

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 1 \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} x'' + 9x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \\
 \text{(d)} \quad \begin{cases} x'' - 2x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} 2x'' - 4x' + 8x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor frontera:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad y'' - y' - 6y = 2 + 3x & \text{(b)} \quad y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3 & \text{(c)} \quad y'' - y' - 6y = 2e^{-3x} \\
 \text{(d)} \quad y'' - y' - 2y = 3e^{-x} & \text{(e)} \quad y'' - 8y' + 16y = e^{4x} & \text{(f)} \quad y'' - y' - 6y = 2 \cos(3x) \\
 \text{(g)} \quad y'' + 4y = 3 \sin(2x) & \text{(h)} \quad y'' + y = 2 \cos x & \text{(i)} \quad y'' - 2y' = 12x - 10
 \end{array}$$

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial para el oscilador armónico sin rozamiento y bajo la acción de una fuerza externa de tipo periódico

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La cantidad $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ se llama frecuencia natural del oscilador. Comprueba que si la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a ω_0 , entonces la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, es decir, demuestra que

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \infty, \quad t > 0.$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia y obviamente, debido a la analogía entre el oscilador armónico y el circuito RLC, también se da en este tipo de circuitos eléctricos.

5. Consideremos un circuito RLC con $R = 110$, $L = 1$, $C = 1/1000$, con unidades en el Sistema Internacional, y donde la fuerza electromotriz está dada por

$$E(t) = \begin{cases} 90, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Calcula la intensidad de corriente $I(t)$ que circula por el circuito, es decir, resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{d^2 I}{dt^2} + 110 \frac{dI}{dt} + 1000I = \frac{dE}{dt} \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 90 \end{cases}$$

6. Consideremos el problema de la Mecánica Cuántica que consiste en estudiar el movimiento de una partícula que se mueve libremente a lo largo del segmento $(0, L)$. Este problema se modeliza matemáticamente por medio del problema de contorno

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi(x), & 0 < x < L \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula, E es su energía, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda. Comprueba que los únicos valores de energía para los que el problema anterior tiene una solución no nula son

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n \geq 1.$$

Este fenómeno se conoce en Mecánica Cuántica como cuantización de la energía. Calcula $\psi_n(x)$ teniendo en cuenta que ψ_n son funciones de onda y por tanto $\int_0^L \psi_n^2(x) dx = 1$.

7. Calcula, en función del valor $\lambda \in \mathbb{R}$, las soluciones a los siguientes problemas de contorno. , es decir, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que los siguientes problemas tienen solución no nula:

$$(a) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

Los valores de λ para los que la solución es no trivial (no es nula) se denominan autovalores y las soluciones correspondientes se denominan autofunciones.