Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Problemas Tema 6
Cálculo en varias variables
Integración múltiple de Riemann

1. Calcula las siguientes integrales dobles sobre los dominios indicados

   (a) $\iint_{\mathcal{R}} xy\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = [0,1] \times [0,3]$

   (b) $\iint_{\mathcal{R}} ye^x\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = [-1,1] \times [0,2]$

   (c) $\iint_{\mathcal{R}} y\cos(x)\ dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = [0,\pi] \times [1,2]$

   (d) $\iint_{\mathcal{R}} y \arctan x\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$

   (e) $\iint_{\mathcal{R}} 2x\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$

   (f) $\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2+y\right)\ dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$

   (g) $\iint_{\mathcal{R}} (y+\ln x)\ dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$

   (h) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2-y^2}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,-1)\ \text{y}\ (1,1)$

   (i) $\iint_{\mathcal{R}} xy\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,1)\ \text{y}\ (2,0)$

   (j) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{4-y^2}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2=2x$ e $y^2=8-2x$

   (k) $\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2+y^2\right)\ dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y=x^3$ e $y=x^2$

   (l) $\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dx dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2=x$ y las rectas $x=0$ e $y=1$

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

   (a) $\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$

   (b) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 4\right\}$

   (c) $\iint_{\mathcal{R}} \ln\left(x^2+y^2\right)\ dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$

   (d) $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$

   (e) $\iint_{\mathcal{R}} e^{\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy$ $\qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \leq 0\right\}$

3. Calcula utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

   a) El interior de la circunferencia de radio r.
   b) El interior de la elipse de semiejes a y b.
   c) El interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.
   d) La región delimitada por la recta $x+y=5$ y la curva $xy=6$.

4. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} xy\,dx\,dy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x-2y-1=0$, $2x-y-5=0$, $x-2y-4=0$ y $2x-y-2=0$, efectuando el cambio de coordenadas $x=\dfrac{-u+2v}{3}$ y $y=\dfrac{v-2u}{3}$

5. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2\, e^{x-y}\,dx\,dy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$, efectuando el cambio de coordenadas adecuado.

6. Calcula las siguientes integrales triples sobre los dominios indicados

   (a) $\iiint_{\mathcal{V}} ye^{x+z}\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=[0,2]\times[-1,1]\times[1,2]$

   (b) $\iiint_{\mathcal{V}} xyz\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=[1,2]\times[0,1]\times[0,1]$

   (c) $\iiint_{\mathcal{V}} xy\cos(z)\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=[0,1]\times[1,2]\times[0,\pi]$

   (d) $\iiint_{\mathcal{V}} z\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1;\ 0\leq z\leq 1\right\}$

   (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y^2\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2\leq 1;\ -1\leq y\leq 1\right\}$

   (f) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x+y+z^3\right)\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

7. Calcula utilizando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

   a) El interior de la esfera de radio r.
   b) El interior del cilindro de radio r y altura h.
   c) El interior del cono de radio de la base r y altura h.

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales triples:

   (a) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1,\ y\leq 0\right\}$

   (b) $\iiint_{\mathcal{V}} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4,\ z\geq 0\right\}$

   (c) $\iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1\right\}$

   (d) $\iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1;\ z\geq 0\right\}$

   (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y\,dx\,dy\,dz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4;\ x\leq 0;\ -1\leq z\leq 1\right\}$
