}$$

A continuación presentamos algunos métodos de aproximación de raíces.

## Métodos iterativos usuales

### Método de aproximaciones sucesivas

Supongamos  $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$  y supongamos que  $\exists^\circ r \in [a, b]$  tal que  $f(r) = 0$ . Definimos la función  $g(x)$  como

$$g(x) = x - f(x)$$

por tanto, si  $r$  es una raíz de  $f(x)$

$$g(r) = r - f(r) = r - 0 = r$$

entonces  $r$  será un punto fijo de la función  $g(x)$ .

Tomamos  $x_0 \in [a, b]$  y construimos la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida como

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)$$

Nos preguntamos en primer lugar si la sucesión así construida será convergente y en caso afirmativo, cuál será su límite. Supongamos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene límite, como  $g(x)$  es continua (ya que está definida a partir de  $f(x)$  que lo es por hipótesis) se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Si la sucesión tuviera límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

entonces como cualquier subsucesión suya tendría ese mismo límite y se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = s$$

pero si tenemos en cuenta la construcción de la sucesión

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

y por continuidad

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(s)$$

luego  $s$  es un punto fijo de la función  $g(x)$ , y por tanto también ocurrirá

$$g(s) = s - f(s) = s \Rightarrow f(s) = 0$$

es decir,  $s$  será una raíz de la función  $f(x)$ . Si  $f(x)$  solamente tuviera una raíz, entonces está claro que  $r = s$  y habríamos resuelto el problema inicial.

El método de aproximaciones sucesivas se basa en la construcción de forma recursiva de una sucesión  $\{x_n\}$ . A partir de un cierto  $x_0 \in [a, b]$ , calculamos el siguiente elemento de la sucesión como  $x_1 = g(x_0)$ , y en general se calculará  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  utilizando la función  $g(x)$ :  $x_{n+1} = g(x_n)$ . Si la sucesión así construida es convergente, lo hará a un punto fijo de la función  $g(x)$ , es decir, a una raíz de la función  $f(x)$ . No obstante la sucesión  $\{x_n\}$  puede ser no convergente y en este caso hay que detener la producción de valores de la sucesión según un determinado criterio. El algoritmo del método se podría desarrollar como sigue:

1. Tomamos  $k = 0$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $x_0 \in [a, b]$  y un valor máximo,  $m$ , para el número máximo de iteraciones.
2. Calculamos  $x_{k+1} = g(x_k) = x_k - f(x_k)$
3. Si la diferencia entre  $x_{k+1}$  y  $x_k$  es suficientemente pequeña, es decir, si  $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ , entonces  $x_{k+1}$  será solución aproximada, en caso contrario procedemos a comprobar si el número de iteraciones, es decir, si el número de términos de la sucesión excede un valor prefijado. Si  $k + 1 > m$  entonces hemos superado el número máximo permitido de términos de la sucesión y el algoritmo se detiene. Si  $k + 1 \leq m$  entonces cambiamos  $k$  por  $k + 1$  y volvemos al punto 2.

La superación del número máximo de iteraciones suele ocurrir por dos motivos: primero, puede suceder que el número máximo de iteraciones sea insuficiente; en este caso podemos solucionar el problema aumentando el valor de ese número máximo. En se-

gundo lugar puede ocurrir que la sucesión no converja a ningún punto fijo, en este caso la solución de este problema pasa por la existencia o no de la raíz. Si se ha demostrado la existencia de la raíz podemos intentar cambiar el valor del término inicial,  $x_0$  y comprobar si la sucesión iniciada en ese punto es convergente o no.

Los siguientes resultados garantizan el éxito del método de aproximaciones sucesivas.

**Teorema 3** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis

i) La función  $g(x)$  es una función del intervalo sobre si mismo, es decir

$$\forall x \in [a, b], g(x) \in [a, b]$$

ii) La función cumple la siguiente condición de Lipschitz

$$\exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 1 \text{ tal que } \forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

Entonces, bajo estas condiciones se cumple:

i) La función  $g(x)$  tiene un único punto fijo, es decir

$$\exists^\circ r \in [a, b] : g(r) = r$$

ii) El punto fijo se puede obtener como el límite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

siendo  $x_n$  la sucesión obtenida como

$$x_0 \in [a, b]$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

iii) Se cumple

$$|x_n - r| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

**Demostración:** Vamos a demostrar en primer lugar que la sucesión  $\{x_n\}$  construida es convergente, para ello, vamos a demostrar que es una sucesión de Cauchy, es decir, que se cumple

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0, \text{ tal que si } n, m \geq n_0, \text{ entonces } |x_m - x_n| \leq \epsilon$$

Supongamos en primer lugar un número natural  $n$ , entonces teniendo en cuenta que  $x_{n+1} = g(x_n)$ , podemos poner

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})|$$

y aplicando la condición de Lipschitz obtenemos

$$|g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

el proceso se repite con  $x_n$  y  $x_{n-1}$

$$k|x_n - x_{n-1}| = k|g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

y sucesivamente hasta obtener

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0| \quad (1)$$

Supongamos ahora que  $m > n$ , entonces podemos poner

$$|x_m - x_n| = |x_m + (x_{m-1} - x_{m-1}) + (x_{m-2} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_{n+1}) - x_n|$$

y reordenando

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + x_{m-2} + \cdots - x_{n+1} + (x_{n+1} - x_n)|$$

si aplicamos ahora la desigualdad triangular obtenemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

aplicando la desigualdad obtenida para dos términos consecutivos

$$|x_m - x_n| \leq k^{m-1} |x_1 - x_0| + k^{m-2} |x_1 - x_0| + \cdots + k^n |x_1 - x_0|$$

podemos sacar factor común  $|x_1 - x_0|$

$$|x_m - x_n| \leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) |x_1 - x_0|$$

sumando la progresión geométrica entre paréntesis

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^n - k^m}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

de esta forma si  $n$  y  $m$ , son suficientemente grandes y puesto que  $0 \leq k < 1$

$$\frac{k^n - k^m}{1 - k} \rightarrow 0$$

lo que demuestra que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cachy y por tanto convergente, es decir, existe un cierto  $r \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

que por la definición de la sucesión y por la continuidad de  $g(x)$  se obtiene

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = g(r)$$

luego  $r$  es un punto fijo de  $g(x)$ .

Para demostrar la unicidad de este punto fijo, supondremos que existe otro punto fijo de  $g(x)$ , es decir, existe  $s \in \mathbb{R}$  con  $r \neq s$  y  $g(s) = s$ . Al aplicar la condición de Lipschitz

$$|r - s| = |g(r) - g(s)| \leq k |r - s|$$

y puesto que  $r \neq s$  podemos dividir por  $|r - s|$  para obtener

$$1 \leq k$$

desigualdad que es contradictoria con las hipótesis del enunciado puesto que  $k < 1$ , luego el punto fijo  $r$  es único.

Para demostrar el último apartado tomamos  $x_n$ , la condición de Lipschitz y que  $r$  es punto fijo de  $g(x)$  para obtener

$$|x_n - r| \leq |g(x_{n-1}) - g(r)| \leq k |x_{n-1} - r| = k |x_{n-1} - x_n + x_n - r| \leq k |x_{n-1} - x_n| + k |x_n - r|$$

de donde se obtiene la primera desigualdad

$$|x_n - r| - k|x_n - r| \leq k|x_{n-1} - x_n|$$

$$(1 - k)|x_n - r| \leq k|x_{n-1} - x_n|$$

$$|x_n - r| \leq \frac{k}{1 - k}|x_{n-1} - x_n|$$

Para demostrar la segunda de las desigualdades, hay que tener en cuenta que para dos términos consecutivos

$$|x_n - x_{n-1}| \leq k^{n-1}|x_1 - x_0|$$

y multiplicando ahora por  $\frac{k}{1-k}$  se obtiene el resultado buscado

$$\frac{k}{1 - k}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|$$

Esta desigualdad nos proporciona una medida del error que se comete en la aproximación  $n$ -ésima

$$|x_n - r| \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|$$

**Observación 1** *El teorema anterior es válido para intervalos abiertos de la forma:  $(-\infty, b]$ ,  $[a, \infty)$  o  $(-\infty, \infty)$ .*

Si la función fuera derivable, entonces podemos obtener una condición de tipo Lipschitz utilizando la primera derivada.

**Teorema 4** *Si  $g(x) \in C^n([a, b])$  entonces*

$$\text{Si } \exists k \text{ tal que } |g'(x)| \leq k < 1 \Rightarrow \forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

**Demostración:** Para demostrar esta implicación se utiliza el teorema del valor medio. Si tomamos  $x, y \in [a, b]$ , entonces utilizamos el teorema del valor medio

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| = |g'(\xi)||x - y| \leq k|x - y|$$

**Teorema 5** *Supongamos que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , y que  $g(x)$  verifica alguna condición de tipo Lipschitz y supongamos que se cumple*

$$\left| g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2} \right| \leq (1 - k)\frac{b-a}{2}$$

entonces,  $g(x)$  es una aplicación del intervalo en sí mismo, es decir

$$g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$$

**Demostración:** Sea  $x \in [a, b]$ , tenemos que comprobar que  $g(x) \in [a, b]$ , o equivalentemente que la distancia de  $g(x)$  al punto medio del intervalo es menor que la longitud del intervalo partido por dos, es decir, dado  $x \in [a, b]$  tendremos que demostrar

$$\begin{aligned}
\text{que } \left|g(x) - \frac{a+b}{2}\right| &\leq \frac{b-a}{2}, \\
\left|g(x) - \frac{a+b}{2}\right| &= \left|g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \text{(desigualdad triangular)} \\
&\leq \left|g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \leq \text{(condición Lipschitz+hipótesis)} \\
&\leq k \left|x - \frac{a+b}{2}\right| + (1-k) \frac{b-a}{2} \leq \\
&\leq k \frac{b-a}{2} + (1-k) \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

**Teorema 6 (Convergencia local)** Sean  $g, g' \in \mathcal{C}[a, b]$  y supongamos que  $g(x)$  tiene un punto fijo  $r$  en  $[a, b]$ . Entonces si  $|g'(r)| < 1 \Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon] \Rightarrow \{\text{Si } x_n = g(x_{n-1}) \Rightarrow \{x\}_{n=0}^{\infty} \text{ converge a } r\}$$

## Orden de convergencia

Construimos la sucesión  $x_n = g(x_{n-1})$ . Si  $r$  es la solución de  $x = g(x)$ , llamamos *error* a

$$e_n = x_n - r$$

El método  $x_{n+1} = g(x_n)$  se dice convergente de orden  $p$  (con  $p \geq 1$ ) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = k > 0$$

Siendo  $0 < k < 1$ , si  $p = 1$

Si  $g \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ , por una parte el error  $(n+1)$ -ésimo

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r)$$

por otra parte si utilizamos el desarrollo de Taylor hasta el orden  $k$  en  $x_n$  podemos poner

$$g(x_n) = g(r) + g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r)^2 + \cdots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^k + R_k(\xi_k)$$

donde

$$R_k(\xi_k) = \frac{g^{(k+1)}(\xi_n)}{(k+1)!}(x_n - r)^{k+1}$$

Empleando ambas expresiones se obtiene

$$e_{n+1} = g(x_n) - g(r) = g'(r)(x_n - r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r)^2 + \cdots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^k + R_k(\xi_k)$$

y al dividir por  $e_n = x_n - r$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{g(x_n) - g(r)}{x_n - r} = g'(r) + \frac{g''(r)}{2!}(x_n - r) + \cdots + \frac{g^{(k)}(r)}{k!}(x_n - r)^{k-1} + \frac{g^{(k+1)}(\xi_n)}{(k+1)!}(x_n - r)^k$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, haciendo  $n \rightarrow \infty$  teniendo en cuenta que el límite de  $x_n$  es  $r$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = |g'(r)| \Rightarrow \text{Si } 0 < |g'(r)| < 1 \Rightarrow \text{Tenemos convergencia lineal}$$

En el caso de que  $g'(r) = 0$  entonces podemos volver a dividir por  $x_n - r$  y de nuevo tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \Rightarrow \text{Si } |g''(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{Tenemos convergencia cuadrática}$$

En general si  $g'(r) = g''(r) = \dots = g^{(k-1)}(r) = 0$ ,  $g^{(k)}(r) \neq 0$ , el método es de orden  $k$ .

En el caso de la ecuación  $f(x) = 0$  con una única raíz en  $[a, b]$

$$x = x - f(x) \iff f(x) = 0$$

$$x = g(x) \implies g(x) = x - f(x)$$

Si  $r$  es la raíz

$$g'(x) = 1 - f'(x) \implies g'(r) = 1 - f'(r)$$

converge localmente si

$$|1 - f'(r)| < 1 \iff 0 < f'(r) < 2$$

### Método de Whittaker

El método de Whittaker consiste en elegir la función  $g(x)$  de forma que se cumpla alguna condición de convergencia, por ejemplo podemos elegir  $g(x)$  como

$$g(x) = x - kf(x)$$

$$g'(x) = 1 - kf'(x)$$

y tomar el valor de  $k$  de forma que se cumpla

$$|g'(r)| = |1 - kf'(r)| < 1$$

Otra variación de este método consiste en elegir  $\alpha(x)$ , una función no nula definida en  $[a, b]$  y construir la ecuación

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\alpha(x)}$$

de nuevo un punto fijo de  $g(x)$  es un cero de  $f(x)$

$$g(r) = r \iff r - \frac{f(r)}{\alpha(r)} = r \iff \frac{f(r)}{\alpha(r)} = 0 \iff f(r) = 0$$

el método converge globalmente si  $|g'(x)| < 1$ , es decir

$$|g'(x)| = \left| 1 - \frac{f'(x)\alpha(x) - \alpha'(x)f(x)}{[\alpha(x)]^2} \right|$$

o localmente si  $|g'(r)| < 1$

$$|g'(r)| = \left| 1 - \frac{f'(r)}{\alpha(r)} \right| < 1$$

Para obtener convergencia cuadrática, entonces  $g'(r) = 0$

$$1 - \frac{f'(r)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \alpha(x) = f'(x)$$

Por ejemplo, si  $\alpha(x) = f'(x)$  obtenemos

$$\alpha(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que como veremos posteriormente es el método de Newton-Raphson.

## Método de bipartición

Recordemos que a partir de dos valores  $a$  y  $b$  en donde la función  $f(x)$  cambie de signo, el teorema de Bolzano asegura que, si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a)f(b) < 0$ , entonces existe un punto  $r \in (a, b)$  que verifica  $f(r) = 0$ . En principio, puede existir más de una raíz, pero supondremos que sólo existe una, entendiendo que previamente se habrán efectuado procesos de localización y separación.

El método de bisección construye una sucesión de intervalos encajados

$$(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset \dots \supset (a_k, b_k) \supset \dots$$

de manera que siempre contenga a la raíz buscada, y que la amplitud de cada uno de ellos sea la mitad de la del anterior. Cuando la amplitud del intervalo sea suficientemente pequeña como para satisfacer la precisión con la que queremos hallar la raíz, podremos considerar como una buena aproximación de ésta uno cualquiera de sus extremos.

La construcción del método consiste en dividir el intervalo por la mitad. Tomemos  $p = \frac{a+b}{2}$  y calculemos el valor de la función en ese punto, puede ocurrir que  $f(p) = 0$ , en tal caso habremos encontrado el punto fijo. Por el contrario si  $f(p) \neq 0$ , entonces o bien  $f(a)f(p) < 0$  y elegimos como nuevo intervalo  $[a_1, b_1] = [a, p]$ , o bien  $f(b)f(p) < 0$  y en este caso elegimos como nuevo intervalo  $[a_1, b_1] = [p, b]$ . En cualquiera de estos dos casos se habrá reducido la longitud del nuevo intervalo a la mitad. Este mecanismo se repite con el nuevo intervalo, se construye así la sucesión de intervalos indicada al principio de la sección.

El algoritmo sería el siguiente: A partir de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f \in C([a, b])$ ,  $f(a)f(b) < 0$  y con una única raíz en el intervalo  $[a, b]$ , llamamos  $a_0 = a$  y  $b_0 = b$

1. Tomamos  $k = 0$ ,  $\varepsilon > 0$

2. Elegimos

$$p = \frac{a_k + b_k}{2}$$

3. Si  $f(p) = 0 \Rightarrow p$  es la raíz de  $f(x)$

4. Si  $f(p) \neq 0 \Rightarrow$

a. Si  $f(a)f(p) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, p]$

b. Si  $f(p)f(b) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [p, b_k]$

5. Si la longitud del intervalo es suficientemente pequeña, es decir,  $|b_{k+1} - a_{k+1}| <$

$\varepsilon \Rightarrow$  Podemos tomar como raíz de la función  $f$ , cualquiera de los puntos:  $a_{k+1}, b_{k+1}$  o  $p = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ . En caso contrario se cambia  $k$  por  $k + 1$  y volvemos al punto 2.

Mediante este algoritmo se construyen dos sucesiones de puntos  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ . Por construcción la sucesión  $\{a_n\}$  es creciente y está acotada superiormente, por cualquiera de los elementos  $b_n$ , mientras que la sucesión  $\{b_n\}$  es decreciente y acotada inferiormente por cualquiera de los elementos  $a_n$ , por tanto, ambas sucesiones tienen límite:  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. También por la construcción de los diferentes intervalos tenemos que la longitud del intervalo  $[a_n, b_n]$  es  $\frac{b-a}{2^n}$ . Por una parte tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha - \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

y por tanto  $\alpha = \beta$ . Teniendo en cuenta que se han elegido los extremos del intervalo de forma que la función  $f(x)$  tome valores de signo contrario en ellos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$$

Por otra parte como  $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$  y  $\alpha = \beta$

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha)^2 \geq 0$$

expresión de la que se extrae

$$f(\alpha) = 0$$

### Análisis del error en el método de bipartición

Mediante este algoritmo podemos determinar la cota de error absoluto que cometeremos al elegir un punto como aproximación de la solución de la ecuación. Si  $r$  es la raíz de la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces el error cometido según el punto elegido será

$$\left. \begin{array}{l} r - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ b_n - r \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Si elegimos como solución algún extremo del intervalo}$$

$$\left| r - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \text{Si elegimos como solución el punto medio del intervalo}$$

Si queremos determinar el número de iteraciones necesarias para alcanzar una precisión predeterminada  $\varepsilon > 0$ , bastará con elegir la longitud del intervalo final de forma que

$$\begin{aligned} |r - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon &\Rightarrow 2^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} \\ (n+1) \ln 2 = -\ln \varepsilon &\Rightarrow n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 2} \end{aligned}$$

### Método de Lagrange o de la regla falsi

Un defecto del método de bisección es que al dividir el intervalo  $[a, b]$  en dos mitades iguales, no toma en consideración las magnitudes de  $f(a)$  y  $f(b)$ . Por ejemplo, si  $f(a)$  es, en valor absoluto, mucho menor que  $f(b)$ , es lógico pensar que la raíz se encuentre más cerca de  $a$  que de  $b$ .

Este método alternativo intenta aprovechar esta idea. Al igual que el método de bipartición, este método trata de hallar la única raíz de la ecuación  $f(x)$  en  $[a, b]$ , siendo  $f(a)f(b) < 0$ . El método consiste en sustituir la curva  $f(x)$  por la cuerda que une los extremos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  cuya ecuación es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Si llamamos  $x_1$  al punto intersección de esta curva con el eje  $\overline{OX}$  tendremos

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) \end{aligned}$$

y despejando  $x_1$

$$x_1 = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

A continuación se determina en cuál de los intervalos  $[a, x_1]$  o  $[x_1, b]$  se encuentra la raíz  $r$ , comprobando dónde la función cambia de signo. Llamamos a ese intervalo  $[a_1, b_1]$  y volvemos a repetir el razonamiento anterior.

### Análisis del error en el método de Lagrange

Supongamos que los subintervalos obtenidos con el método de la Regula Falsi son de la forma

$$[a, b_k]$$

entonces el cálculo de la raíz se realiza a partir de la sucesión

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b \\ x_{n+1} &= \frac{af(x_n) - x_n f(a)}{f(x_n) - f(a)} \end{aligned} \right\}$$

Tomando  $g(x)$  como

$$g(x) = \frac{af(x) - xf(a)}{f(x) - f(a)}$$

si  $f(x)$  es derivable

$$g'(x) = \frac{(af'(x) - f(a))(f(x) - f(a)) - (af(x) - xf(a))f'(x)}{(f(x) - f(a))^2}$$

Si  $r$  es la raíz de  $f(x) = 0$ , buscada entonces

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{(af'(r) - f(a))(-f(a)) + rf(a)f'(r)}{(-f(a))^2} = \\ &= \frac{rf'(r) - (af'(r) - f(a))}{f(a)} = \\ &= \frac{(r - a)f'(r) + f(a)}{f(a)} \end{aligned}$$

Si  $f \in \mathcal{C}^2$  en un intervalo que contenga al intervalo  $[a, r]$ , entonces

$$f(a) = f(r) + f'(r)(a - r) + \frac{f''(\xi)}{2!}(a - r)^2$$

con  $\xi$  un punto intermedio entre  $a$  y  $r$ . Sustituyendo en la ecuación anterior

$$g'(r) = \frac{f''(\xi)}{2}(a-r)^2$$

Por tanto habrá convergencia local si

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2}(a-r)^2 \right| < 1$$

que será en general, lineal o de orden 1.

## Método de Newton-Raphson

Se trata de hallar la única raíz de  $f(x) = 0$  en  $[a, b]$  donde  $f(a)f(b) < 0$ , siendo  $f(x)$  derivable en  $(a, b)$ . La idea de este método consiste en sustituir la función  $f(x)$  por la tangente a la misma en uno de sus extremos. Si elegimos, por ejemplo, la tangente en el extremo superior, su ecuación toma la forma

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

Buscamos ahora el punto intersección entre esta recta y el eje  $\overline{OX}$ , donde  $y = 0$ , y lo llamamos  $x_1$ .

$$-f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$

despejando  $x_1$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Tomamos ahora ese nuevo punto, como partida para obtener el siguiente en la sucesión. De forma general si queremos calcular el punto  $x_{n+1}$  a partir de  $x_n$  utilizamos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Por tanto en este caso la función  $g(x)$  es

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

**Teorema 7 (Teorema de la convergencia local)** Si  $f''(x)$  es continua y  $f'(x)$  no se anula en algún intervalo que contenga a una raíz  $r$  de  $f(x) = 0$ , entonces  $\exists \varepsilon > 0$  tal que el método de Newton es convergente  $\forall x_0$  tal que  $|x_0 - r| \leq \varepsilon$ .

Si  $f'''(x)$  es continua, la convergencia es al menos cuadrática

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(r) = 0 < 1 \Rightarrow \text{Hay convergencia local}$$

$$g''(x) = \frac{(f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x))(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)f'(x)}{(f'(x))^4}$$

$$g''(r) = \frac{(f'(r))^3 f''(r)}{(f'(r))^4} = \frac{f''(r)}{f'(r)}$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n^2 g''(\xi_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1}{2} |g''(s)| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(s)}{f'(s)} \right|$$

**Teorema 8 (Teorema de la convergencia global)** Si  $f(x) \in C^2([a, b])$  verificando

1.  $f(a)f(b) < 0$
2.  $\forall x \in [a, b] \implies f'(x) \neq 0$  (monótona estricta)
3.  $\forall x \in [a, b] \implies f''(x)$  no cambia de signo

Entonces existe una única raíz  $r$  de  $f(x) = 0$ ,  $r \in [a, b]$  y la sucesión  $\{x_n\}$ , generada por el método de Newton-Raphson, converge hacia  $r$ ,  $\forall x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ .

## Método de la secante

Para el método de Newton-Raphson es preciso calcular el valor de la derivada de la función en cada punto  $f'(x)$ . Otra alternativa es que podemos aproximar el valor de esta derivada mediante la expresión

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

con lo que el cálculo de  $x_{n+1}$  queda como

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Esta expresión nos da el método de la secante, que como podemos comprobar se elabora a partir de 2 valores iniciales  $x_0$  y  $x_1$  para obtener el siguiente punto de la sucesión.

**Teorema 9** El orden de convergencia del método de la secante es

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618 \dots$$

## Aceleración de la convergencia. Método de Aitken

Observamos que los métodos anteriores para la resolución de ecuaciones no lineales consisten en la construcción de una sucesión de valores convergente (en el mejor de los casos) hacia la solución pedida. La rapidez de convergencia depende del método usado y de la propia ecuación. Los llamados *métodos de aceleración de convergencia* tienen como objetivo la obtención, a partir de la sucesión inicial  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , de otra sucesión  $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que converge más rápidamente hacia la raíz. Veamos uno de esos métodos

**Método de Aitken**

Supongamos que la sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tiene como límite  $\alpha$ , con  $x_k \neq \alpha$ , es tal que el error se comporta asintóticamente como una sucesión geométrica de razón menor que 1, en valor absoluto; es decir

$$x_{k+1} - \alpha = (L + \delta_k)(x_k - \alpha)$$

con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0, |L| < 1$$

entonces, la sucesión  $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$  dada por

$$x_k^* = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \quad (k \geq 0)$$

está bien definida para  $k$  suficientemente grande y cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^* - \alpha}{x_k - \alpha} = 0$$

Por tanto  $\{x_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge hacia  $\alpha$  más rápidamente que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , este método permite, así, acelerar la convergencia de métodos con convergencia lineal.

**Sistemas no-lineales****Introducción**

En esta sección se exponen, para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, dos métodos numéricos que son generalizaciones de los métodos ya estudiados en el caso de una ecuación no lineal: el método de iteración simple y el de Newton. Aunque en principio los métodos son válidos para sistemas con cualquier número de ecuaciones, vamos a limitarnos al caso de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que se escribirán como

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

o equivalentemente como

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\}$$

y teniendo en cuenta la notación

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

podemos poner el sistema como

$$x = g(x)$$

## Método de iteración simple

Partimos de un punto

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

y construimos la sucesión

$$x^{(0)} \text{ dado}$$

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$

**Teorema 10** Sea  $I$  el intervalo cerrado de  $\mathbb{R}^2$ , dado por

$$I = [a, b] \times [c, d]$$

1.  $\forall x \in I \Rightarrow g(x) \in I$
2.  $\forall x, y \in I \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|$  para  $0 \leq L \leq 1$

Entonces  $\forall x^{(0)} \in I$  la sucesión  $\{x^{(n)}\}$  generada por el algoritmo anterior converge a una única solución de la ecuación

$$x = g(x)$$

Cuando una función  $g(x)$  cumple las hipótesis del teorema anterior, se dice que es *contractiva*.

## Método de Newton para sistemas de ecuaciones

Consideremos un sistema escrito en la forma

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde suponemos que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son diferenciables con continuidad. Utilizando la notación vectorial

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

el sistema se expresa en la forma  $f(x) = 0$ .

Si suponemos ahora que la matriz Jacobiana es regular en un entorno de la solución,

es decir

$$\det(Df(x)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

El objetivo del método de Newton es generar una sucesión de vectores  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$  que converja hacia la solución buscada, a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$  adecuado, construyendo la sucesión de forma recurrente mediante

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(Df(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

que es una generalización a dimensión dos del método de Newton para una ecuación en una variable.

El método de Newton acostumbra a formularse de la siguiente manera:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

con  $\Delta x^{(k)}$  cumpliendo el sistema lineal

$$Df(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

Así en lugar de calcular la inversa de la matriz jacobiana en cada iteración, solamente hay que resolver un sistema lineal.

Cuando el cálculo de las derivadas parciales de  $f_1$  y  $f_2$  sea demasiado complicado, es necesario aproximarlas mediante sus cocientes incrementales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) &\simeq \frac{f_1(x_1 + h_1, x_2) - f_1(x_1, x_2)}{h_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &\simeq \frac{f_1(x_1, x_2 + h_2) - f_1(x_1, x_2)}{h_2} \end{aligned}$$

y, análogamente para la función  $f_2$ . Los valores de  $h_1$  y  $h_2$  han de elegirse de manera conveniente. Una variante del método de Newton, que se llama *método de Steffensen*, consiste en tomar  $h_1 = f_1(x^{(k)})$  y  $h_2 = f_2(x^{(k)})$ .