2 Interpolación polinómica

Introducción

El problema de la interpolación consiste en calcular el valor de una función en un punto, cuando o bien no se conoce la expresión explícita de dicha función, o bien no es fácil evaluar la expresión de dicha función en ese punto. El problema se resuelve construyendo una función fácil de evaluar y que coincida con la función objeto del problema en los datos que conocemos sobre esta.

A menudo se proporcionan datos mediante un conjunto de puntos discretos, sin embargo a veces se requieren estimaciones de puntos entre esos valores discretos. Trataremos alguna técnica de ajuste de curvas de manera que con tales datos se obtengan aproximaciones intermedias. Además, a veces se requiere una versión simplificada de una función complicada. Una forma de hacerlo es calcular los valores de la función en un conjunto de datos discreto a lo largo del rango de interés, después se obtiene un función más simple utilizando estos valores.

También, en problemas reales, es normal tener un conjunto finito (discreto) de puntos en los cuales de un modo experimental, se ha observado el valor de una función, y siendo conveniente obtener una aproximación a dicha función, a partir de los datos conocidos. A esta idea se la conoce como interpolar, y para el caso más sencillo, la interpolación polinómica, consiste en calcular polinomios que se ajusten a los datos conocidos y nos proporcionen valores aproximados a la función en otros puntos.

Básicamente hay que concretar dos cuestiones en un problema de interpolación:

1. Los datos que se desea que sean comunes a la función dada y a la función interpolante.

2. El tipo de función que se va a utilizar como función interpoladora o función de interpolación.

Los problemas de interpolación más usuales son los siguientes

Problema de interpolación polinomial de Lagrange

Supongamos que conocemos los valores de una función $f(x)$ en $(n+1)$ puntos distintos, $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, dentro del intervalo $[a,b]$; el problema de la interpolación polinomial de Lagrange consiste en hallar, si existe, un polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ tal que coincida con la función $f(x)$ en los puntos x_k, es decir que ocurra

$$P_n(x_k) = f_k \qquad k = 0, \ldots, n$$

donde se ha utilizado la notación

$$f_k = f\left(x_k\right)$$

Problema de interpolación de Taylor

Si conocemos los valores de una función $f\left(x\right)$ y los de sus derivadas sucesivas hasta el orden n en un punto x_0 de su dominio, el problema de interpolación de Taylor consiste en hallar un polinomio $T_n\left(x\right)$ de grado $\leq n$ tal que

$$T_n^{(k)}\left(x_0\right) = f^{(k)}\left(x_0\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

siendo $T_n^{(k)}\left(x\right)$ y $f^{(k)}\left(x\right)$ las derivadas k–ésimas de $T_n\left(x\right)$ y $f\left(x\right)$ respectivamente, entendiendo que $f^{(0)}\left(x\right) = f\left(x\right)$ y $T_n^{(0)}\left(x\right) = T_n\left(x\right)$.

Para realizar este tipo de interpolación la función $f\left(x\right)$ debe ser suficientemente derivable, al menos en el entorno de un único punto x_0.

El polinomio $T_n\left(x\right)$ no sólo interpola a $f\left(x\right)$ en dicho punto, sino también sus derivadas interpolan a las derivadas de $f\left(x\right)$ en x_0 hasta un cierto orden n dado.

Problema de interpolación de Hermite

En esta ocasión, se suponen conocidos los valores tanto de $f\left(x\right)$ como los de su derivada $f'\left(x\right)$ en los puntos $x_0, \ldots, x_n$ (que indicamos por f_i y f_k', para $k = 0, \ldots, n$, respectivamente) y se trata de hallar un polinomio $H_n\left(x\right)$ de grado $\leq 2n+1$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} H_n\left(x_k\right) = f_k \\ \\ H_n'\left(x_k\right) = f_k' \end{array}\right\} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Problema de interpolación trigonométrica

Para funciones con ciertas propiedades, como la periodicidad, podemos utilizar frente a las funciones polinómicas empleadas en los tipos de interpolación anteriores, funciones trigonométricas. Si se conocen los valores de $f\left(x\right)$ en $(2n+1)$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_{2n}$, dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$, tratamos de hallar un polinomio trigonométrico $S_n\left(x\right)$ de grado n definido como

$$S_n\left(x\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_j \cos kx + b_k \sin kx$$

y tal que

$$S_n\left(x_j\right) = f_j \qquad j = 0, \ldots, 2n$$

Interpolación de Lagrange

En este tema desarrollaremos en profundidad el tipo de interpolación polinomial de Lagrange. Según se ha indicado en la sección anterior, en este tipo de interpolación y partiendo de los valores conocidos de una función $f\left(x\right)$ en $(n+1)$ puntos diferentes

$\{x_0, \ldots, x_n\}$, se trata de hallar un polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ que tome en los puntos anteriores el mismo valor que la función en esos puntos, es decir

$$P_n(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, \ldots, n$$

El caso más sencillo de interpolación se nos presenta cuando sólamente tenemos un punto, x_0, y se conoce el valor de la función en dicho punto $f_0 = f(x_0)$, obviamente este caso es trivial y el único polinomio de grado 0 que pasa por ese punto es el polinomio constante $P_0(x) = f_0$.

Interpolación lineal

El caso más sencillo de interpolación no trivial es el de interpolación lineal. Supongamos que conocemos el valor de una función $f(x)$ en dos puntos distintos x_0 y x_1, tendremos por tanto dos puntos en el plano

$$(x_0, f(x_0)) \text{ y } (x_1, f(x_1))$$

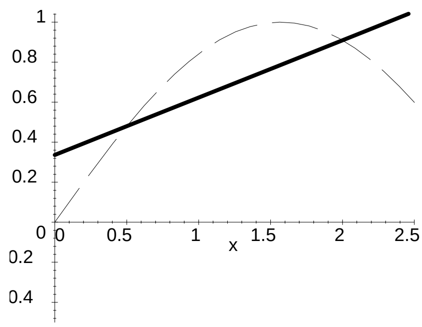
La ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos tiene la siguiente forma

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

y despejando la variable y obtenemos

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{1}$$

Esta recta es un polinomio de grado 1 que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, cumple por tanto con la definición de polinomio interpolador, $y = P_1(x)$. Gráficamente



Interpolación lineal.

Ejemplo 1 *Supongamos que conocemos el valor de una función $f(x)$ en los siguientes puntos*

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ \\ f(3) &= 5 \end{aligned}$$

y nos piden encontrar un valor aproximado para $f(2)$ utilizando el polinomio interpolador de grado 1 adecuado.

Para ello utilizaremos la ecuación 1 , es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,2)$ *y* $(3,5)$. *Sustituyendo en el lugar correspondiente se obtiene*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + \frac{f(3)-f(0)}{3-0}(x-0) = 2 + \frac{5-2}{3-0}x \\ P_1(x) &= 2+x \end{aligned}$$

y el valor aproximado de la función en el punto 2 *utilizando esta interpolación será*

$$f(2) \simeq P_1(2) = 2+2 = 4$$

Para la construcción del polinomio interpolador de primer grado es posible utilizar un método alternativo. Este método es el siguiente: Sabiendo que el polinomio que pasa por $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ tiene que ser de grado ≤ 1, entonces tiene que tener la forma

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Si ahora utilizamos las hipótesis que tiene que cumplir $P_1(x)$, es decir debe coincidir con la función $f(x)$ en los puntos x_0 y x_1, obtenemos

$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= f_0 \\ P_1(x_1) &= f_1 \end{aligned}$$

y al utilizar la expresión para $P_1(x)$ resulta el siguiente sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 x_0 = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = f_1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

en las incógnitas a_0 y a_1. Resolviendo el sistema obtendremos los coeficientes a_0 y a_1 y por tanto la expresión del polinomio de interpolación.

El sistema lineal tendrá solución si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0 \Longleftrightarrow x_1 \neq x_0$$

es decir, los puntos han de ser diferentes, tal y como se ha planteado en las hipótesis iniciales.

Ejemplo 2 *Vamos a repetir el ejemplo anterior, utilizando este método alternativo. El sistema que se obtiene es*

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 * 0 = 2 \\ a_0 + a_1 * 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a_0 = 2 \\ a_0 + a_1 * 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{array}\right\}$$

y de nuevo obtenemos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = 2 + x$$

Si tenemos un conjunto de puntos diferentes, $\{x_k\}_{k=0}^n$, y conocemos el valor de una determinada función $f(x)$ en esos puntos, es posible aplicar interpolación lineal entre cada par de puntos para obtener una función polinomial a trozos de primer grado que aproxime a la función. No obstante, la otra opción es mejorar esta aproximación mediante polinomios de grado superior a uno, ofreciendo además la derivabilidad del polinomio interpolador en todos los puntos, hecho que no sucede si consideramos el polinomio interpolador lineal a trozos, ya que en este caso el polinomio resultante, no será derivable en ninguno de los puntos x_k.

Interpolación cuadrática

En la línea de la sección anterior, tratamos ahora de buscar un polinomio $P_2(x)$ de grado ≤ 2 que pase por tres puntos diferentes x_0, x_1 y x_2, en los cuales conocemos el valor de una determinada función $f(x)$. Llamaremos polinomio de interpolación cuadrática o *parábola de interpolación* asociada a $f(x)$ a una función $P_2(x)$ que pasa por los puntos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

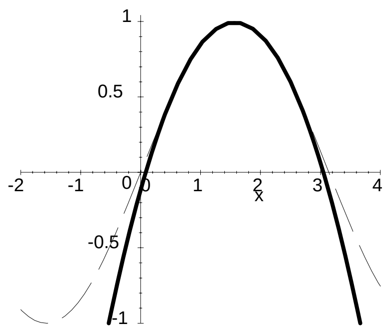
al polinomio $P_2(x)$ dado por

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Es sencillo comprobar que $P_2(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, 1, 2$, por ejemplo para $k = 0$

$$\begin{aligned} P_2(x_0) &= \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x_0-x_0)(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\ &= 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) + 0 \cdot f(x_2) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

de forma completamente análoga se comprueba para los puntos x_1 y x_2. Gráficamente



Interpolación cuadrática.

Ejemplo 3 *Calcularemos en este ejemplo el polinomio interpolador cuadrático que* *pasa por*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 3 \\ f(5) &= 2 \end{aligned}$$

y utilizaremos dicho polinomio para obtener el valor aproximado de $f(x)$ *en los puntos* $x = 1$ *y* $x = 4$.

*Utilizamos fórmula 3***??** *para obtener*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)}1 + \frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)}3 + \frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)}2 \\ &= \frac{(x-2)(x-5)}{10} + \frac{x(x-5)}{-2} + \frac{x(x-2)}{15}2 \\ &= -\frac{4}{15}x^2 + \frac{23}{15}x + 1 \end{aligned}$$

El valor de la función en los puntos pedidos es

$$\begin{aligned} f(1) &\cong P_2(1) = \frac{34}{15} \\ f(4) &\cong P_2(4) = \frac{43}{15} \end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta el razonamiento efectuado para el caso lineal, es posible obtener la parábola de interpolación otro modo. Procediendo como antes, en primer lugar tenemos en cuenta que el polinomio $P_2(x)$ debe ser de grado ≤ 2, por tanto tendrá la forma

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

En segundo lugar como ha de pasar por los puntos (x_0, f_0), (x_1, f_1) y (x_2, f_2), se deben cumplir las siguientes relaciones

$$\left.\begin{aligned} P_2(x_0) \equiv f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ P_2(x_1) \equiv f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ P_2(x_2) \equiv f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Y la solución del problema pasa por resolver el sistema lineal en las incógnitas a_0, a_1 y a_2. El sistema tendrá solución única siempre que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0$$

condición que de nuevo es equivalente a tomar todos los puntos distintos dos a dos.

Ejemplo 4 *Para los datos del ejemplo anterior se obtiene el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 = 1 \\ \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = 3 \\ \\ a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 2 \end{array}\right\}$$

cuyo matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$$

y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23/15 \\ -4/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y el polinomio es

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 + \frac{23}{15}x - \frac{4}{15}x^2$$

que, como no podía ser de otra forma, coincide con el contrado anteriormente.

Interpolación polinómica general. Polinomio de Lagrange.

Siguiendo con la idea anterior podemos buscar ahora, para un conjunto de puntos distintos $\{x_k\}_{k=0}^n$, en los cuales es conocido el valor de una función $f(x)$,$\{f_k = f(x_k)\}_{k=0}^n$, el polinomio interpolador de grado $\leq n$ que pasa por todos. Tenemos el siguiente teorema

Teorema 1 *Sean* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *un conjunto de* $(n+1)$ *puntos distintos dos a dos y supongamos que conocemos el valor de una función* $f(x)$ *en esos puntos* $\Longrightarrow \exists^\circ\, P_n(x)$ *polinomio interpolador de grado* $\leq n$ *que pasa por los puntos*

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

y puede expresarse como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Dicho polinomio se llama Polinomio interpolador de Lagrange de grado n *que pasa por los puntos* $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^n$.

Demostración: La existencia de dicho polinomio es inmediata, puesto que por la construcción de $P_n(x)$, es fácil comprobar que se trata de un polinomio de a lo sumo grado n. Además también podemos comprobar, sin más que evaluar el polinomio en x_k, que pasa por los puntos $(x_k, f(x_k))$ $k = 0, 1, \ldots, n$.

Para la unicidad, vamos a suponer que existe otro polinomio $Q_n(x)$ también de grado $\leq n$ y que también pase por los puntos $\{x_k\}_{k=0}^n \Rightarrow Q_n(x_k) = f_k \; \forall k = 0, 1, \ldots, n$. Construimos el polinomio

$$R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

Por las hipótesis sobre $P_n(x)$ y $Q_n(x)$, la función $R_n(x)$ también es un polinomio de grado $\leq n$. Si ahora evaluamos dicho polinomio en los puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$ se obtiene

$$R_n(x_k) = P_n(x_k) - Q_n(x_k) = f_k - f_k = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

y $R_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que tiene $(n+1)$ raíces, pero si recordamos el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, pero $R_n(x)$ es de grado $\leq n$ y tiene $(n+1)$, así que la única opción válida es que $R_n(x)$ sea el polinomio nulo, es decir, $R_n(x) = 0$, de aquí se obtiene que los polinomios $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son en realidad el mismo polinomio.

Si definimos los polinomios de grado n, $L_k(x)$ para $k = 0, \dots, n$, como

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \prod_{j=0;j\neq k} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \end{aligned}$$

entonces

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$$

Luego el polinomio $P_n(x)$ buscado se puede expresar como

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + \cdots + f_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

Los polinomios $L_k(x)$ reciben el nombre de *polinomios de Lagrange*.

Igual que en los dos casos anteriores es posible encontrar el polinomio interpolador resolviendo el sistema lineal que resulta de aplicar la hipótesis del grado a $P_n(x)$ y a su paso por los puntos $(x_k, f(x_k))_{k=0}^n$.

Por una parte, como $P_n(x)$ tiene grado $\leq n$, podrá expresarse de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

por otra, como $P_n(x)$ pasa por los puntos $(x_k, f(x_k))$ para $k = 0, \dots n$, resulta

$$\left.\begin{array}{c} P_n(x_0) \equiv f_0 = a_0 + +a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ \\ P_n(x_1) \equiv f_1 = a_0 + +a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ P_n(x_n) \equiv f_n = a_0 + +a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n \end{array}\right\}$$

que es un sistema lineal cuyo determinante de la matriz de coeficientes es el llamado determinante de *Vandermonde*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

que es distinto de 0 si todos los puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$ son distintos dos a dos.

Ejemplo 5 *Calcularemos el polinomio interpolador de Lagrange para el siguiente conjunto de puntos*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(4) &= 2 \\ f(6) &= 0 \end{aligned}$$

Después utilizaremos dicho polinomio para obtener un valor aproximado para $f(1)$ y $f(3)$.

Como hay 4 puntos, el polinomio interpolador será como mucho de grado 3 y puede expresarse como

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Como $f(x)$ y $P_3(x)$ coinciden en los puntos dados.

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 = 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 6 + a_2 \cdot 6^2 + a_3 \cdot 6^3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de los coeficientes del polinomio a_k

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{-11}{12} \\ a_2 &= \frac{5}{8} \\ a_3 &= \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

El polinomio resulta

$$P_3(x) = 1 - \frac{11}{12}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

y el valor en los puntos pedidos se obtiene sustituyendo directamente

$$\begin{aligned} f(1) &\simeq P_3(1) = \frac{5}{8} \\ f(3) &\simeq P_3(3) = \frac{13}{8} \end{aligned}$$

Estimación del error de Interpolación

Cuando la función $f(x)$ es conocida, entonces podemos encontrar una expresión para el error cometido entre el verdadero valor de la función en un punto y el valor que el polinomio de interpolación correspondiente toma en dicho punto.

Proposición 1 *Sean* $\{x_k\}_{k=0}^n \in [a,b]$, $n+1$ *puntos distintos. Supongamos que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. *Entonces*

$$\forall x \in [a,b]; \exists \theta_x \in [a,b] : E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

Demostración:
Sea $x \neq x_j$; $j = 0, \ldots n$. Construímos la función

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - (f(x) - P_n(x))\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$$

Por construcción, esta función es de clase $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, y además

$$\begin{aligned} g(x_k) &= 0 \quad k = 0, \ldots, n \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

y tiene por tanto $n+2$ raíces distintas en $[a,b]$. Utilizamos ahora el teorema de Rolle generalizado (aplicando sucesivamente el teorema de Rolle). A partir de estos $(n+2)$ ceros de $f(x)$, se deduce que la derivada $(n+1)$–ésima de $f(x)$ tendrá 1 cero, es decir, existirá un cierto $\theta_x \in [a,b]$ tal que $g^{n+1}(\theta_x) = 0$, es decir

$$0 = g^{(n+1)}(\theta_x) = f^{(n+1)}(\theta_x) - P_n^{(n+1)}(\theta_x) - (f(x) - P_n(x))\frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}}\left[\prod\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}\right]_{t=\theta_x}$$

Como $P_n(t)$ es de grado $n \Rightarrow P_n^{(n+1)}(x) = 0$.
Por otra parte como

$$\prod\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}t^{n+1} + \left(b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0\right)$$

su derivada $(n+1)$–ésima será

$$\frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}}\left[\prod\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}\right]_{t=\theta_x} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

y sustituyendo en la ecuación correspondiente

$$0 = f^{(n+1)}(\theta_x) - (f(x) - P_n(x))\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

despejando, se obtiene ahora el resultado pedido.

Según el teorema de Rolle si $f(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que $f'(\xi) = 0$. Por tanto entre cada dos ceros consecutivos de $f(x)$, $f'(x)$ tiene uno. Por tanto, si $f(x)$ tiene n ceros diferentes $\Rightarrow f'(x)$ tendrá $(n-1)$ ceros y si ahora $f(x) \in \mathcal{C}^2[a,b]$, entonces $f''(x)$ tendrá $n-2$ ceros diferentes y así sucesivamente.

Corolario 1 *En las condiciones del teorema anterior* $f^{(n+1)}(\theta_x) = (n+1)! \cdot g(x)$, *siendo*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{L(x)} & x \neq x_k \\ \dfrac{f'(x) - P_n'(x)}{L(x)} & x = x_k \end{cases}$$

con $L(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$

Demostración: Trivial si $x \neq x_k$ y utilizando la regla de L'Hôpital para $x = x_k$.

Lema 1 *Sean* $\{x_k\}_{k=0}^{n} \in [a, b]$, $(n + 1)$ *puntos distintos dos a dos. Supongamos que* $f(x) \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. *Entonces*

$$\exists \delta \in [a, b] : f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\delta)}{n!}$$

Demostración: Haciendo

$$g(x) = f(x) - P_n(x) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$$

Además $g(x)$ tiene $(n + 1)$ raíces $\Rightarrow g^{(n)}(x)$ tiene al menos una raíz (utilizando el teorema de Rolle generalizado) $\Rightarrow \exists \delta$ talque $g^{(n)}(\delta) = 0$

$$g^{(n)}(\delta) = f^{(n)}(\delta) - P_n^{(n)}(\delta) = 0$$

Si utilizamos la formula del polinomio de interpolación en su forma de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

y derivando hasta la derivada n-ésima

$$P_n^{(n)}(x) = f[x_0, \ldots x_n] \cdot n!$$

deduciéndose el resultado buscado

$$f^{(n)}(\delta) - f[x_0, \ldots x_n] \cdot n! = 0$$

Método de Neville.

El método anterior, aunque nos da una expresión para el polinomio de interpolación de un conjunto de datos, es muy engorroso de utilizar, ya que conlleva gran cantidad de cálculos. Además cada vez que realizamos otra nueva medición, o incorporamos un nuevo punto al conjunto de puntos inicial, tendremos que calcular de nuevo toda la expresión del polinomio haciendo muy costoso y nada manejable dicho método. Vamos a ver a continuación un método que nos permite calcular el valor en un punto del polinomio de interpolación para $(n + 1)$ puntos, a partir del polinomio de interpolación para n puntos. Este método tiene la ventaja de que si introducimos un nuevo punto en el conjunto de datos iniciales el coste operacional para calcular el valor del nuevo polinomio de interpolación en el mismo punto es mucho menor que en el método de Lagrange. La desventaja es que si queremos calcular el valor del polinomio de interpolación en otro punto, tendremos que volver a realizar todos los cálculos.

Proposición 2 *Sean* $\{x_k\}_{k=0}^{n}, x_1, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ *puntos distintos, donde se conoce el valor de una función* $f(x)$. *Llamaremos* $Q_i(x)$ *y* $Q_j(x)$, *con* $i \neq j$, *respectivamente* *a los polinomios de interpolación de Lagrange para los conjuntos de puntos siguientes*

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n\} \quad \longrightarrow \quad Q_i\,(x)$$

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n\} \quad \longrightarrow \quad Q_j\,(x)$$

Entonces el polinomio de interpolación que pasa por los $(n+1)$ *puntos puede expresarse como*

$$P_n(x) = \frac{(x-x_i)Q_i(x) - (x-x_j)Q_j(x)}{x_j - x_i}$$

Demostración: Por construcción $P_n(x)$ es de grado $\leq n$. Veamos ahora que pasa por los $(n+1)$ puntos x_k.

Si $k \neq i, j$

$$P_n(x_k) = \frac{(x_k-x_i)Q_i(x_k) - (x_k-x_j)Q_j(x_k)}{x_j - x_i}$$

Como $x_k \neq x_i$ y $x_k \neq x_j \Rightarrow Q_i(x)$ y $Q_j(x)$ pasan por ese punto $\Rightarrow Q_i(x_k) = Q_j(x_k) = f_k$

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= \frac{(x_k-x_i)f_k - (x_k-x_j)f_k}{x_j - x_i} \\ &= \frac{(x_k-x_i-x_k+x_j)f_k}{x_j - x_i} \\ &= \frac{(x_j-x_i)f_k}{x_j - x_i} = f_k \end{aligned}$$

Si $k = i$ (análogamente para $k = j$)

$$P_n(x_i) = \frac{(x_i-x_i)Q_i(x_i) - (x_i-x_j)Q_j(x_i)}{x_j - x_i}$$

El polinomio $Q_i(x)$ no pasa por el punto x_i y no conocemos cuanto vale $Q_i(x_i)$ pero tampoco importa porque va multiplicado por un factor 0. Para el polinomio $Q_j(x)$, como $i \neq j \Rightarrow$Este polinomio pasa por $(x_i, f(x_i))$

$$\begin{aligned} P_n(x_i) &= \frac{0 \times Q_i(x_i) - (x_i-x_j)f_i}{x_j - x_i} \\ &= \frac{-(x_i-x_j)f_i}{x_j - x_i} = f_i \end{aligned}$$

Y por tanto el polinomio $P_n(x)$ de grado n, pasa por todos los puntos $x_0, \ldots, x_n$ y por la unicidad será el polinomio de interpolación que pase por $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^{n}$.

A partir de la proposición anterior, es posible construir un algoritmo que de forma recursiva calculará en un punto dado, el valor del polinomio de interpolación de un conjunto de puntos $x_0, \ldots, x_n$. La construcción es la siguiente. Partiendo de los polinomios de interpolación de grado 0, polinomios constantes, para cada uno de los puntos individuales, $x_0, \ldots, x_n$, calculamos los polinomio de grado 1, que une dos puntos consecutivos. A partir de estos nuevos polinomios y siguiendo la relación dada en la proposición anterior, calcularemos los polinomios de interpolación de grado 2, para cada trío de puntos consecutivos, y así sucesivamente hasta construir el polinomio de interpolación que pasa por todos los puntos. El esquema sería el siguiente

$$
\begin{array}{cccccc}
Q_0(x) & & & & & \\
 & Q_{0,1}(x) & & & & \\
Q_1(x) & & Q_{0,1,2}(x) & & & \\
\vdots & Q_{1,2}(x) & \vdots & \dots & Q_{0,\dots,n-1}(x) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & Q_{0,\dots,n}(x) = P_n(x) \\
 & Q_{n-2,n-1}(x) & \vdots & \dots & Q_{1,\dots,n}(x) & \\
Q_{n-1}(x) & & Q_{n-2,n-1,n}(x) & & & \\
 & Q_{n-1,n}(x) & & & & \\
Q_n(x) & & & & &
\end{array}
$$

donde

$$Q_k(x) = f(x_k); \quad k = 0, \dots, n$$

y para cada $k = 0, \dots, n$ y $j = k+1, \dots, n$

$$Q_{k,k+1,\dots,k+j}(x) = \frac{(x - x_k)Q_{k+1,\dots,k+j-1,k+j}(x) - (x - x_{k+j})Q_{k,k+1,\dots,k+j-1}(x)}{(x_{k+j} - x_k)}$$

En este algoritmo la inclusión de un nuevo punto no implica la realización de todos los cálculos. Serán útiles los realizados hasta ese momento. Por ejemplo si incluimos un nuevo punto x_{n+1} al conjunto inicial tendremos

$$
\begin{array}{cccccc}
Q_0(x) & & & & & \\
 & Q_{0,1}(x) & & & & \\
Q_1(x) & & & & & \\
\vdots & Q_{1,2}(x) & \dots & Q_{0,\dots,n-1}(x) & & \\
\vdots & \vdots & & & Q_{0,\dots,n}(x) & \\
 & Q_{n-2,n-1}(x) & \dots & Q_{1,\dots,n}(x) & & \underline{Q_{0,\dots,n+1}(x)} \\
Q_{n-1}(x) & & & & \underline{Q_{1,\dots,n+1}(x)} & \\
 & Q_{n-1,n}(x) & & \underline{Q_{2,\dots,n+1}(x)} & & \\
Q_n(x) & & \dots & & & \\
 & \underline{Q_{n,n+1}(x)} & & & & \\
\underline{Q_{n+1}(x)} & & & & &
\end{array}
$$

Siendo ahora el nuevo polinomio de interpolación $P_{n+1}(x) = Q_{0,\dots,n+1}(x)$. Veamos un ejemplo para clarificar el método.

Ejemplo 6 *Calcula el valor de $f(1)$ a partir de la tabla siguiente*

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1
1	2	3
2	5	2

utilizando para ello el método de Neville.

Utilizaremos el esquema de Neville, tomando $x = 1$

$$Q_0(1) = f_0 = 1$$

$$Q_{0,1}(1) = \frac{(1-0)3-(1-2)1}{2-0} = 2$$

$$Q_1(1) = f_1 = 3 \qquad\qquad Q_{0,1,2}(1) = \frac{(1-0)\frac{10}{3}-(1-5)2}{5-0} = \frac{34}{15}$$

$$Q_{1,2}(1) = \frac{(1-2)2-(1-5)3}{5-2} = \frac{10}{3}$$

$$Q_2(1) = f_2 = 2$$

por lo tanto el valor del polinomio que interpola a los tres puntos iniciales en el punto 1 *alcanza el valor* $34/15$.

Supongamos que obtenemos un nuevo dato $f(x_3) = 1$, *con* $x_3 = 4$, *con esta información vamos a calcular ahora el valor para* $f(1)$, *para ello añadimos el punto* $x_3 = 4$, *para el que* $f(x_3) = 1$, *podemos utilizar los cálculos previos y solamente es necesario incluir una fila dentro del esquema anterior (donde por claridad hemos puesto el último cálculo en una nueva línea)*

$$Q_0(1) = 1$$

$$Q_{0,1}(1) = 2$$

$$Q_1(1) = 3 \qquad\qquad Q_{0,1,2}(1) = \frac{34}{15}$$

$$Q_{1,2}(1) = \frac{10}{3}$$

$$Q_2(1) = 2 \qquad\qquad \underline{Q_{1,2,3}(x) = \frac{(1-2)(-2)-(1-4)\frac{10}{3}}{4-2} = 6}$$

$$\underline{Q_{2,3}(1) = \frac{(1-5)1-(1-4)2}{4-5} = -2}$$

$$\underline{Q_3(1) = 1}$$

$$\underline{Q_{0,1,2,3}(x) = \frac{(1-0)6-(1-4)\frac{34}{15}}{4-0} = \frac{16}{5}}$$

Y el valor del nuevo polinomio interpolador en $x = 1$ *es* $\frac{16}{5}$.

Como hemos dicho al principio, este método resulta útil para estimar el valor del polinomio en un punto, pero del mismo modo tendríamos el problema de repetir todos los cálculos desarrollados, si se pretende calcular los valores del polinomio interpolador en diferentes puntos.

Método de las diferencias divididas. Fórmula de Newton

Si el polinomio pasa por los $(n+1)$ puntos $x_0, \ldots, x_n$, distintos dos a dos, entonces también puede expresarse como

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (4)$$

Para determinar los coeficientes a_j, utilizamos la hipótesis de interpolación y $P_n(x)$ debe coincidir con $f(x)$ en los puntos x_j, $j = 0, \ldots, n$

$$P_n(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, \ldots, n$$

Para el caso $j = 0$ obtenemos

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

Utilizaremos la siguiente notación

$$f[x_j] = f(x_j) \qquad (5)$$

por tanto

$$a_0 = f[x_0]$$

Ahora es posible obtener mediante recurrencia los distintos coeficientes a_j de $P_n(x)$. Por ejemplo, para el cálculo de a_1, utilizamos la relación

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

Despejando el coeficiente a_1 y teniendo en cuenta que $a_0 = f(x_0)$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

o utilizando la notación

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Si definimos la *primera diferencia dividida de* $f(x)$ en x_j y x_{j+1} como

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f[x_{j+1}] - f[x_j]}{x_{j+1} - x_j} \tag{6}$$

podemos poner

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

Para hallar un procedimiento general, veamos que sucede con a_2. Este coeficiente se obtiene calculando el valor del polinomio de interpolación en el punto x_2 y teniendo en cuenta que dicho valor tiene que ser $f(x_2)$

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

Utilizando los valores obtenidos para a_0 y a_1, junto con la notación anterior

$$f[x_2] = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Despejamos a_2 para obtener su valor

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\left(f[x_2] - (f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0))\right)$$

Sumamos y restamos $f[x_1] = f(x_1)$ en el numerador de la función y separamos en fracciones

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f[x_2] - f[x_1] + f[x_1] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f[x_2] - f[x_1]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Utilizamos la notación para la primera diferencia dividida de x_1 y x_2

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}$$

Multiplicando y dividiendo ahora la segunda fracción por el factor $(x_1 - x_0)$, y de nuevo utilizando la definición de primera diferencia dividida

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} + \frac{f[x_1] - f[x_0](x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} + \frac{f[x_0, x_1](x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Sacamos factor común en las dos últimas fracciones y realizamos todas las operaciones

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{f[x_1,x_2]}{(x_2-x_0)} + \frac{f[x_0,x_1]}{(x_2-x_1)}\left(\frac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}-1\right) \\
&= \frac{f[x_1,x_2]}{(x_2-x_0)} + \frac{f[x_0,x_1]}{(x_2-x_1)}\left(\frac{(x_1-x_0)-(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)}\right) \\
&= \frac{f[x_1,x_2]}{(x_2-x_0)} + \frac{f[x_0,x_1]}{(x_2-x_1)}\left(\frac{(x_1-x_2)}{(x_2-x_0)}\right) \\
&= \frac{f[x_1,x_2]}{(x_2-x_0)} - \frac{f[x_0,x_1]}{(x_2-x_0)} \\
&= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{(x_2-x_0)-(x_2-x_0)}
\end{aligned}
$$

La última expresión se denota como $f[x_0,x_1,x_2]$ y se llama la *segunda diferencia dividida* de $f(x)$ en x_0, x_1 y x_2. De forma general podemos definir para tres puntos culesquiera la segunda diferencia dividida en función de las primeras diferencias divididas de la siguiente forma

$$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1},x_{j+2}]-f[x_j,x_{j+1}]}{x_{j+2}-x_j} \tag{7}$$

Siguiendo con el mismo razonamiento, definimos la diferencia dividida de orden $(k+1)$ para $f(x)$ en $(k+1)$ puntos distintos, en términos de dos diferencias divididas de orden k como

$$f[x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1},\ldots,x_{j+k}]-f[x_j,\ldots,x_{j+k-1}]}{x_{j+k}-x_j} \tag{8}$$

Si a_k es el coeficiente k–ésimo del polinomio de interpolación en la forma indicada en entonces

$$a_k = f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \tag{9}$$

Este método nos conduce a un algoritmo recursivo para el cálculo del polinomio de interpolación

$$
\begin{array}{cccccc}
f[x_0] & & & & & \\
 & f[x_0,x_1] & & & & \\
f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & & \\
\vdots & f[x_1,x_2] & \vdots & \ldots & f[x_0,\ldots,x_{n-1}] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \\
 & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \vdots & \ldots & f[x_1,\ldots,x_n] & \\
f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & & & \\
 & f[x_{n-1},x_n] & & & & \\
f[x_n] & & & & &
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta que el valor de a_k dado en la ecuación , se obtiene de forma rápida el polinomio de interpolación

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Esta expresión para el polinomio de interpolación se denomina *Polinomio de interpolación en la forma de Newton.*

La incorporación de un nuevo punto a los datos iniciales no implica la realización de todo el cálculo para el nuevo conjunto de datos. Puesto que el polinomio de grado $n+1$ será de la forma

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) + a_{n+1}(x-x_0)\ldots(x-x_n) \\ &= P_n(x) + a_{n+1}(x-x_0)\ldots(x-x_n) \end{aligned}$$

y solamente habrá que incorporar el sumando $a_{n+1}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$, pero teniendo en cuenta la expresión , entonces

$$a_{n+1} = f[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}]$$

Resumiendo, solamente hay que calcular este último coeficiente. Para ello y utilizando la tabla anterior, donde los nuevos elementos incorporados aparecen subrayados, calculamos el coeficiente que nos falta.

$$\begin{array}{cccccc}
f[x_0] & & & & & \\
 & f[x_0,x_1] & & & & \\
f[x_1] & & \cdots & & & \\
\vdots & f[x_1,x_2] & & f[x_0,\ldots,x_{n-1}] & & \\
\vdots & \vdots & & & f[x_0,x_1,\ldots,x_n] & \\
 & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \cdots & f[x_1,\ldots,x_n] & & \underline{f[x_0,\ldots,x_{n+1}]} \\
f[x_{n-1}] & & & & \underline{f[x_1,\ldots,x_{n+1}]} & \\
 & f[x_{n-1},x_n] & & \underline{f[x_2,\ldots,x_{n+1}]} & & \\
f[x_n] & & \cdots & & & \\
 & \underline{f[x_n,x_{n+1}]} & & & & \\
\underline{f[x_{n+1}]} & & & & &
\end{array}$$

Veamos un ejemplo de aplicación del método.

Ejemplo 7 *Calcularemos el valor de $f(1)$ a partir de la tabla siguiente*

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1
1	2	3
2	5	2

utilizando para ello el método de Newton. Posteriormente calcularemos de nuevo el valor de $f(1)$ sabiendo con un nuevo dato $f(x_3) = 1$, con $x_3 = 4$.

Utilizaremos el esquema de Newton

$$\begin{array}{ccc}
f[x_0] = 1 & & \\
 & f[x_0,x_1] = \frac{3-1}{2-0} = 1 & \\
f[x_1] = 3 & & f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-\frac{10}{3}-1}{5-0} = -\frac{4}{15} \\
 & f[x_1,x_2] = \frac{2-3}{5-2} = -\frac{1}{3} & \\
f[x_2] = 2 & &
\end{array}$$

El polinomio de interpolación $P_2(x)$ será en este caso

$$P_2(x) = 1 + 1(x-0) - \frac{4}{15}(x-0)(x-3) = 1 + \frac{23}{15}x - \frac{4}{15}x^2$$

y que en $x = 1$ toma el valor

$$P_2(1) = \frac{34}{15}$$

Si ahora introducimos el nuevo dato $x_3 = 4$ con $f(x_3) = 1$, obtenemos la nueva tabla

$$\begin{array}{llll}
f[x_0] = 1 & & & \\
 & f[x_0,x_1] = 1 & & \\
f[x_1] = 3 & & f[x_0,x_1,x_2] = -\frac{4}{15} & \\
 & f[x_1,x_2] = -\frac{1}{3} & & \\
f[x_2] = 2 & & \underline{f[x_1,x_2,x_3] = \frac{1-(-\frac{1}{3})}{4-2} = \frac{4}{6}} & \\
 & \underline{f[x_2,x_3] = \frac{1-2}{4-5} = 1} & & \\
\underline{f[x_3] = 1} & & &
\end{array}$$

$$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{\frac{4}{6} - (-\frac{4}{15})}{4-0} = \frac{7}{30}}$$

donde solamente hemos realizado los cálculos que están subrayados, ya que el resto puede utilizarse.

Diferencias finitas

En esta sección se expresa el polinomio de interpolación, cuando los puntos utilizados son equidistantes, es decir cuando

$$x_{k+1} - x_k = h$$

o de forma equivalente

$$x_k = x_0 + kh$$

Definición 1 *Dado un conjunto de puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$, definimos*

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{10}$$

llamada primera diferencia finita progresiva *del conjunto $\{x_k\}_{k=0}^n$.*

Si ahora definimos $x'_k = \Delta x_k$, tendremos un nuevo conjunto de puntos $\{x'_k\}_{k=0}^{n-1}$ al que podremos aplicar la ecuación para calcular su primera diferencia finita progresiva

$$\Delta x'_k = x'_{k+1} - x'_k \quad k = 0, \ldots, n-2$$

pero teniendo en cuenta la definición de x'_k

$$\begin{aligned}
\Delta x'_k &= x'_{k+1} - x'_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k) \\
&= x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k
\end{aligned} \tag{11}$$

A este valor se le llama *segunda diferencia finita progresiva* del conjunto $\{x_k\}_{k=0}^n$ y se denota como

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k \quad k = 0, \ldots, n-2$$

En general denotamos como m*–ésima diferencia finita progresiva* del conjunto $\{x_k\}_{k=0}^n$ a

$$\Delta^m x_k = \Delta(\Delta^{m-1}x_k) = \Delta^{m-1}x_{k+1} - \Delta^{m-1}x_k \quad k = 0, \dots, n-m$$

Análogamente podemos definir las diferencias finitas regresivas.

Definición 2 *Dado un conjunto de puntos* $\{x_k\}_{k=0}^n$*, definimos*

$$\nabla x_k = x_k - x_{k-1}; \quad k = 1, \dots, n \tag{12}$$

llamada primera diferencia finita regresiva *del conjunto* $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Si definimos $x_k^* = \nabla x_k$, tendremos un nuevo conjnto de puntos $\{x_k^*\}_{k=1}^n$ al que podremos aplicar la ecuación para calcular su primera diferencia finita regresiva

$$\nabla x_k^* = x_k^* - x_{k-1}^* \quad k = 2, \dots, n$$

pero teniendo en cuenta la definición de x_k^* $(k = 1, \dots, n)$.

$$\begin{aligned} \nabla x_k^* &= x_k^* - x_{k-1}^* = \nabla x_k - \nabla x_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) - (x_{k-1} - x_{k-2}) = \\ &= x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \end{aligned} \tag{13}$$

A este valor se le llama *segunda diferencia finita regresiva* del conjunto $\{x_k\}_{k=0}^n$, y se denota como

$$\nabla^2 x_k = \nabla x_{k+1} - \nabla x_k$$

En general denotamos como m*–ésima diferencia finita regresiva* del conjunto $\{x_k\}_{k=0}^n$, a

$$\nabla^m x_k = \nabla(\nabla^{m-1}x_k) = \nabla^{m-1}x_k - \nabla^{m-1}x_{k-1} \quad k = m, \dots, n$$

Fórmula de Newton utilizando diferencias finitas

Supongamos que tenemos un conjunto de $(n+1)$ puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$, distintos dos a dos y equidistantes. En ese caso el polinomio de interpolación en la forma de Newton admite una forma más compacta. Por una parte, recordemos que

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] \quad k = 0, 1, \dots, n$$

por otra y para simplificar, utilizaremos la siguiente notación

$$f(x_k) = f_k \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Con estas condiciones y para el caso $k = 1$ obtendremos

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

observemos que en el numerador se encuentra la primera diferencia finita progresiva de la familia de puntos $\{f_k\}_{k=0}^n$ por tanto

$$a_1 = \frac{\Delta f_0}{h}$$

y en general para puntos equidistantes tendremos

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h} \quad k = 0, \dots, n-1$$

Para el caso $k = 2$ y teniendo en cuenta lo anterior

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{\Delta f_1}{h} - \frac{\Delta f_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

por tanto, podemos escribir la segunda diferencia dividida en función de la segunda diferencia finita progresiva

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

y más generalmente, teniendo en cuenta la construcción recursiva de las diferencias divididas se obtiene

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

Por último el polinomio de interpolación de Newton puede expresarse como

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_n) \quad (14)$$

Conocida como *fórmula progresiva (o hacia adelante) de Newton-Gregory*.

Si definimos

$$\alpha = \frac{(x - x_0)}{h}$$

entonces

$$(x - x_k) = (x - x_0 - kh) = \alpha h - kh = (\alpha - k)h$$

que sustituido en la ecuación nos da como resultado

$$P_n(x) = f(x_0) + \Delta^1 f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}\alpha(\alpha - 1) + \ldots \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)$$

siendo la fórmula del error

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{n+1}(\theta_x)}{(n+1)!}h^{n+1}\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n)$$

Recordando la definición de número combinatorio para $m, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

podemos extender esta definición a cualquier par de números $\alpha \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}$$

y la expresión para la fórmula progresiva queda

$$P_n(x) = f(x_0) + \Delta^1 f(x_0)\alpha + \Delta^2 f(x_0)\binom{\alpha}{2} + \ldots \Delta^n f(x_0)\binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\Delta^k f(x_0)$$

donde

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \alpha$$

$$\Delta^0 f(x_0) = f(x_0)$$

Utilizando las diferencias regresivas llegamos a la fórmula

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{-\beta}{k}(-1)^k\nabla^k f(x_n)$$

siendo

$$\beta = \frac{x - x_n}{h}$$

$$\nabla f(x_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\nabla^k f(x_k) = \nabla \left(\nabla^{k-1} f(x_k) \right)$$