Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Soluciones Problemas Tema 6
Cálculo en varias variables
Integración múltiple de Riemann

1. Calcula las siguientes integrales dobles sobre los dominios indicados

   (a) $\iint_{\mathcal{R}} xy\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{R}=[0,1]\times[0,3]$

   (b) $\iint_{\mathcal{R}} ye^{x}\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{R}=[-1,1]\times[0,2]$

   (c) $\iint_{\mathcal{R}} y\cos(x)\,\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{R}=[0,\pi]\times[1,2]$

   (d) $\iint_{\mathcal{R}} y\arctan x\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{R}=[0,1]\times[0,1]$

   (e) $\iint_{\mathcal{D}} 2x\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

   (f) $\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2+y\right)\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

   (g) $\iint_{\mathcal{D}} (y+\ln x)\,\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq x\right\}$

   (h) $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,-1)\ \text{y}\ (1,1)$

   (i) $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,1)\ \text{y}\ (2,0)$

   (j) $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{4-y^2}\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=$ Recinto limitado por las curvas $y^2=2x$ e $y^2=8-2x$

   (k) $\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$ $\quad\mathcal{D}=$ Recinto limitado por las curvas $y=x^3$ e $y=x^2$

   (l) $\iint_{\mathcal{D}} e^{x/y}dxdy$ $\quad\mathcal{D}=$ Recinto limitado por las curvas $y^2=x$ y las rectas $x=0$ e $y=1$

Usamos el teorema de Fubini en todos los apartados

a) $\iint_{\mathcal{R}} xy\,dx\,dy \qquad \mathcal{R}=[0,1]\times[0,3]$

Integral doble sobre un rectángulo, como la función es continua, la función es integrable y por tanto las integrales iteradas coinciden:

$$\iint_{\mathcal{R}} xydxdy=\int_0^1 xdx\left(\int_0^3 ydy\right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_0^3 ydy=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=3}=\left[\frac{9}{2}\right]-[0]=\frac{9}{2}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_0^1 x\left(\frac{9}{2}\right)dx = \left[\frac{9}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{9}{4}\right] - [0] = \frac{9}{4}$$

b) $\iint_{\mathcal{R}} ye^x\,dx\,dy \qquad \mathcal{R} = [-1,1]\times[0,2]$

Integral doble sobre un rectángulo

$$\iint_{\mathcal{R}} ye^x dxdy = \int_{-1}^1 e^x dx\left(\int_0^2 ydy\right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_0^2 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2} = \left[\frac{4}{2}\right] - [0] = 2$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_{-1}^1 e^x\,(2)\,dx = [2e^x]_{x=-1}^{x=1} = [2e] - \left[2e^{-1}\right] = 4\,\mathrm{Sh}\,1.$$

c) $\iint_{\mathcal{R}} y\cos(x)\;dx\,dy \qquad \mathcal{R} = [0,\pi]\times[1,2]$

$$\iint_{\mathcal{R}} y\cos(x)\,dxdy = \int_0^\pi e^x dx\left(\int_1^2 ydy\right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_1^2 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2} = \left[\frac{4}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_0^\pi \cos(x)\left(\frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}\operatorname{sen}x\right]_{x=0}^{x=\pi} = [0] - [0] = 0.$$

d) $\iint_{\mathcal{R}} y\arctan x\,dx\,dy \qquad \mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$

$$\iint_{\mathcal{R}} y\arctan x dxdy = \int_0^1 \arctan x dx\left(\int_0^1 ydy\right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_0^1 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} = \left[\frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{2}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_0^1 \arctan x dx\left(\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x dx,$$

esta integral la hacemos por partes tomando $u = \arctan x$ y $dv = dx$, por tanto $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ y $v = x$

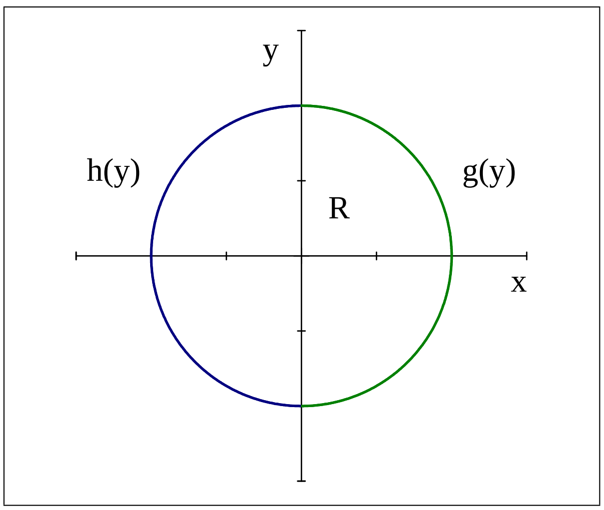
$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x dx = \frac{1}{2}\left[\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) - (0)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln(2)\right)$$

e) $\iint_{\mathcal{R}} 2x\,dx\,dy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$

Integral doble sobre un círculo de centro $(0,0)$ y radio 1 y que representamos en la siguiente gráfica



y que puede definirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1; -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}$$

En este caso se ha elegido expresar x en función de y, por la forma de la función del integrando $2x$, cuya primitiva es x^2 y permitirá eliminar la raíz cuadrada. Así, usando el teorema de Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} 2xdxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2xdx$$

Integramos primero respecto de x

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2xdx = \left[x^2\right]_{y=-\sqrt{1-y^2}}^{y=\sqrt{1-y^2}} = \left[\left(1-y^2\right)\right] - \left[1-y^2\right] = 0$$

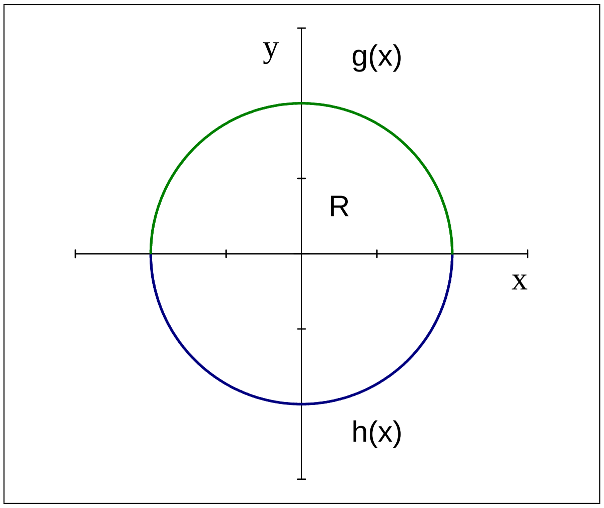
y el resultado lo integramos respecto de y

$$\int_{-1}^{1} 0dy = 0$$

f) $\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2+y\right)\, dx\, dy \qquad \mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\}$

Integral doble de una función continua sobre un círculo de centro $(0,0)$ y radio 1, notar que el conjunto es el mismo que el del apartado anterior, pero por la forma de la función, en este caso consideramos la siguiente definición del conjunto $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 1; -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$



de modo que

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2+y\right) dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y\right) dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y\right) &= \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\right]-\left[-x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\right] \\
&= 2x^2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{1-x^2}$$

para ello hacemos el cambio

$$x=\operatorname{sen} t \Rightarrow dx=\cos t dt \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x=-1 \Rightarrow -1=\operatorname{sen} t_0 \Rightarrow t_0=-\frac{\pi}{2} \\ \\ \text{Para } x=1 \Rightarrow 1=\operatorname{sen} t_1 \Rightarrow t_0=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

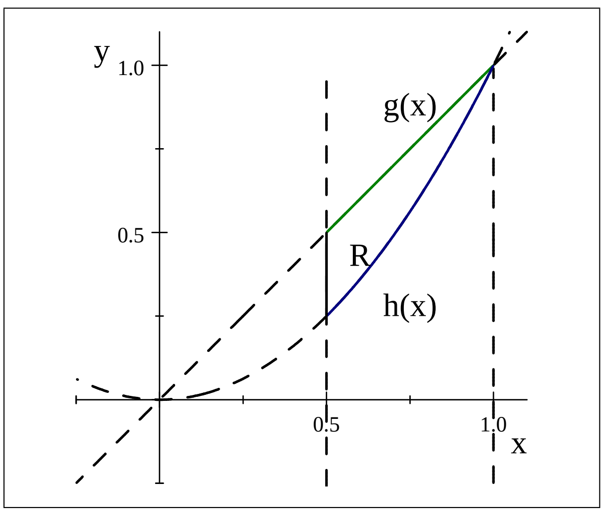
y calculamos la integral

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}^2 t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{4} dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t - \frac{\operatorname{sen} 4t}{16}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} \\ &= \left[\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}\right] - \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\operatorname{sen} 4\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{16}\right] \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

g) $\iint_{\mathcal{R}} (y+\ln x)\ dx\, dy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\right\}$

Representamos el conjunto $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\le x\le 1; x\le y\le x^2\right\}$$



Usamos el teorema de Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} (y+\ln x)\, dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} (y+\ln x)\, dy$$

y ahora integramos primero respecto de y

$$\begin{aligned}\int_{x^2}^{x} (y+\ln x)\, dy &= \left[\frac{1}{2}y^2 + y\ln x\right]_{y=x^2}^{y=x} = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\ln x\right] - \left[\frac{1}{2}x^4 + x^2\ln x\right] \\ &= \left(x-x^2\right)\ln x + \frac{1}{2}\left(x^2-x^4\right)\end{aligned}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}\left(x^2-x^4\right) + \left(x-x^2\right)\ln x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2-x^4\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x-x^2\right)\ln x dx$$

La primera integral es inmediata, mientras que la segunda integral se hace por partes, con $u = \ln x$, y $dv = \left(x - x^2\right) dx$ y por tanto $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ de forma que

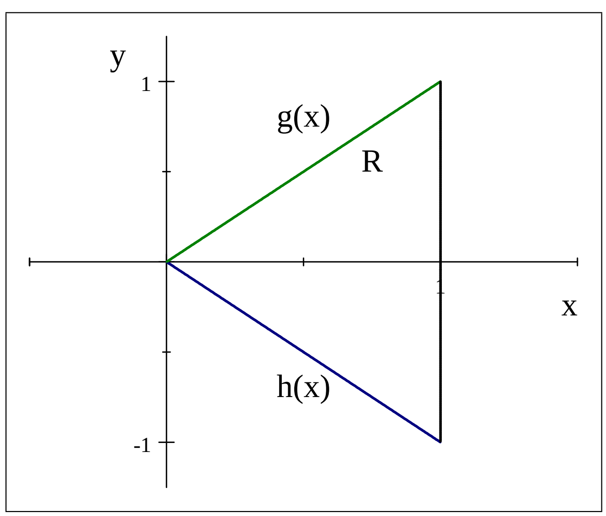
$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - x^2\right) \ln x dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \frac{1}{x} dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9}\right)
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right) + \left(x - x^2\right) \ln x\right) dx &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9}\right)\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\
&= \left[-\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{18}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\
&= \left[-\frac{13}{180}\right] - \left[-\frac{89}{2880} - \frac{1}{12}\ln 2\right] \\
&= \frac{1}{12}\ln 2 - \frac{119}{2880}
\end{aligned}$$

h) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy \qquad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,-1)$ y $(1,1)$

Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{D}$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1; -x \le y \le x\right\}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy$$

haciendo el cambio

$$y = x \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = x \cos t dt$$

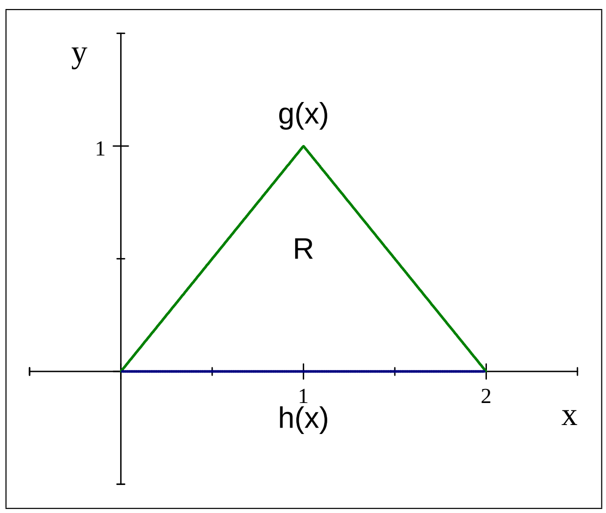
con extremos de integración $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2 - x^2 \operatorname{sen}^2 t} x \cos t \, dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 t \, dt = x^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\ &= x^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{t=-/2}^{t=\pi/2} = x^2 \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

y luego respecto de y

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

i) (i) $\iint_{\mathcal{R}} xy \, dx \, dy$ $\quad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$
Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{R}$ =Interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; h(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ g(x) &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La integral sería

$$\iint_{\mathcal{R}} xydxdy = \int_0^2 dx \int_{h(x)}^{g(x)} xy \, dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} xy \, dy$$

Integramos primero respecto de y cada una de las integrales

$$\int_0^x xy\ dy = \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}$$

$$\int_0^{2-x} xy\ dy = \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-x} = \frac{x\,(2-x)^2}{2} = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x$$

y después integramos respecto de x

$$\int_0^1 dx \int_0^x xy\ dy = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}.$$

$$\int_1^2 dx \int_0^{2-x} xy\ dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right]_{x=1}^{x=2} =$$

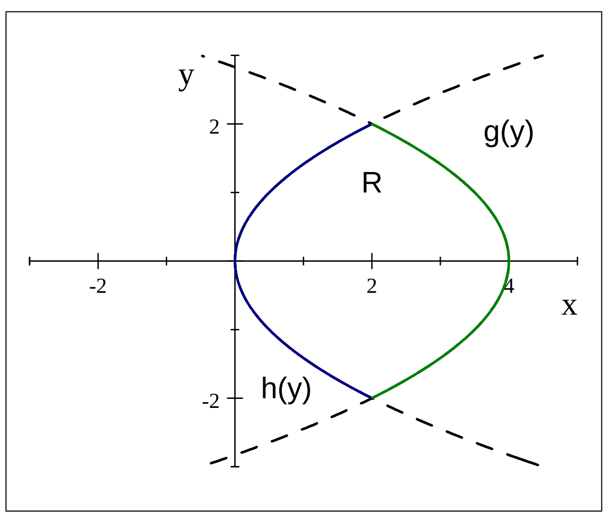
$$= \left[\frac{2^4}{8} - \frac{2^4}{3} + 2^2\right] - \left[\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 1\right] = \frac{2}{3} - \frac{11}{24} = \frac{5}{24}$$

La integral total será

$$\iint_{\mathcal{R}} xydxdy = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$$

j) (j) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{4-y^2}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$

Representamos la región $\mathcal{R}$ gráficamente



El punto de corte de las dos curvas y que determinará el rango de la y está determinado por las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 2x \\ y^2 = 8 - 2x \end{array}\right\} \Longrightarrow 2x = 8 - 2x \Rightarrow 4x = 8 \Longrightarrow x = 2$$

siendo los valores para la y

$$y^2 = 2x \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estará definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le y\le 2; h(y)\le x\le g(y)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le y\le 2; \frac{y^2}{2}\le x\le \frac{8-y^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{4-y^2}dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx$$

Integraremos respecto de x

$$\int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx = \sqrt{4-y^2}\left[\frac{8-y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right] = \sqrt{4-y^2}\left(4-y^2\right) = \left(4-y^2\right)^{3/2}$$

y después integraremos respecto de y

$$\int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx = \int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2} dy$$

Hacemos el cambio

$$y = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2 = 4\operatorname{sen}^2 t\\ 4-y^2 = 4-4\operatorname{sen}^2 t = 4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right) = 4\cos^2 t\\ dy = 2\cos t dt\end{array}\right.$$

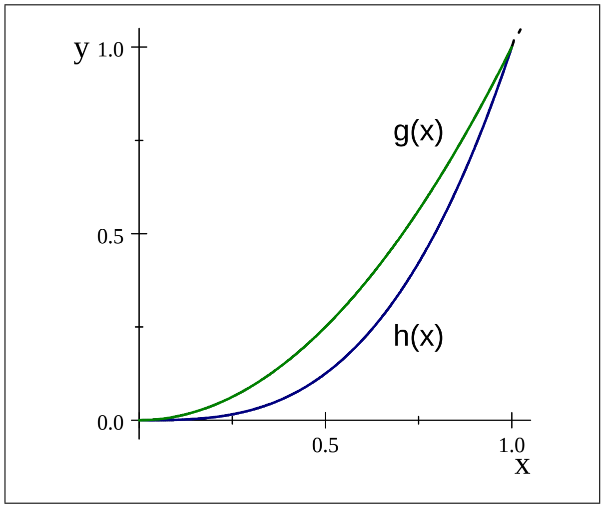
y los extremos de integración son

$$\left\{\begin{array}{c} y=-2 \Rightarrow -2 = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}\\ \\ y = 2 \Rightarrow 2 = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2} dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\cos^2 t\right)^{3/2} 2\cos t dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^2 t\right)^2 dt\\ &= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{\cos 2t}{2}\right) dt\\ &= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1+\cos 4t}{2}}{4}+\frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 4t}{8}+\frac{\cos 2t}{2}\right) dt\\ &= 16\left[\frac{3}{8}t+\frac{\operatorname{sen} 4t}{16}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = 6\pi.\end{aligned}$$

k) (k) $\iint_{\mathcal{R}}\left(x^2+y^2\right) dx\, dy$ $\quad\mathcal{R}$ = Recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$
Representamos la región $\mathcal{R}$ gráficamente



El punto de corte de las dos curvas y que determinará el rango de la x está determinado por las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ \\ y = x^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^2\,(x-1) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ \\ x_1 = 0 \end{array}\right.$$

siendo los valores para la y

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ \\ y_1 = 0 \end{array}\right.$$

de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estará definido por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1; x^3 \le y \le x^2\right\}$$

y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy$$

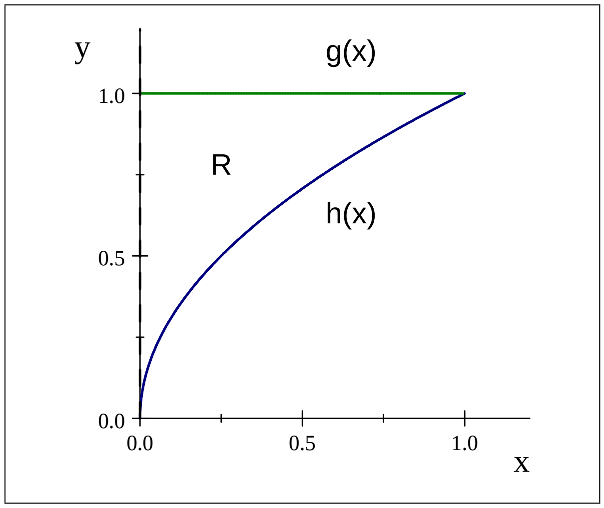
Integraremos respecto de y

$$\int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^3}^{y=x^2} = \left[x^4 + \frac{x^6}{3}\right] - \left[x^5 + \frac{x^9}{3}\right]$$

y después integraremos respecto de x

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - x^5 - \frac{x^9}{3}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{30}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

l) $\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy$ $\quad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$ Podemos representar a la región $\mathcal{R}$ gráficamente como



El punto de corte de las dos curvas es el $(1,1)$ de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estaría definido por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\right\}$$

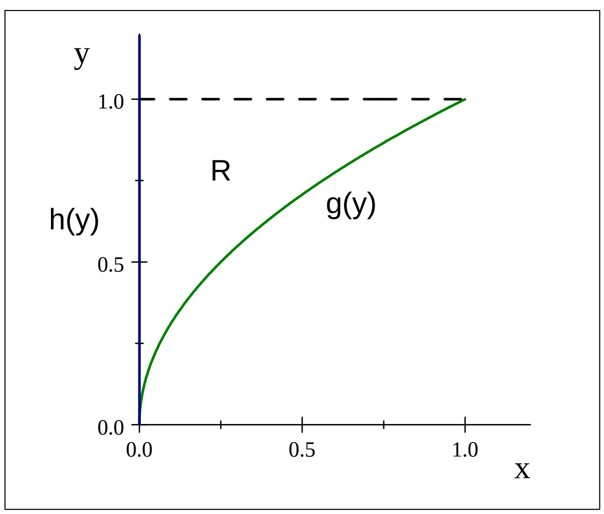
y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy$$

Integraremos respecto de y

$$\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy$$

La función no tiene primitiva conocida respecto de y, así que vamos a intentar cambiar el orden de integración



y el conjunto podría definirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq y^2\right\}$$

de este modo

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y} dx$$

Y podemos integrar respecto de x

$$\int_0^{y^2} e^{x/y}dx = y\int_0^{y^2} \frac{1}{y}e^{x/y}dx = \left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{x=y^2} = \left[ye^{y^2/y}\right] - \left[ye^{0/y}\right] = [ye^y] - [y] = ye^y - y$$

y ahora integrar respecto de y por partes

$$\int_0^1 ye^y - ydy = \left[(y-1)\,e^y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \left[(1-1)\,e^1 - \frac{1}{2}\right] - \left[(0-1)\,e^0 - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

Recordemos que el cambio a polares implica

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

con

$$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

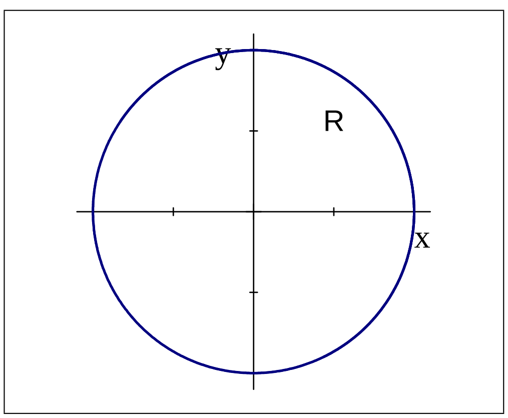
a) $\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2\le 1\right\}$

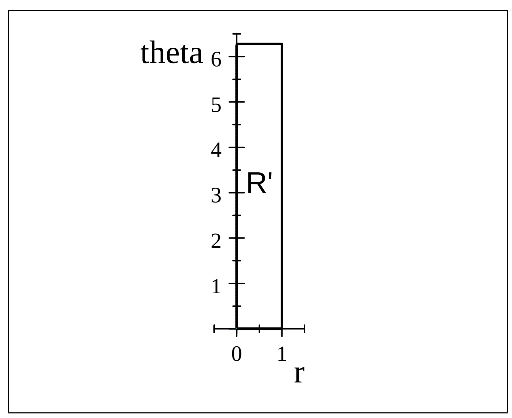
El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2\le 1\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta)\in\mathbb{R} \mid 0\le r\le 1; 0\le\theta\le 2\pi\}$$





La función

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = e^{r^2}$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} e^{r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^1 re^{r^2}dr = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

y ahora respecto de θ

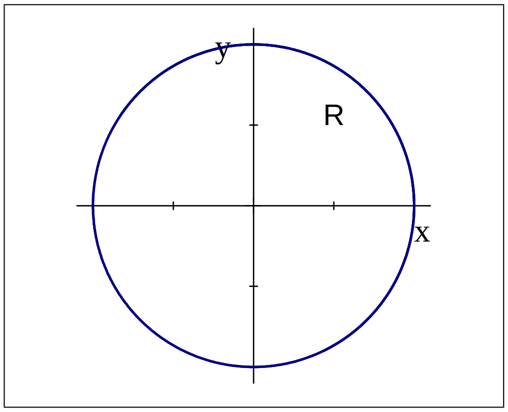
$$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right)d\theta = \pi\,(e-1)$$

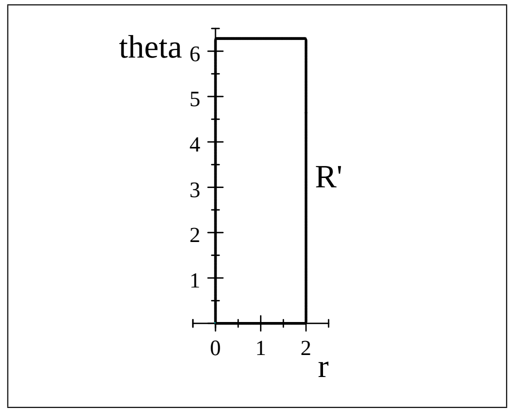
b) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)^3}\, dx\, dy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 4\right\}$
El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$





La función

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) = r^3$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)^3} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} r^3 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^4 dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^2 r^4 dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{2^5}{5}$$

y ahora respecto de θ

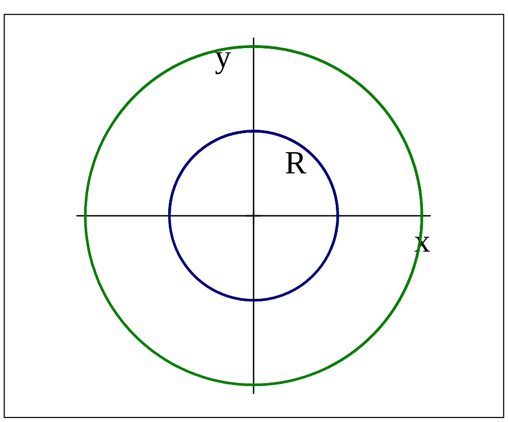
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^4 dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}\right) d\theta = \frac{64\pi}{5}$$

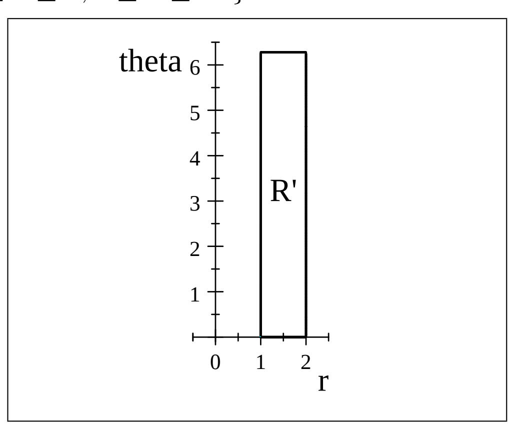
c) $\iint_{\mathcal{R}} \ln\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy \qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$
El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

se transforma en

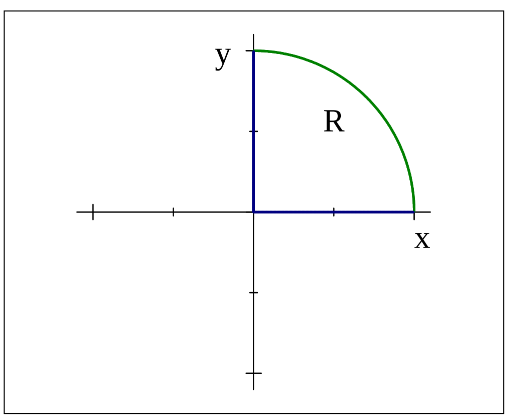
$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

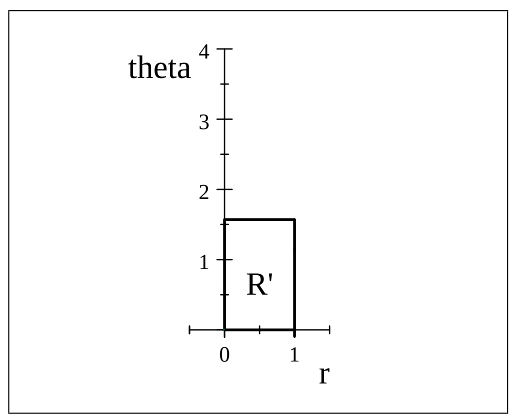




La función
$$f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \ln r^2 = 2\ln r$$
Al realizar el cambio de variable
$$\iint_{\mathcal{R}} \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} 2r\ln r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 2r\ln(r)\ dr$$
Integramos primero respecto de r
$$\int_1^2 2r\ln(r)\ dr = \left[r^2\ln(r) - \frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2} = (4\ln(2)-2) - \left(0-\frac{1}{2}\right) = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$$
y ahora respecto de θ
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 2r\ln(r)\ dr = \int_0^{2\pi}\left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right) d\theta = \pi(8\ln 2 - 3)$$

d) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$
El conjunto
$$\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$
se transforma en
$$\mathcal{R}' = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R} \mid 0\le r\le 1; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$





La función se transforma en
$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r$$
Y la integral
$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} r^2\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\, dr$$
Integramos primero respecto de r
$$\int_0^1 r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$$
y ahora respecto de θ
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\, dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

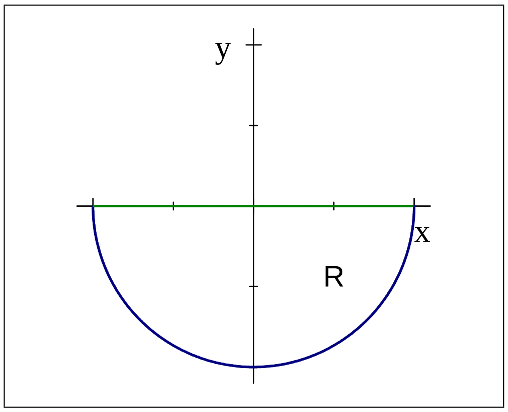
e) $\iint_{\mathcal{R}} e^{\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy \qquad \mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1,\ y\le 0\right\}$

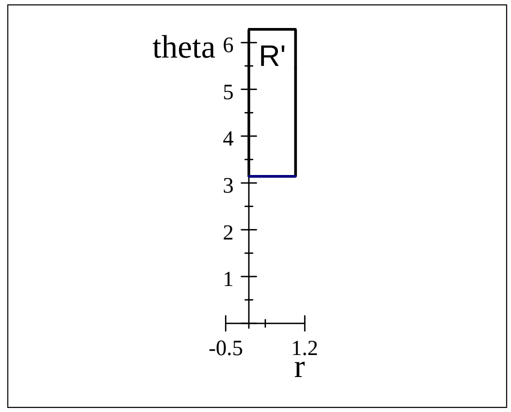
El conjunto

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}'=\{(r,\theta)\in\mathbb{R} \mid 0\le r\le 1; \pi\le\theta\le 2\pi\}$$





La función se transforma en

$$f(x,y)=e^{\left(x^2+y^2\right)} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)=e^{r^2}$$

Y la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} re^{r^2}\, drd\theta = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{r^2}\, dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^1 re^{r^2} dr = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

y ahora respecto de θ

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{r^2}\, dr = \int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1) =$$

3. Calcula utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

   Para calcular el área de un conjunto $\mathcal{R}$, se utiliza la integral doble de función $f(x,y)=1$ sobre ese conjunto.

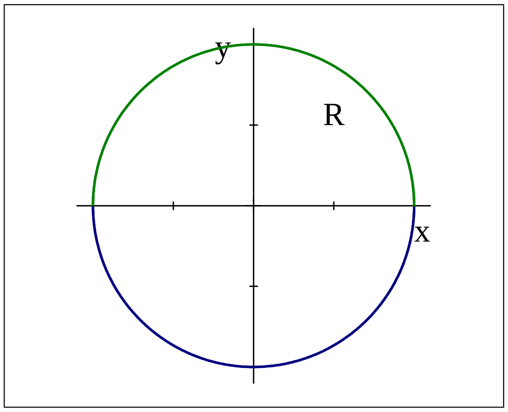
   a) El interior de la circunferencia de radio R.

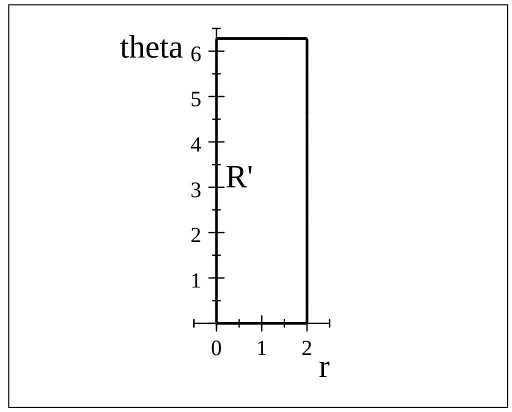
   Solución: El conjunto es

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R\right\}$$

o en polares

$$\mathcal{R}'=\{(r,\theta)\in\mathbb{R} \mid 0\le r\le R; 0\le\theta\le 2\pi\}$$





Si lo hacemos en coordenadas cartesianas

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$$

de forma que integrando respecto de y

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2-x^2}$$

y ahora respecto de x

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx$$

que podemos resolver mediante el cambioHacemos el cambio

$$x = R\operatorname{sen} t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 t \\ R^2 - x^2 = R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t = R^2 \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right) = R^2 \cos^2 t \\ dx = R\cos tdt \end{array} \right.$$

y los extremos de integración son

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -R \Rightarrow -R = R\operatorname{sen} t \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ \\ x = R \Rightarrow R = R\operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

lo que nos da

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 tdt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ 2R^2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} &= 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

También podemos realizar la integral con cambio a polares. Mientras que la función es la misma

$$f(x,y) = 1 \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 1$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr$$

Si integramos primero respecto de r

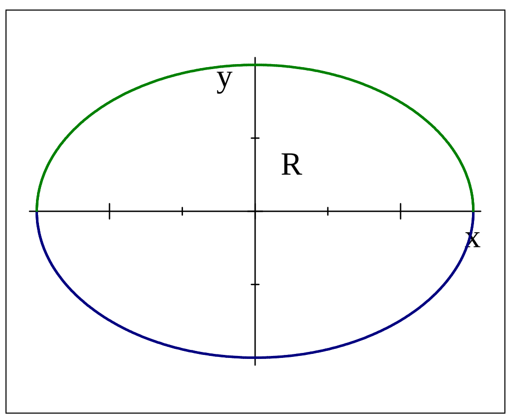
$$\int_0^R rdr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=-R}^{r=R} = \frac{R^2}{2}$$

y ahora respecto de θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

$b)$ El interior de la elipse de semiejes a y b.
Solución: El conjunto es

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$



Si lo hacemos en coordenadas cartesianas, entonces podemos despejar y en función de la x

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

y el dominio se puede expresar como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a; \ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

y la integral sobre R sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

de forma que integrando respecto de y

$$\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

y ahora respecto de x

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

la integral es idéntica a la realizada en el apartado anterior cambiando a por R, así que podemos poner

$$2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \pi a^2$$

y por tanto

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{b}{a}2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$$

Podemos hacer un cambio a coordenadas elípticas, que vendrían dadas por

$$\begin{aligned} x &= ra\cos\theta \\ y &= rb\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

donde en este caso

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

y la función sería

$$f(x,y) = 1 \Rightarrow f(ar\cos\theta, ar\operatorname{sen}\theta) = 1$$

mientras que el Jacobiano de este cambio sería

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\operatorname{sen}\theta \\ b\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\operatorname{sen}\theta \\ b\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} abrdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abrdr$$

Si integramos primero respecto de r

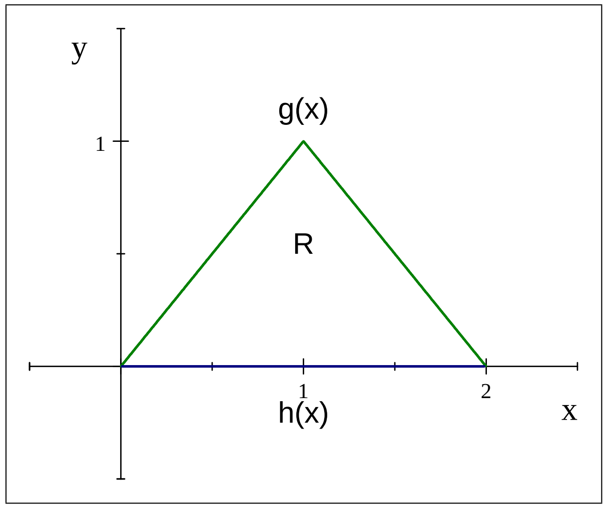
$$\int_0^1 abrdr = \left[ab\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{ab}{2}$$

y ahora respecto de θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abrdr = \int_0^{2\pi}\frac{ab}{2}d\theta = 2\pi\frac{ab}{2} = \pi ab.$$

$c)$ El interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

Solución: Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{R}$ = Interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; h(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ g(x) &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La integral sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_0^2 dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy$$

Integramos primero respecto de y cada una de las integrales

$$\begin{aligned} \int_0^x dy &= [y]_{y=0}^{y=x} = x \\ \int_0^{2-x} dy &= [y]_{y=0}^{y=2-x} = 2 - x \end{aligned}$$

y después integramos respecto de x

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy &= \int_1^2 (2 - x) \, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} = \\ &= [4 - 2] - \left[2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La integral total será

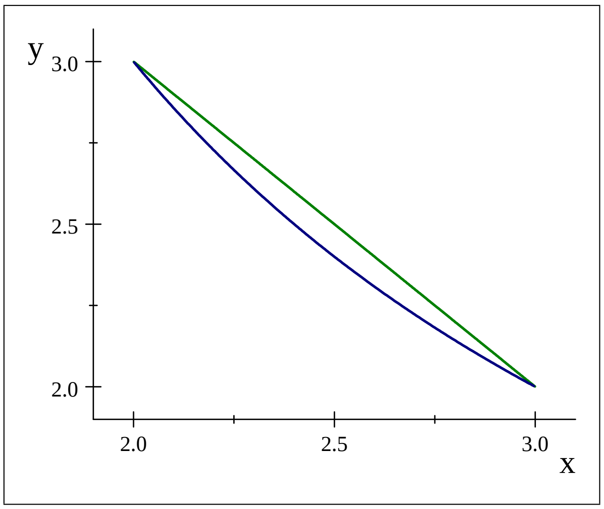
$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

d) La región delimitada por la recta $x+y=5$ y la curva $xy=6$.
Solución: Vamos a determinar los puntos de corte de las dos curvas, resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y=5 \\ xy=6 \end{array}\right\} \Rightarrow x\,(5-x)=6 \Leftrightarrow -x^2+5x=6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

Por tanto los puntos de corte son

$$\begin{array}{c}(3,2)\\(2,3)\end{array}$$



Despejamos y en función de x de ambas curvas

$$\begin{aligned} xy &= 6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{x} \\ x+y &= 5 \Leftrightarrow y=5-x \end{aligned}$$

y el dominio puede definirse como:

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2\leq x\leq 3; \frac{6}{x}\leq y\leq 5-x\right\}$$

La integral buscada sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy=\int_2^3 dx\int_{h(x)}^{g(x)}\ dy=\int_2^3 dx\int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy=[y]_{y=6/x}^{y=5-x}=(5-x)-\frac{6}{x}$$

y después integramos respecto de x

$$\int_2^3 dx \int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy = \int_2^3 (5-x) - \frac{6}{x} dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 6\ln x\right]_{x=2}^{x=3} =$$

$$\left[15 - \frac{9}{2} - 6\ln 3\right] - \left[10 - \frac{4^2}{2} - 6\ln 2\right]$$

$$= \left(15 - \frac{9}{2} - 6\ln 3\right) - \left(10 - \frac{4^2}{2} - 6\ln 2\right)$$

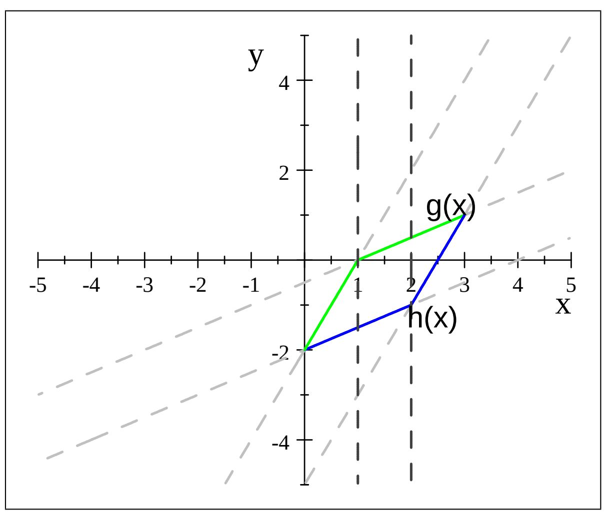
$$= 6\ln 2 - 6\ln 3 + \frac{17}{2} = 6\ln\frac{2}{3} + \frac{17}{2}$$

4. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} xydxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x-2y-1=0$, $2x-y-5=0$, $x-2y-4=0$ y $2x-y-2=0$, efectuando el cambio de coordenadas $x = \frac{-u+2v}{3}$ y $y = \frac{v-2u}{3}$

Vamos a realizar la integral en primer lugar, sin realizar el cambio de variable. Puntos de corte

$$(0,-2)$$
$$(1,0)$$
$$(2,-1)$$
$$(3,1)$$

El dominio está representado en la siguiente gráfica:



Se comprueba fácilmente que el dominio está definido por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3;\ h(x) \le y \le g(x)\right\}$$

donde las funciones $h(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas a trozos definidas a partir de las ecuaciones de las rectas como

$$\begin{aligned} x-2y-1 &= 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ 2x-y-5 &= 0 \Rightarrow y = 2x-5 \\ x-2y-4 &= 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \\ 2x-y-2 &= 0 \Rightarrow y = 2x-2 \end{aligned}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 2x - 5 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El cálculo de la integral, usando el teorema de Fubini es

$$\iint_{\mathcal{R}} xy\,dx\,dy = \int_0^3 \int_{h(x)}^{g(x)} xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x-2}^{2x-2} xy\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x-2}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy + \int_2^3 dx \int_{2x-5}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy$$

Calculamos las integrales dependientes de y :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}x-2}^{2x-2} xy\,dy &= x \int_{\frac{1}{2}x-2}^{2x-2} y\ dy = x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{2}x-2}^{y=2x-2} = \frac{x}{2}\left[(2x-2)^2 - \left(\frac{1}{2}x-2\right)^2\right] \\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{15}{4}x^2 - 6x\right) = \frac{15}{8}x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}x-2}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy &= x \int_{\frac{1}{2}x-2}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} y\,dy = x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{2}x-2}^{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x-2\right)^2\right] \\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{8}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{2x-5}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy &= x \int_{2x-5}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} y\,dy = x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=2x-5}^{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2 - (2x-5)^2\right] \\ &= \frac{x}{2}\left(-\frac{15}{4}x^2 + \frac{39}{2}x - \frac{99}{4}\right) = -\frac{15}{8}x^3 + \frac{39}{4}x^2 - \frac{99}{8}x \end{aligned}$$

y a ahora integramos cada uno de esos resultados respecto de x en el intervalo correspondiente++

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x-2}^{2x-2} xy\,dy = \int_0^1 \left(\frac{15}{8}x^3 - 3x^2\right) dx = -\frac{17}{32}$$

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x-2}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy = \int_1^2 \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{8}x\right) dx = -\frac{17}{16}$$

$$\int_2^3 dx \int_{2x-5}^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} xy\,dy = \int_2^3 \left(-\frac{15}{8}x^3 + \frac{39}{4}x^2 - \frac{99}{8}x\right) dx = \frac{11}{32}$$

: El valor de la integral sería

$$-\frac{17}{32} - \frac{17}{16} + \frac{11}{32} = -\frac{5}{4}$$

Calculemos ahora el valor haciendo el cambio de variable indicado. Con $x = \dfrac{-u+2v}{3}$ e $y = \dfrac{v-2u}{3}$, las ecuaciones de las rectas se transforman en

$$\begin{aligned} x - 2y - 1 &= 0 \Rightarrow \left(\frac{-u+2v}{3}\right) - 2\left(\frac{v-2u}{3}\right) - 1 = 0 \Rightarrow (-u+2v) - 2(v-2u) - 3 = 0 \\ &\Rightarrow -u + 2v - 2v + 4u - 3 = 0 \Rightarrow u = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y - 5 &= 0 \Rightarrow 2\left(\frac{-u+2v}{3}\right) - \left(\frac{v-2u}{3}\right) - 5 = 0 \Rightarrow 2(-u+2v) - (v-2u) - 15 = 0 \\ &\Rightarrow -2u + 4v - v + 2u - 15 = 0 \Rightarrow v = 5 \end{aligned}$$

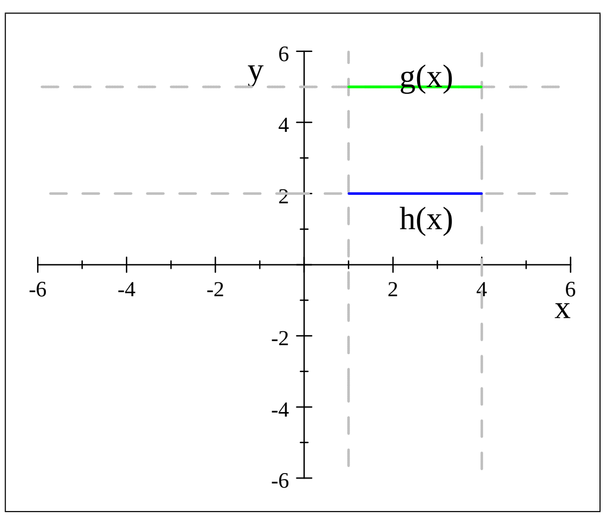
$$\begin{aligned} x - 2y - 4 &= 0 \Rightarrow \left(\frac{-u+2v}{3}\right) - 2\left(\frac{v-2u}{3}\right) - 4 = 0 \Rightarrow (-u+2v) - 2(v-2u) - 12 = 0 \\ &\Rightarrow -u + 2v - 2v + 4u - 12 = 0 \Rightarrow u = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{-u+2v}{3}\right) - \left(\frac{v-2u}{3}\right) - 2 = 0 \Rightarrow 2(-u+2v) - (v-2u) - 6 = 0 \\ &\Rightarrow -2u + 4v - v + 2u - 6 = 0 \Rightarrow v = 2 \end{aligned}$$

y el Jacobiano

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Con este cambio de variable el dominio se transforma



bastante más sencillo que el anterior. La integral sobre el nuevo dominio y las nuevas variables será

$$\int_1^4 du \int_2^5 \left(\frac{-u+2v}{3}\right)\left(\frac{v-2u}{3}\right)\frac{1}{3}dv = \frac{1}{27}\int_1^4 du \int_2^5 \left(2u^2 - 5uv + 2v^2\right) dv$$

Calculamos la integral respecto de v

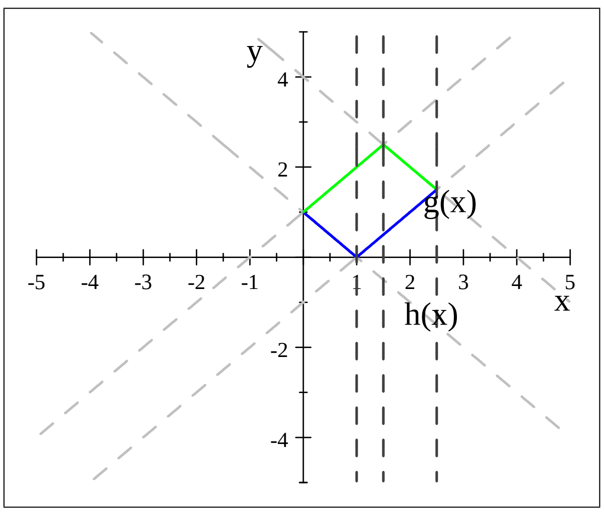
$$\begin{aligned}\int_2^5 \left(2u^2 - 5uv + 2v^2\right) dv &= \left(2u^2 v - \frac{5}{2}uv^2 + \frac{2}{3}v^3\right)_{v=2}^{v=5} \\ &= \left(10u^2 - \frac{125}{2}u + \frac{250}{3}\right) - \left(4u^2 - 10u + \frac{16}{3}\right) \\ &= 6u^2 - \frac{105}{2}u + 78\end{aligned}$$

y ahora integramos respecto de u

$$\begin{aligned}\frac{1}{27}\int_1^4 \left(6u^2 - \frac{105}{2}u + 78\right) du &= \frac{1}{27}\left[2u^3 - \frac{105}{4}u^2 + 78u\right]_{u=1}^{u=4} \\ &= \frac{1}{27}\left((128 - 420 + 312) - \left(2 - \frac{105}{4} + 78\right)\right) \\ &= \frac{1}{27}\left(20 - \frac{215}{4}\right) = -\frac{135}{27 \cdot 4} = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

5. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$, efectuando el cambio de coordenadas adecuado.

Solución: El dominio viene dado por la siguiente gráfica



y la integral sin cambio de variable se obtendría de la expresión

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{x+1} (x+y)^2 e^{x-y} dxdy + \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{x-1}^{x+1} (x+y)^2 e^{x-y} dxdy + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} dx \int_{x-1}^{4-x} (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$$

Si tenemos en cuenta las ecuaciones que definen el paralelogramo, está claro que el cambio adecuado sería

$$u = x + y$$

$$v = x - y$$

de esta forma el nuevo dominio vendría determinado por las rectas

$$\begin{aligned} u &= 1 \\ u &= 4 \\ v &= -1 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

el Jacobiano del cambio de variable es

$$\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \right| = -2$$

y por el teorema de la función inversa obtendremos

$$\left| \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \right|} = -\frac{1}{2}$$

y finalmente la integral se calcularía fácilmente como

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dxdy = \iint_{R'} u^2 e^v \frac{1}{2} dudv$$

Usando el teorema de Fubini

$$\iint_{R'} u^2 e^v \frac{1}{2} dudv = \int_{-1}^{1} dv \int_1^4 \frac{1}{2} u^2 e^v du$$

integramos respecto de u

$$\int_1^4 \frac{1}{2} u^2 e^v du = \frac{1}{2} e^v \int_1^4 u^2 du = \frac{1}{2} e^v \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^{u=4} = \frac{1}{2} e^v \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{21}{2} e^v$$

y ahora respecto de v

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{21}{2} e^v \right) dv = \frac{21}{2} \left[e^v \right]_{v=-1}^{v=1} = 21 \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = 21 \sinh 1$$

6. Calcula las siguientes integrales triples sobre los dominios indicados

   (a) $\iiint_{\mathcal{V}} y e^{x+z} \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = [0,2] \times [-1,1] \times [1,2]$

   (b) $\iiint_{\mathcal{V}} xyz \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = [1,2] \times [0,1] \times [0,1]$

   (c) $\iiint_{\mathcal{V}} xy \cos(z) \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = [0,1] \times [1,2] \times [0,\pi]$

   (d) $\iiint_{\mathcal{V}} z \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 1 \right\}$

   (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y^2 \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1; -1 \leq y \leq 1 \right\}$

   (f) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x + y + z^3 \right) \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$

a) (a) $\iiint_{\mathcal{V}} ye^{x+z}\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=[0,2]\times[-1,1]\times[1,2]$

Al ser un rectángulo integramos de forma iterada, el resultado es independiente del orden de integración

$$\iiint_{\mathcal{V}} ye^{x+z}\ dxdydz = \int_1^2 dz \int_{-1}^1 dy \int_0^2 ye^{x+z}dx$$

$$\int_0^2 ye^{x+z}dx = \left[ye^{x+z}\right]_{x=0}^{x=2} = y\left(e^{2+z}-e^z\right) = ye^z\left(e^2-1\right)$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^2 ye^{x+z}dx = \int_{-1}^1 ye^z\left(e^2-1\right)dy = \left[e^z\left(e^{2-1}\right)\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^1 = 0$$

$$\int_1^2 dz \int_{-1}^1 dy \int_0^2 ye^{x+z}dx = \int_1^2 0dz = 0$$

b) (b) $\iiint_{\mathcal{V}} xyz\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=[1,2]\times[0,1]\times[0,1]$

Al ser un rectángulo integramos de forma iterada, el resultado es independiente del orden de integración

$$\iiint_{\mathcal{V}} xyz\ dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_1^2 xyzdx$$

$$\int_1^2 xyzdx = \left[yz\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = yz\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3yz}{2}$$

$$\int_0^1 dy \int_1^2 xyzdx = \int_0^1 \frac{3yz}{2}dy = \left[\frac{3zy^2}{4}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{4}z$$

$$\int_0^1 dz \int_0^1 dyd \int_0^2 xyzdx = \int_0^1 \frac{3}{4}zdz = \left[\frac{3}{4}\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{3}{8}$$

Notar que en este caso se puede poner

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} xyz\ dxdydz &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_1^2 xyzdx = \int_0^1 zdz \int_0^1 ydy \int_1^2 xdx = \\
&= \left(\int_0^1 zdz\right)\left(\int_0^1 ydy\right)\left(\int_1^2 xdx\right) \\
&= \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

c) (c) $\iiint_{\mathcal{V}} xy\cos(z)\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=[0,1]\times[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Como las variables están separadas usaremos el método que hemos visto en el apartado anterior

$$\iiint_{\mathcal{V}} xy\cos(z) \quad dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \int_1^2 dy \int_0^1 xy\cos(z)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)\,dz \int_1^2 ydy \int_0^1 xdx =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)\,dz\right)\left(\int_1^2 ydy\right)\left(\int_0^1 xdx\right)$$

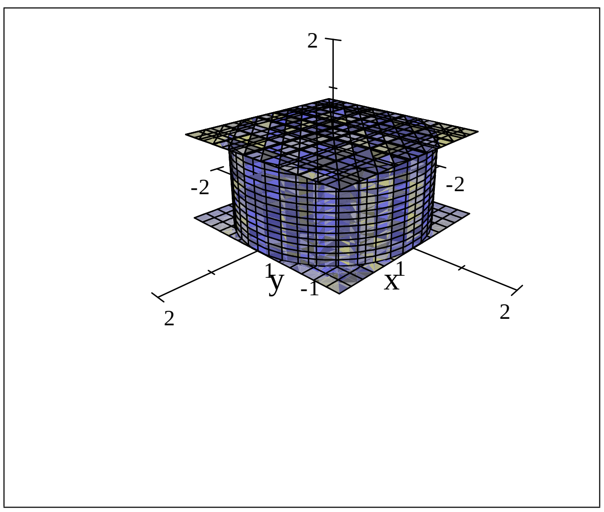
$$= [\mathrm{sen}\,(z)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= (1)\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

d) ESTÁ RESUELTO EN LOS APUNTES DEL TEMA 6, CREO QUE HABRÍA QUE ELIMINARLO

(d) $\iiint_{\mathcal{V}} z \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 1\right\}$

El conjunto es un cilindro recto sobre el eje OZ cortado por los planos $z = 0$ y $z = 1$



Está claro que podemos fijar z entre 0 y 1. Una vez que hemos elegido el valor de z, entonces x e y están en un círculo de radio 1, por tanto podemos poner

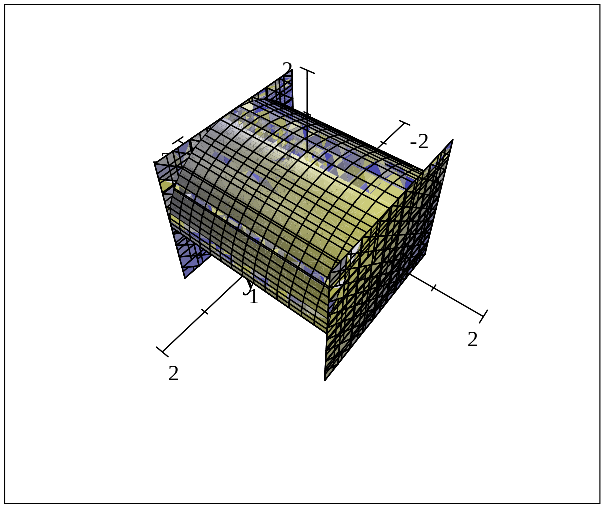
$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1;\ 0 \leq x \leq 1;\ .-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x}\right\}$$

y emplear el teorema de Fubini para poner

$$\iiint_V z =$$

e) (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y^2 \; dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\}$

El conjunto V es un cilindro recto sobre el eje OY cortado por los planos $y = -1$ e $y = 1$



Está claro que en este caso podemos fijar y entre -1 y 1. Una vez que hemos elegido el valor de y, entonces x y z están en un círculo de radio 1, por tanto podemos poner

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le y \le 1;\ 0 \le x \le 1;\ .-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x} \right\}$$

y emplear el teorema de Fubini para poner

$$\iiint_V y^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} dy \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dz = \int_{-1}^{1} y^2 dy \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz$$

Integrando respecto de z

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \left(\sqrt{1-x^2}\right) - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sqrt{1-x^2}$$

ahora respecto de x

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dy$$

se hace con el cambio de variable

$$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t dt \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ \\ x = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

por tanto

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx &= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 2\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = 2\left[\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right) - \left(-\frac{\pi/2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(-2\cdot 0)}{4}\right)\right] = \pi \end{aligned}$$

y

$$\iiint_V y^2 dxdydz = \pi \int_{-1}^{1} y^2 dy = \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{2\pi}{3}$$

f) (f) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x+y+z^3\right)\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

El conjunto es una esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $r=1$ que se puede expresar como

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1\leq x\leq 1;\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2-y^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

podemos poner

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(x+y+z^3\right)dz$$

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(x+y+z^3\right)dz &= \left[(x+y)\,z+\frac{z^4}{4}\right]_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}=\\ &= \left((x+y)\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)+\frac{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^4}{4}\right)-\left((x+y)\left(-\sqrt{1-x^2\right.\right.\\ &= 2\,(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}\end{aligned}$$

7. Calcula utilizando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

   a) El interior de la esfera de radio r.

$$\int_{-r}^{r}dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}1dz$$

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}1dz=2\sqrt{(r^2-x^2)-y^2}$$

$$2\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{(r^2-x^2)-y^2}dy$$

Hacemos cambio

$$y=\sqrt{(r^2-x^2)}\operatorname{sen}t\Rightarrow y^2=\left(r^2-x^2\right)\operatorname{sen}t\Rightarrow\left(r^2-x^2\right)-\left(r^2-x^2\right)\operatorname{sen}^2t=\left(r^2-x^2\right)\cos^2t$$

y

$$dy=\sqrt{r^2-x^2}\cos t dt$$

de forma que

$$\begin{aligned}2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(r^2-x^2)\cos^2t}\sqrt{r^2-x^2}\cos tdt &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(r^2-x^2\right)\cos^2tdt=2\left(r^2-x^2\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2tdt\\ &= 2\left(r^2-x^2\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\left(r^2-x^2\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\\ &= \left(r^2-x^2\right)\left(t+\frac{\operatorname{sen}2t}{2}\right)_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi\left(r^2-x^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1dz &= \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{-r}^{r} \\
&= \pi \left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 - \frac{(-r)}{3}\right)\right) = \\
&= \pi \left(\frac{2r^3}{3} - \left(-\frac{2r^3}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

b) El interior del cilindro de radio r y altura h.

Supongamos que el cilindro está centrado en el origen y sobre el plano XY, en este caso podemos lo podemos definir como

$$(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq h; -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

y el volumen viene dado por

$$\int_0^h dz \int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dy$$

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dy = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dy = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

hacemos cambio $x = r \operatorname{sen} t$ con $dx = r \cos t dt$

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{r^2 \cos^2 t}\right) (r \cos t)\, dt &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
&= 2r^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2r^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi r^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^h dz \int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dy = \int_0^h \pi r^2 dz = \pi r^2 h$$

c) El interior del cono de radio de la base r y altura h.

Suponiendo el cono sobre el eje OX y centrado en el origen, el conjunto que define a este conjunto es

$$0 \leq z \leq h; -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}$$

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales triples:

(a) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1, y\le 0\right\}$

(b) $\iiint_{\mathcal{V}} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0\right\}$

(c) $\iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1\right\}$

(d) $\iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1; z\ge 0\right\}$

(e) $\iiint_{\mathcal{V}} y\ dxdydz \qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4; x\le 0, -1\le z\le 1\right\}$

©Silvestre Paredes Hernández®