Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Soluciones Problemas Tema 5
Cálculo en varias variables
Aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables

1. Calcula la ecuación del plano tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = x^2y^2 + 2x + 2y$ en $\vec{a} = (1,0)$

b) $g(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ en $\vec{a} = (0, \pi/2)$

c) $h(x,y) = \dfrac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}$ en $\vec{a} = (-1,-1)$

**Solución:** La expresión del plano tangente es la correspondiente al polinomio de Taylor de primer grado de una función $f(x,y)$ en un punto $(x_0, y_o)$:

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - x_0)$$

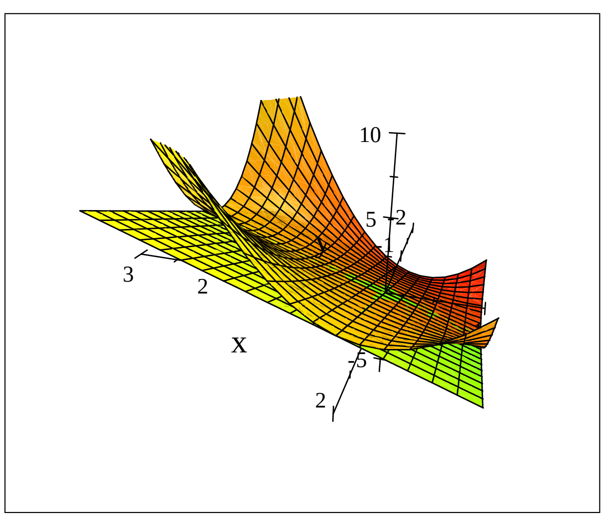
*a*) Se calculan cada uno de los elementos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^2 + 2x + 2y \Rightarrow \ f(1,0) = 2 \\ \nabla f(x,y) &= \left(2xy^2 + 2, 2x^2y + 2\right) \nabla f(1,0) = (2,2) \end{aligned}$$

Y se sustituyen en la fórmula general

$$T_1(x,y) = 2 + 2(x-1) + 2y = 2x + 2y$$

En la siguiente gráfica se representan la función y su plano tangente en el punto $\vec{a} = (1,0)$



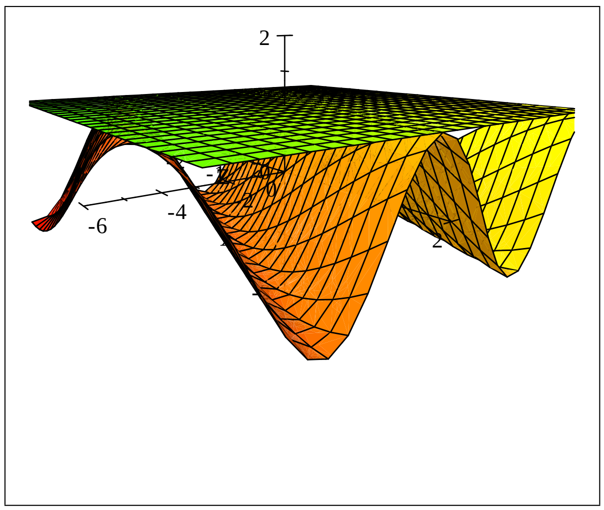
*b*) Se calculan cada uno de los elementos

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \;\Rightarrow g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
\nabla g(x,y) &= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \Rightarrow \nabla g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,0)
\end{aligned}
$$

La ecuación del plano tangente es

$$T_f(x,y) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

En la siguiente gráfica se representan la función y su plano tangente



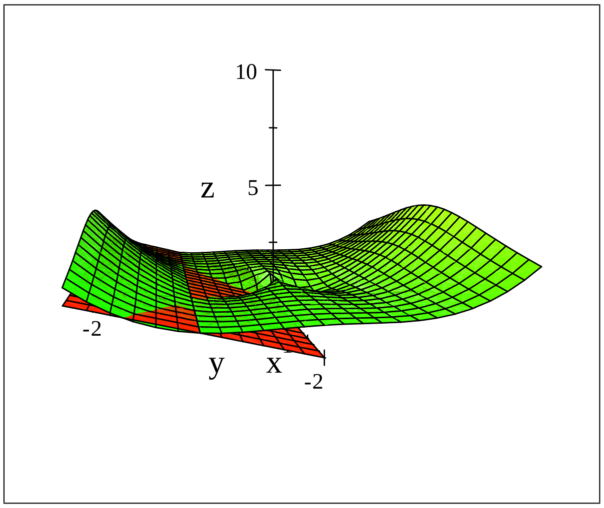

*c*) Se calculan cada uno de los elementos

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2} \;\Rightarrow h(-1,-1) = 1 \\
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{4x^3\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{2y\left(x^2+y^2\right) - 2y\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{2x^5 + 2y^2 x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{2yx^2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \Rightarrow \nabla f(-1,-1) = (-1,0)
\end{aligned}
$$

y la ecuación del plano tangente será

$$T_f(x,y) = 1 - (x+1) = -x.$$

En la siguiente gráfica se representan la función y su plano tangen




2. Calcula el polinomio de Taylor de grado dos de las funciones que se indican a continuación:

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$ en el punto $(0,0)$

(b) $f(x,y) = (x^2 - 3x)e^{y^2}$ en el punto $(0,0)$

(c) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - ze^x$ en el punto $(1,1,0)$

**Solución:**

*a)*

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x)\cos(y), -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(x)\cos(y) & -\cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ -\cos(x)\operatorname{sen}(y) & -\operatorname{sen}(x)\cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$T_2(x,y) = x$$

*b)*

$$f(x,y) = (x^2 - 3x)e^{y^2} \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = \left((2x-3)e^{y^2}, 2y\left(x^2-3x\right)e^{y^2}\right) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (-3,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 2y(2x-3)e^{y^2} \\ 2y(2x-3)e^{y^2} & 2\left(x^2-3x\right)\left(2y^2+1\right)e^{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$T_2(x,y) = -3x + 2x^2$$

c) Para $f(x,y)=\frac{x}{y}-ze^x$

$$f(x,y)=\frac{x}{y}-ze^x\Rightarrow f(1,1,0)=1$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{1}{y}-ze^x,-\frac{x}{y^2},-e^x\right)\Rightarrow\nabla f(1,1,0)=(1,-1,-e)$$

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix}-ze^x & -\frac{1}{y^2} & -e^x\\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & 0\\ -e^x & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Hf(1,1,0)=\begin{pmatrix}0 & -1 & -e\\ -1 & 2 & 0\\ -e & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Y el polinomio de Taylor de orden 2 sería

$$T_2(x,y,z)=f(1,1,0)+\nabla f(1,1,0)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\,Hf(1,1,0)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y,z)=1+(1,-1,-e)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix}0 & -1 & -e\\ -1 & 2 & 0\\ -e & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y,z)=1+(x-1)-(y-1)-ez+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix}-(y-1)-ez\\ -(x-1)+2(y-1)\\ -e(x-1)\end{pmatrix}$$

$$=\quad 1+2x-2y-xy-xze+y^2$$

3. De una función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, sabemos que

$$f(0,0,0)=2;\quad \nabla f(0,0,0)=(1,2,-1);\quad Hf(0,0,0)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

a) A partir de estos datos, obtén una expresión aproximada para $f(x,y,z)$ en un entorno del punto $(0,0,0)$.

b) Encuentra una aproximación para el valor de $f\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$.

**Solución:**

a) Con los datos del problema podemos construir el polinomio de Taylor de orden 2

$$\begin{aligned}T_2f(x,y,z) &= f(0,0,0)+\nabla f(0,0,0)(x,y,z)+\frac{1}{2}(x,y,z)\,Hf(0,0,0)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= 2+(1,2-1)(x,y,z)+\frac{1}{2}(x,y,z)\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= 2+x+2y-z+3x^2+2xy+4xz-y^2+8yz-2z^2\end{aligned}$$

*b*) Usamos el polinomio obtenido en el apartado anterior y los evaluamos en el punto $\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$

$$\begin{aligned} T_2f\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right) &= 2+\frac{1}{10}+2\frac{1}{10}-\frac{1}{10}+3\frac{1}{100}+2\frac{1}{10}\frac{1}{10}+4\frac{1}{10}\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+8\frac{1}{10}\frac{1}{10}-2\frac{1}{10^2} \\ &= 2+\frac{2}{10}+\frac{3+2+4-1+8-2}{100} \\ &= 2+\frac{2}{10}+\frac{14}{100}=\frac{200+20+14}{100}=\frac{234}{100} \end{aligned}$$

4. Utiliza la derivación implícita para calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ en un punto genérico $(x_0,y_0)$ con $y_0\neq 0$.

   **Solución:** La recta tangente a una función en un punto $(x_0,y_0)$ es el polinomio de Taylor de orden 1 en ese punto. La función que obtenemos a partir de la ecuación es

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$$

   Como $(x_0,y_0)$ es un punto de la circunferencia, se cumple trivialmente la primera condición del teorema de la función implícita

$$\varphi(x_0,y_0)=0\Longleftrightarrow x_0^2+y_0^2-1=0$$

   La segunda de las hipótesis implica el cálculo de la derivada parcial de la función $\varphi$ respecto de las variables dependiente que es

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=2y$$

   y como $y_0\neq 0$, está claro que se cumple la segunda hipótesis

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0\neq 0$$

   La tangente en el punto $(x_0,y_0)$ es la derivada de la función $y(x)$ evaluada en ese punto, utilizando la derivación directa sobre la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y(x)^2-1\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y'(x)\,y(x)=0\Leftrightarrow x+y'(x)\,y(x)=0$$

   y evaluando en el punto $(x_0,y_0)$

$$x_0+y'(x_0)\,y(x_0)=0\Leftrightarrow y'(x_0)\,y_0=-x_0\Leftrightarrow y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$$

   Finalmente, la ecuación de la tangente en ese punto será

$$T_1y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)=y_0-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

5. Comprueba que los circunferencias de ecuaciones $(x-2)^2+y^2=2$ y $x^2+(y-2)^2=2$ son tangentes en el punto $(1,1)$.

   **Solución:** Como antes, las tangentes en un punto son los desarrollos de Taylor de orden 1 en ese punto. Para comprobar el enunciado tenemos que probar que los polinomios de Taylor de orden 1 de las funciones definidas en forma implícita mediante las ecuaciones de ambas circunferencias son las mismas en el punto $(1,1)$. No obstante como el punto $(1,1)$ está en ambas circunferencias sólo es necesario comprobar que la derivada en los dos casos es la misma. Primero comprobaremos que las ecuaciones definen a $y$ como función implícita de $x$

$$\text{Circunferencia 1}\left\{\begin{array}{c} F_1(x,y)=(x-2)^2+y^2-2 \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)=2y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1(1,1)=(1-2)^2+1-2=0 \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(1,1)=2\neq 0 \end{array}\right.$$

y

$$\text{Circunferencia 2}\left\{\begin{array}{c} F_2(x,y)=x^2+(y-2)^2-2 \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)=2(y-2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2(1,1)=1+(1-2)^2-2=0 \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(1,1)=-2\neq 0 \end{array}\right.$$

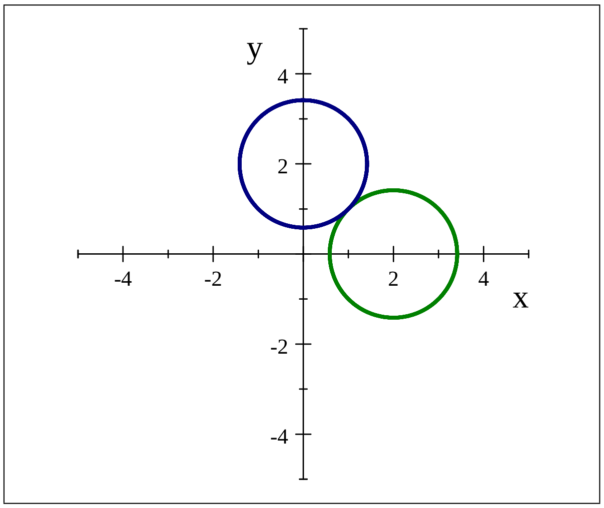
Calculamos la derivada en cada caso. Para $F_1$

$$y'(1)\Rightarrow 2(x-2)+2yy'=0\Rightarrow 2(1-2)+2y(1)\,y'(1)=0\Rightarrow -2+2y'(1)=0\Rightarrow y'(1)=1$$

Para $F_2$

$$y'(1)\Rightarrow 2x+2(y-2)\,y'=0\Rightarrow 2\cdot 1+2(y(1)-2)\,y'(1)=0\Rightarrow 2+2(1-2)\,y'(1)=0\Rightarrow y'(1)=1$$

Gráficamente podemos comprobar como ambas circunferencias son tangentes en $(1,1)$




6. Demuestra que la ecuación
$$x^3+y^3-3xy-1=0,$$
define a $y$ como función implícita de $x$ en un entorno de $(0,1)$. Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de $y$ como función de $x$ en $x_0=0$.

**Solución:** La función que define la ecuación es

$$\varphi(x,y)=x^3+y^3-3xy-1$$

Comprobamos las dos hipótesis de existencia de la función implícita en el punto $(0,1)$

$$\varphi(0,1)=0^3+1^3-3\cdot 0\cdot 1-1=0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 0 = 3 \neq 0$$

Se cumplen ambas hipótesis y podemos poner de manera formal que $y = y(x)$. El polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = 0$, sería

$$y(0) + \frac{1}{1!} y'(0)\, x + \frac{1}{2!} y''(0)\, x^2$$

Para obtener las derivadas implicadas usamos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y(x)^3 - 3xy(x) - 1\right) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y(x)^2 y'(x) - 3y(x) - 3xy'(x) = 0$$

Dividiendo por 3

$$x^2 + y(x)^2 y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0$$

y sustituyendo en $x = 0$, teniendo en cuenta que $y(0) = 1$

$$0^2 + y(0)^2 y'(0) - y(0) - 0 \cdot y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) - 1 = 0 \Rightarrow y'(0) = 1$$

Calculamos la derivada segunda, derivando sobre la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y(x)^2 y'(x) - y(x) - xy'(x)\right) &= 0 \\
2x + 2y(x)\, y'(x)^2 + y(x)^2 y''(x) - y'(x) - y'(x) - xy''(x) &= 0 \\
2x + 2y(x)\, y'(x)^2 + y(x)^2 y''(x) - 2y'(x) - xy''(x) &= 0
\end{aligned}$$

sustituyendo en $x = 0$,

$$\begin{aligned}
2 \cdot 0 + 2y(0)\, y'(0)^2 + y(0)^2 y''(0) - 2y'(0) - 0 \cdot y''(0) &= 0 \Rightarrow \\
2 + y''(0) - 2 &= 0 \Rightarrow \\
y''(0) &= 0
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 sería

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= y(0) + \frac{1}{1!} y'(0)\, x + \frac{1}{2!} y''(0)\, x^2 \\
p_2(x) &= 1 + x
\end{aligned}$$

7. Demuestra que la ecuación de la elipse

$$x^2 + 3y^2 = 12,$$

define a $y$ como función implícita de $x$ en el punto $(3, 1)$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$, en $x_0 = 3$.

**Solución:** La función que define la ecuación es

$$\varphi(x,y) = x^2 + 3y^2 - 12$$

Comprobamos las hipótesis de existencia de la función implícita

$$\varphi(3,1) = 3^2 + 3 \cdot 1^2 - 12 = 12 - 12 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 6y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(3,1) = 6 \neq 0$$

Se cumplen ambas hipótesis y podemos poner $y = y(x)$. El polinomio de Taylor de orden 3 en el punto $x = 3$, sería

$$y(3) + \frac{1}{1!} y'(3)(x-3) + \frac{1}{2!} y''(3)(x-3)^2 + \frac{1}{3!} y'''(3)(x-3)^3$$

Como la función pasa por el punto $(3,1)$, entonces sabemos que $y(3) = 1$. Para obtener las derivadas usamos la ecuación $\varphi(x,y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3y(x)^2 - 12\right) = 0 \Rightarrow 2x + 6y(x)y'(x) = 0 \Rightarrow x + 3y(x)y'(x) = 0$$

sustituyendo en $x = 3$

$$3 + 3y(3)y'(3) = 0 \Rightarrow 1 + y'(3) = 0 \Rightarrow y'(3) = -1$$

Calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^2 + 3y(x)^2 - 12\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + 6y(x)y'(x)\right) = 0 \\
&\Rightarrow 2 + 6y'(x)^2 + 6y(x)y''(x) = 0 \\
&\Rightarrow 1 + 3y'(x)^2 + 3y(x)y''(x) = 0
\end{aligned}$$

sustituyendo en $x = 3$

$$1 + 3y'(3)^2 + 3y(3)y''(3) = 0 \Rightarrow 1 + 3 + 3y''(3) = 0 \Rightarrow y''(3) = -\frac{4}{3}$$

y otra vez para la derivada tercera

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^2 + 3y(x)^2 - 12\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2 + 6y'(x)^2 + 6y(x)y''(x)\right) = 0 \\
&\Rightarrow 12y'(x)y''(x) + 6y'(x)y''(x) + 6y(x)y'''(x) = 0 \\
&\Rightarrow 18y'(x)y''(x) + 6y(x)y'''(x) = 0 \\
&\Rightarrow 3y'(x)y''(x) + y(x)y'''(x) = 0
\end{aligned}$$

sustituyendo en $x = 3$

$$\begin{aligned}
3y'(3)y''(3) + y(3)y'''(3) &= 0 \Rightarrow 3(-1)\left(-\frac{4}{3}\right) + y'''(3) = 0 \\
&\Rightarrow y'''(3) = -4
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de grado 3 buscado sería

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= y(3) + \frac{1}{1!}y'(3)(x-3) + \frac{1}{2!}y''(3)(x-3)^2 + \frac{1}{3!}y'''(3)(x-3)^3 \\
p_3(x) &= 1 + \frac{1}{1!}(-1)(x-3) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{4}{3}\right)(x-3)^2 + \frac{1}{3!}(-4)(x-3)^3 \\
&= 1-(x-3)-\frac{2}{3}(x-3)^2-\frac{4}{3!}(x-3)^3
\end{aligned}$$

o también

$$p_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 - 15x + 16$$

8. Sea $z = f(x,y)$ la función definida a partir de la expresión

$$3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y = e,$$

Halla $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ y determina la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

**Solución:** Como en el enunciado se indica que $z$ es función de $x$ e $y$ a través de la ecuación, podemos obtener el valor de $z$ para los valores de $x=1$ e $y=0$ sustituyendo en la ecuación

$$3\cdot 0^3z^2 + e^{1+z} - 3\cdot 0 = e \Leftrightarrow e^{1+z} = e \Leftrightarrow 1+z=0 \Leftrightarrow z=0$$

luego la función que determina la relación implícita en el punto $(1,0,0)$ es

$$\varphi(x,y,z) = 3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y - e$$

Ya hemos comprobado que $\varphi(1,0,0)=0$. Comprobamos la otra hipótesis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = 6y^3z + e^{x+z} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0,0) = e \neq 0$$

La ecuación del plano tangente a $z=f(x,y)$ en el punto $(1,0)$ es el polinomio de Taylor de primer orden:

$$p_1(x) = z(1,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

Como la función pasa por el punto $(1,0,0)$ entonces $z(1,0)=0$ y para obtener las derivadas parciales usamos la ecuación, derivándola parcialmente respecto de $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(3y^3z(x,y)^2 + e^{x+z(x,y)} - 3y - e\right) &= 0 \\
6y^3z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + e^{x+z(x,y)}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) &= 0
\end{aligned}$$

sustituyendo en $(x,y)=(1,0)$

$$6\cdot 0^3\cdot z(1,0)\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) + e^{1+z(1,0)}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -1$$

Y respecto de $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(3y^3 z(x,y)^2 + e^{x+z(x,y)} - 3y - e\right) &= 0\\ 9y^2 z(x,y)^2 + 6y^3 z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + e^{x+z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 3 &= 0\end{aligned}$$

sustituyendo en $(x,y) = (1,0)$

$$9\cdot 0^2 z(x,y)^2 + 6\cdot 0^3 z(1,0)\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) + e\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{3}{e}$$

El espacio tangente sería

$$\begin{aligned}p_1(x,y) &= z(1,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)(y-0)\\ p_2(x) &= 0 - (x-1) + \frac{3}{e}y\\ &= 1 + \frac{3}{e}y - x\end{aligned}$$

9. Comprueba si la ecuación
$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0,$$
determina una función $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$. En caso afirmativo, calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$, y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,f(0,1))$.

**Solución:** Como $z$ es función de $x$ e $y$ a través de la ecuación, podemos obtener el valor de $z$ para los valores de $x = 1$ e $y = 0$, sustituyendo en la ecuación

$$0^3 + 2\cdot 1^3 + z^3 - 3\cdot 0\cdot 1\cdot z - 2\cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1 \Leftrightarrow z = -1$$

La función que determina la relación implícita es

$$\varphi(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1$$

Ya hemos comprobado que $\varphi(0,1,-1) = 0$, comprobamos la otra hipótesis del teorema:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - 3xy \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1,-1) = -3 - 0 \neq 0$$

El plano tangente a $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0)$ es

$$p_1(x) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$$

Para obtener las derivadas parciales usamos la ecuación, derivándola parcialmente respecto de $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2y^3 + z(x,y)^3 - 3xyz(x,y) - 2y + 1\right) &= 0\\ 3x^2 + 3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 3yz(x,y) - 3xy\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= 0\end{aligned}$$

sustituyendo en $x=0,\ y=1$,con $z\left(0,1\right)=-1$

$$3\frac{\partial z}{\partial x}\left(0,1\right)+3=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}\left(0,1\right)=-1$$

Y respecto de $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{3}+2y^{3}+z\left(x,y\right)^{3}-3xyz\left(x,y\right)-2y+1\right) &= 0\\ 6y^{2}+3z\left(x,y\right)^{2}\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right)-3xz\left(x,y\right)-3xy\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right)-2 &= 0\end{aligned}$$

y sustituyendo de nuevo en $x=0,\ y=1,\ z\left(0,1\right)=-1$

$$6+3\frac{\partial z}{\partial y}\left(0,1\right)-2=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}\left(1,0\right)=-\frac{4}{3}$$

El espacio tangente (polinomio de Taylor de grado 1) sería

$$\begin{aligned}p_{1}\left(x\right) &= z\left(0,1\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\left(0,1\right)\left(x-0\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(0,1\right)\left(y-0\right)\\ p_{1}\left(x\right) &= -1-x-\frac{4}{3}\left(y-1\right)\end{aligned}$$

10. Se considera la función $z=f\left(x,y\right)$ que, en un entorno del punto $\left(1,1,1\right)$, está definida implícitamente por

$$z^{3}+3x^{2}y-y^{3}z+y^{2}-3x-1=0,$$

Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 de tal función en $\left(1,1\right)$.

11. Comprueba que la ecuación

$$z+e^{z}+2x+2y-x^{2}-y^{2}-3=0,$$

determina a $z$ como función de $x$ e $y$ en un entorno del punto $\left(x,y,z\right)=\left(1,1+\sqrt{e},1\right)$. Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f\left(x,y\right)$ en el punto $\left(1,1+\sqrt{e},1\right)$.

12. La ecuación

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}-z=51$$

define a la variable $z$ como función implícita de $x$ e $y$ en un entorno del punto $(6,-3)$ en el cual $z=z(x,y)$ puede tomar los valores $z=3$ y $z=-2$. Para $z=-2$, calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ en el punto $(3,-2)$. Calcula también el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x,y)$ en el punto $(3,-2)$.

**Solución:** Consideremos la función $F\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}-z-51$, la ecuación es equivalente a poner $F\left(x,y,z\right)=0$.

Sustituyendo los valores $x=6$ e $y=-3$ en la función, obtenemos

$$F\left(6,-3,z\right)=36+9+z^{2}-z-51=z^{2}-z-6$$

Para que $z$ se pueda definir como función implícita del punto $\left(6,-3,z_{0}\right)$ debe suceder por una parte que $F\left(6,-3,z_{0}\right)=0$ y por otra que $\frac{\partial F}{\partial z}\left(6,-3,z_{0}\right)\neq0$. De la primera condición obtenemos

$$F\left(6,-3,z_{0}\right)=z_{0}^{2}-z_{0}-6=0\Leftrightarrow z_{0}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\Rightarrow z_{0}=3\text{ o }z_{0}=-2$$

Para estos puntos aplicamos la segunda condición

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(6,-3,3) = 5 \neq 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial z}(6,-3,-2) = -5 \neq 0 \end{cases}$$

De forma que $z$ se puede definir como función implícita tanto en un entorno de $(6,-3,3)$ como de $(6,-3,-2)$.

La ecuación del plano tangente a la gráfica de una función $z(x,y)$ en un punto viene dado por el polinomio de Taylor de primer orden de la función en ese punto, en este caso el punto es $(6,-3)$ con $z(6,-3)$ y tenemos que calcular el gradiente de $z$

$$\nabla z(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

y evaluarlo en ese punto.

Para la obtener derivada parcial respecto de $x$ derivamos en la ecuación respecto de esa variable, donde debemos tener en cuenta que $z = z(x,y)$, es función de las dos variables

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,z) = 0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2 - z - 51\right) = 0 \\ 2x + 2z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 2x + (2z(x,y) - 1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo en $(6,-3)$, teniendo en cuenta que $z(6,-3) = -2$

$$2 \cdot 6 + (2z(6,-3) - 1)\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 12 - 5\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = \frac{12}{5}.$$

Repetimos el proceso para calcular la derivada parcial respecto a $y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y,z) = 0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2 - z - 51\right) = 0 \\ 2y + 2z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 2y + (2z(x,y) - 1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

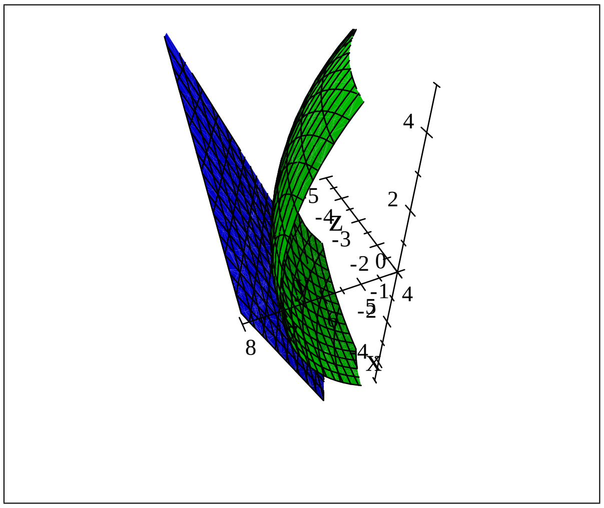
evaluando en el punto $(6,-3)$

$$2 \cdot (-3) + (2(-2) - 1)\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -6 - 5\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = -\frac{6}{5}.$$

El polinomio de Taylor en $(6,-3)$ será

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= z(6,-3) + \frac{\partial z(6,-3)}{\partial x}(x-6) + \frac{\partial z(6,-3)}{\partial y}(y+3) \\ &= -2 + \frac{12}{5}(x-6) - \frac{6}{5}(y+3) \\ &= \frac{12}{5}x - \frac{6}{5}y - 20. \end{aligned}$$

En la siguiente gráfica se han representado tanto la función, como el polinomio de Taylor (plano tangente en $(6,-3)$):



Para obtener el polinomio de $2^o$ grado hay que calcular la segunda derivada de $z$ respecto de las variables $x$ e $y$, usando los resultados obtenidos anteriormente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + (2z(x,y) - 1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}\left((2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

es decir

$$2+2\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow 2+2\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

y evaluando en $(6,-3)$ con $z(6,-3) = -2$, $\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = \frac{12}{5}$ y $\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = -\frac{6}{5}$

$$\begin{aligned} 2+2\left(\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x}\right)^2 + (2z(6,-3)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0 \\ 2+2\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (2\cdot(-2)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{338}{25} - 5\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} = \frac{338}{125}$$

Para la $y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(2y + (2z(x,y) - 1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}\left((2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

es decir

$$2+2\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2+2\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

y como antes

$$\begin{aligned}
2+2\left(\frac{\partial z\left(6,-3\right)}{\partial y}\right)^{2}+\left(2z\left(6,-3\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}} &= 0\\
2+2\left(-\frac{6}{5}\right)^{2}+\left(2\cdot\left(-2\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}} &= 0\\
\frac{122}{25}-5\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}} &= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}}=\frac{122}{125}$$

Para la derivada cruzada $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial y\partial x}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(2y+\left(2z\left(x,y\right)-1\right)\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(2y\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2z\left(x,y\right)-1\right)\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y}\right)=0$$

es decir

$$2\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x}\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y}+\left(2z\left(x,y\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(x,y\right)}{\partial y\partial x}=0$$

y en $(6,-3)$

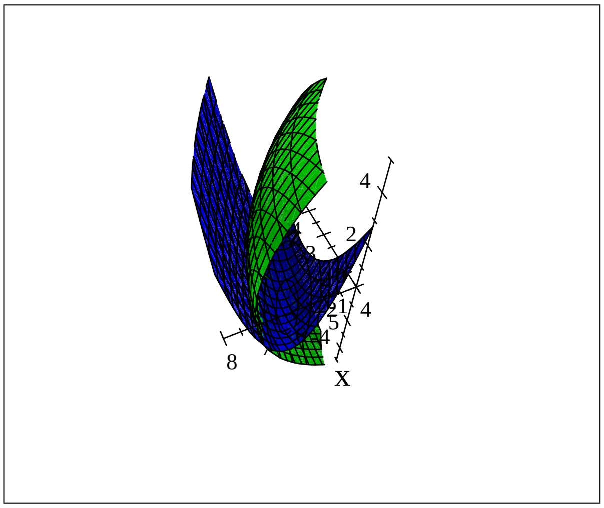
$$\begin{aligned}
2\frac{\partial z\left(6,-3\right)}{\partial x}\frac{\partial z\left(6,-3\right)}{\partial y}+\left(2z\left(6,-3\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y\partial x} &= 0\\
2\left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(2\cdot\left(-2\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial x\partial y} &= 0\\
-\frac{144}{25}-5\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}} &= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y\partial x}=-\frac{144}{125}$$

El polinomio de Taylor es el plano tangente anterior más la parte correspondiente a las segunda derivadas.

$$\begin{aligned}
T_{2}\left(x,y\right) &= z\left(6,-3\right)+\nabla z\left(6,-3\right)\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(x-6,y+3\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial y^{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}\\
&= -2+\left(\frac{12}{5},-\frac{6}{5}\right)\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(x-6,y+3\right)\begin{pmatrix}\frac{338}{125} & -\frac{144}{125}\\ -\frac{144}{125} & \frac{122}{125}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}\\
&= -2+\frac{12}{5}\left(x-6\right)-\frac{6}{5}\left(y+3\right)+\frac{338}{250}\left(x-6\right)^{2}+\frac{122}{250}\left(y+3\right)^{2}-\frac{144}{125}\left(x-6\right)\left(y+3\right)\\
&= -2+\frac{12}{5}\left(x-6\right)-\frac{6}{5}\left(y+3\right)+\frac{169}{125}\left(x-6\right)^{2}+\frac{61}{125}\left(y+3\right)^{2}-\frac{144}{125}\left(x-6\right)\left(y+3\right)\\
&= \frac{269}{5}-\frac{432}{25}x+\frac{216}{25}y+\frac{169}{125}x^{2}-\frac{144}{125}xy+\frac{61}{125}y^{2}
\end{aligned}$$




13. Comprueba que las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

definen a las variables $y$ y $z$ como funciones implícitas de $x$, tales que $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 en $0$ para ambas funciones.

**Solución:** Vamos a estudiar si el sistema de ecuaciones definido por

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{array}\right\}$$

define a las variables $y$ y $z$ como funciones implícitas de $x$ en el punto $\vec{a} = (0, 1, 1)$. Notar que en este caso tendremos $m = 2$ y las funciones implicadas son, pasando todos los términos al primer miembro de la ecuación:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= x + y + z^2 - 2 \\ \varphi_2(x, y, z) &= xy + yz + zx - 1 \end{aligned}$$

Primero comprobaremos que el punto $\vec{a}$ es solución del sistema. Para ello sustituimos el valor $\vec{a}$ en el sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, 1, 1) &= 0 + 1 + 1^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \\ \varphi_2(0, 1, 1) &= 0 + 1 + 0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar calculamos el determinante Jacobiano de las funciones $\varphi_k$ respecto de las variables dependientes, que en este caso son $y$ y $z$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2z \\ x + z & y + x \end{pmatrix}$$

y evaluando en $\vec{a} = (0,1,1)$

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(0,1,1)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$$

Para construir el polinomio de Taylor de segundo orden, necesitamos calcular las segundas derivadas de las funciones $y$ y $z$ respecto de $x$. Para ello, derivamos directamente las ecuaciones del sistema, teniendo en cuenta que $y = y(x)$ y $z = z(x)$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1(x,y,z)) = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2(x,y,z)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x}\left(x + y(x) + z(x)^2 - 2\right) = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy(x) + y(x)z(x) + z(x)x - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 + y'(x) + 2z(x)z'(x) = 0 \\ \\ y(x) + xy'(x) + y'(x)z(x) + y(x)z'(x) + z(x) + xz'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 + y'(x) + 2z(x)z'(x) = 0 \\ \\ y(x) + (x + z(x))y'(x) + (x + y(x))z'(x) + z(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Y ahora evaluamos ambas ecuaciones en $x = 0$; teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 1 \end{array}$$

puesto que las ecuaciones pasan por el punto $(0,1,1)$, obteniendose

$$\left.\begin{array}{c} 1 + y'(0) + 2z(0)z'(0) = 0 \\ \\ y(0) + 0 \cdot y'(0) + y'(0)z(0) + y(0)z'(0) + z(0) + 0 \cdot z'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 + y'(0) + 2z'(0) = 0 \\ \\ 1 + y'(0) + z'(0) + 1 = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} y'(0) + 2z'(0) = -1 \\ \\ y'(0) + z'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

el sistema es lineal y tiene por solución

$$\left.\begin{array}{c} y'(0) = -3 \\ \\ z'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Para obtener los valores $y''(0)$ y $z''(0)$, tendremos que derivar las ecuaciones dos veces

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_1(x,y,z)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1(x,y,z))\right) = 0 \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_2(x,y,z)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2(x,y,z))\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(1+y'(x)+2z(x)z'(x)\right)=0\\ \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(y(x)+(x+z(x))y'(x)+(x+y(x))z'(x)+z(x)=0\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}y''(x)+2z'(x)^2+2z(x)z''(x)=0\\ \\ y'(x)+(1+z'(x))y'(x)+(x+z(x))y''(x)+(1+y'(x))z'(x)+(x+y(x))z''(x)+z'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}y''(x)+2z'(x)^2+2z(x)z''(x)=0\\ \\ 2y'(x)+(x+z(x))y''(x)+2y'(x)z'(x)+(x+y(x))z''(x)+2z'(x)=0\end{array}\right\}$$

que junto con los datos calculados $y(0)=1$, $z(0)=1$, $y'(0)=-3$ y $z'(0)=1$

$$\left.\begin{array}{c}y''(0)+2z'(0)^2+2z(0)z''(0)=0\\ \\ 2y'(0)+(0+z(0))y''(0)+2y'(0)z'(0)+(0+y(0))z''(0)+2z'(0)=0\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}y''(0)+2+2z''(0)=0\\ \\ -6+y''(0)-6+z''(0)+2=0\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}y''(0)+2z''(0)=-2\\ \\ y''(0)+z''(0)=10\end{array}\right\}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned}z''(0) &= -12\\ \\ y''(0) &= 22\end{aligned}$$

Los polinomios de Taylor serían

$$\begin{aligned}P_y(x) &= y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2!}y''(0)x^2=1-3x+11x^2\\ P_z(x) &= z(0)+z'(0)x+\frac{1}{2!}z''(0)x^2=1+x-6x^2\end{aligned}$$

14. Comprueba que las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c}x+2y-z^2=0\\ \\ xy+z-y=0\end{array}\right.$$

define a las variables $x$ e $y$ como funciones implícitas de $z$, tales que $x(2)=0$ e $y(2)=2$. Calcula una aproximación de dichas funciones mediante el polinomio de Taylor de orden 2 de ambas funciones.

**Solución:** Vamos a estudiar si el sistema de ecuaciones definido por

$$\left.\begin{array}{c}x+2y-z^2=0\\ \\ xy+z-y=0\end{array}\right\}$$

define a las variables $x$ y $y$ como funciones implícitas de $z$ en el punto $\vec{a} = (0, 2, 2)$. Hay que notar que la variable independiente es en este caso la variable $z$, es decir, $x = x(z)$ e $y = y(z)$, las funciones que relacionan las tres variables son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= x + 2y - z^2 \\ \varphi_2(x, y, z) &= xy + z - y \end{aligned}$$

Primero comprobaremos que el punto $\vec{a}$ es solución del sistema. Para ello sustituimos el valor $\vec{a}$ en el sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, 2, 2) &= 0 + 2 \cdot 2 - 4 = 0 \\ \varphi_2(0, 2, 2) &= 0 \cdot 2 + 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

En segundo lugar calculamos el determinante Jacobiano de las funciones $\varphi_k$ respecto de las variables dependientes, que en este caso son $x$ e $y$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y, z)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ y & x-1 \end{vmatrix}$$

y evaluando en $\vec{a} = (0, 2, 2)$, comprobamos que no se anula

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} (\overrightarrow{a}) \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 \neq 0$$

Ambas hipótesis permiten escribir $x(z)$ e $y(z)$.

Obtenemos las primeras y segundas derivadas actuando sobre las ecuaciones. Derivando una vez, obtenemos las primeras derivadas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1(x, y, z)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2(x, y, z)) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(x(z) + 2y(z) - z^2\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(x(z)\, y(z) + z - y(z)) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x'(z) + 2y'(z) - 2z = 0 \\ x'(z)\, y(z) + x(z)\, y'(z) + 1 - y'(z) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Evaluamos en $z = 2$; teniendo en cuenta que $x(2) = 0$ e $y(2) = 2$ (puesto que las ecuaciones pasan por el punto $(0, 2, 2)$), obteniendose

$$\left. \begin{aligned} x'(2) + 2y'(2) - 2 \cdot 2 = 0 \\ x'(2)\, y(2) + x(2)\, y'(2) + 1 - y'(2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x'(2)+2y'(2)=4 \\ \\ 2x'(2)-y'(2)=-1 \end{array}\right\}$$

que tiene por solución

$$\begin{array}{rcl} x'(2) & = & \dfrac{2}{5} \\ \\ y'(2) & = & \dfrac{9}{5} \end{array}$$

Para obtener los valores $x''(2)$ y $y''(2)$, tendremos que derivar la ecuación dos veces

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi_1(x,y,z))=0 \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi_2(x,y,z))=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1(x,y,z))\right)=0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2(x,y,z))\right)=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial z}(x'(z)+2y'(z)-2z)=0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial z}(x'(z)y(z)+x(z)y'(z)+1-y'(z))=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} x''(z)+2y''(z)-2=0 \\ \\ x''(z)y(z)+x'(z)y'(z)+x'(z)y'(z)+x(z)y''(z)-y''(z)=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} x''(z)+2y''(z)-2=0 \\ \\ x''(z)y(z)+2x'(z)y'(z)+x(z)y''(z)-y''(z)=0 \end{array}\right\}$$

que junto con los datos del enunciado y los calculados para la primera derivada: $x(2)=0$, $y(2)=2$, $x'(2)=\frac{2}{5}$ y $y'(2)=\frac{9}{5}$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{c} x''(2)+2y''(2)-2=0 \\ \\ x''(2)y(2)+2x'(2)y'(2)+x(2)y''(2)-y''(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x''(2)+2y''(2)=2 \\ \\ 2x''(2)-y''(2)=-\frac{36}{25} \end{array}\right\}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{array}{rcl} x''(2) & = & -\dfrac{22}{125} \\ \\ y''(2) & = & \dfrac{136}{125} \end{array}$$

y los polinomios de Taylor de segundo orden para $x(z)$ e $y(z)$ son

$$p_x(z)=x(2)+x'(0)(z-2)+\frac{1}{2!}x''(0)(z-2)^2=0+\frac{2}{5}(z-2)-\frac{22}{125}(z-2)^2$$

$$p_y(z)=y(2)+y'(0)(z-2)+\frac{1}{2!}y''(0)(z-2)^2=2+\frac{9}{5}(z-2)+\frac{136}{125}(z-2)^2$$

15. Estudia los puntos críticos de las siguientes funciones, indicando su naturaleza:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$

(b) $g(x,y) = -4x^2 - 5y^2$

(c) $h(x,y) = 4x^2 + 5y^2$

(d) $k(x,y) = x^2 + xy$

(e) $l(x,y) = x^3 + y^3$

(f) $m(x,y) = x^2y^2$

(g) $n(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

(h) $o(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(i) $p(x,y,z) = 6 - 4x - 3y - z\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

(j) $q(x,y) = 6 - 4x - 3y - \frac{2}{5}\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

(k) $r(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$

**Solución:** Recordemos que los puntos criticos son las soluciones de la ecuacion

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, k = 1, \ldots, n$$

*a)* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Sistema lineal que tiene como única solución (cualquier método)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3} \\ y &= -\frac{1}{3} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

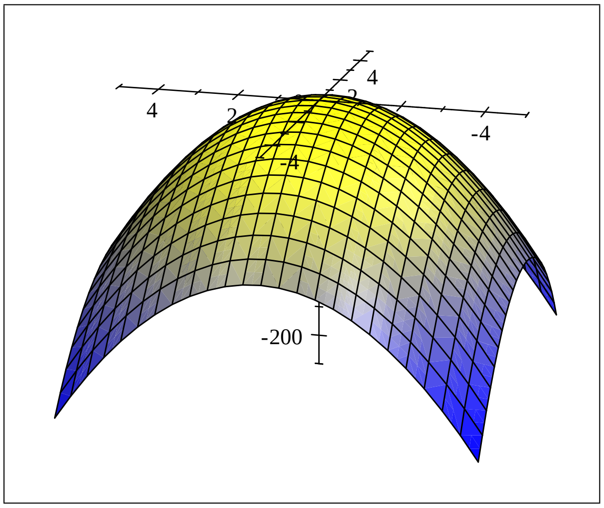
$$\begin{aligned} \Delta_1 H &= 2 > 0 \\ \Delta_2 H &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \\ \Delta_3 H &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0 \end{aligned}$$

Podemos asegurar que el punto

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$$

es un mínimo.

*b)* $g\left(x,y\right)=-4x^{2}-5y^{2}$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow -8x=0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow -10y=0 \end{cases}$$

Sistema lineal que tiene como única solución

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

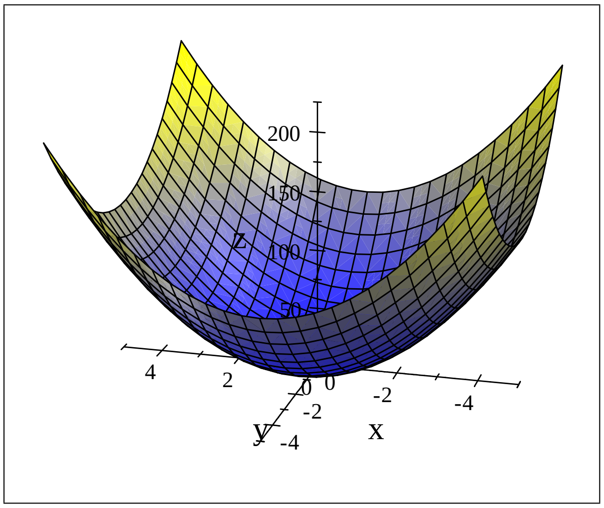
$$H\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{cc} -8 & 0 \\ 0 & -10 \end{array}\right)$$

Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 H\left(0,0\right) & = & -8<0 \\ \Delta_2 H\left(0,0\right) & = & \det\left(\begin{array}{cc} -8 & 0 \\ 0 & -10 \end{array}\right)=80>0 \end{array}$$

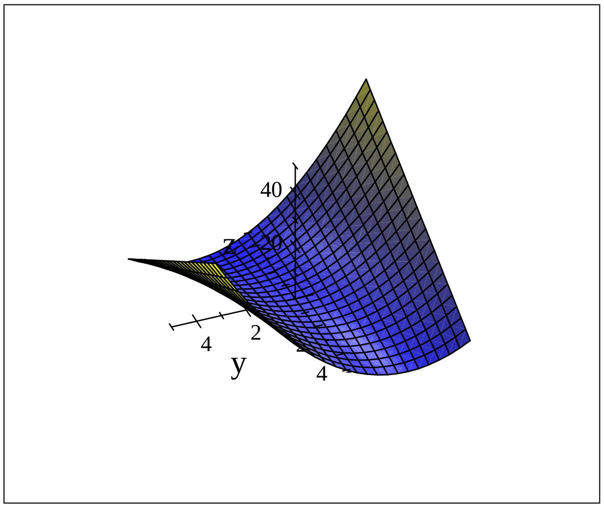
Podemos asegurar que le punto $(0,0)$ es un máximo (ver gráfica).

*c)* $h\left(x,y\right)=4x^{2}+5y^{2}$




Comprobamos que $h(x,y) = -g(x,y)$ siendo $g(x,y)$ la función del apartado anterior, podemos decir por tanto que el punto $(0,0)$ es un mínimo de $h(x,y)$ (ver gráfica).

*d)* $k(x,y) = x^2 + xy$




$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

Sistema lineal que tiene como única solución

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

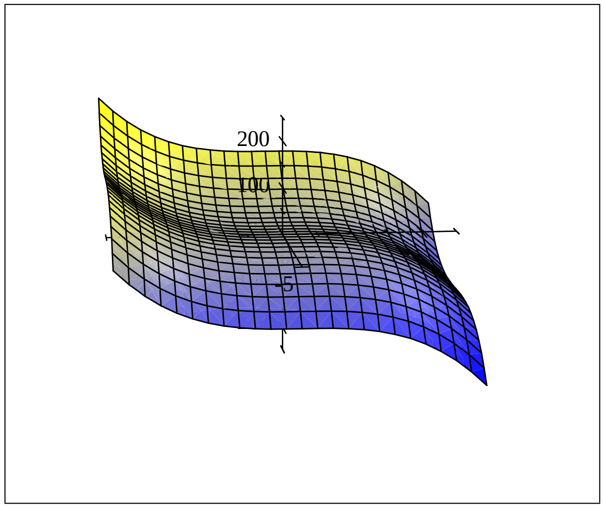
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{aligned}\Delta_1 H(0,0) &= 2 > 0\\ \Delta_2 H(0,0) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1 < 0\end{aligned}$$

Podemos asegurar que le punto $(0,0)$ es un punto de silla (ver gráfica).

*e)* $l(x,y) = x^3 + y^3$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0\\[2ex] \dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 0\end{cases}$$

Sistema que tiene como única solución

$$\begin{aligned} x &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

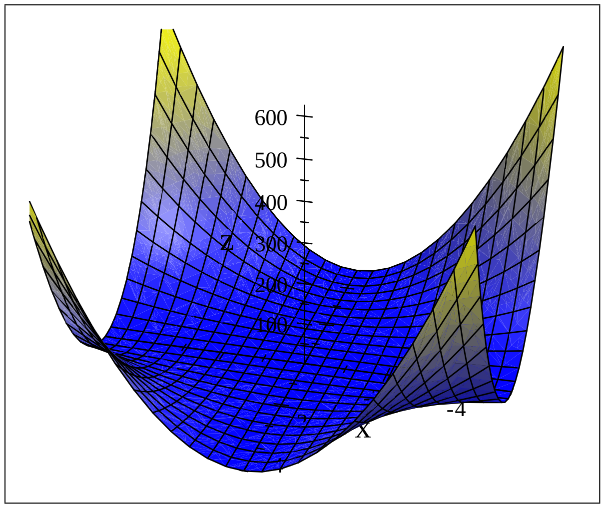
$$\begin{aligned}\Delta_1 H(0,0) &= 0 > 0\\ \Delta_2 H(0,0) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

Luego no podemos decir nada del punto $(0,0)$ con estos datos. Sin embargo podemos comprobar que es un punto de silla, puesto que por una parte $f(0,0) = 0$. También ocurre

$$f(x,x) = 2x^3$$

y sabemos que la función $x^3$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Si $x > 0$ entonces $f(x,x) > 0 = f(0,0)$, pero si $x < 0$, entonces $f(x,x) < 0$, lo que implica que cerca del punto 0 hay puntos donde la función toma valores mayores y puntos donde la función toma valores más pequeños.

*f)* $m(x,y) = x^2y^2$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2xy^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial m}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2y = 0 \end{cases}$$

Sistema que tiene como única solución

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{aligned} \Delta_1 H(0,0) &= 0 > 0 \\ \Delta_2 H(0,0) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Y no podemos decir nada sobre el punto $(0,0)$ con estos valores, sin embargo vemos que la función es siempre positiva puesto que

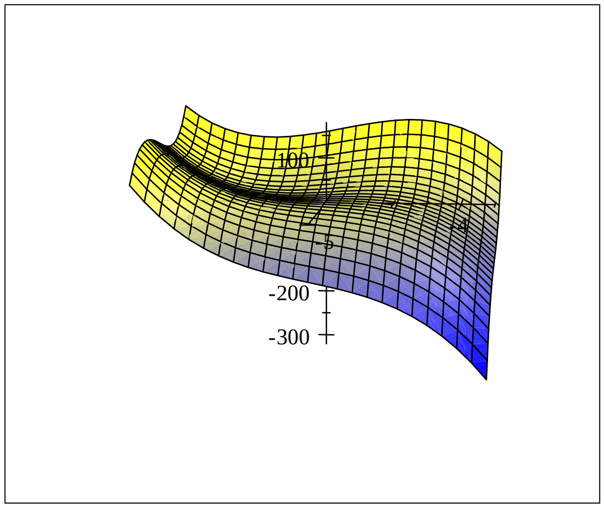
$$x^2y^2 \geq 0$$

y además

$$f(0,y) = f(0,x) = 0 < f(x,y)$$

luego todos los puntos son mínimos y habría infinitos.

*g)* $n\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy+4$




$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial n}{\partial x}\left(x,y,z\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-3y=0\Leftrightarrow x^2=y\\[2ex]\dfrac{\partial n}{\partial y}\left(x,y,z\right)=0\Leftrightarrow 3y^2-3x=0\Leftrightarrow y^2=x\end{array}\right.$$

De la primera ecuación se obtiene $y=x^2$, y si sustituimos en la segunda

$$x^4=x$$

que tiene por soluciones $x=0$ y $x=1$. Tendremos dos puntos $P_1=(0,0)$ y $P_2=(1,1)$. Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores en cada punto. Para $(0,0)$

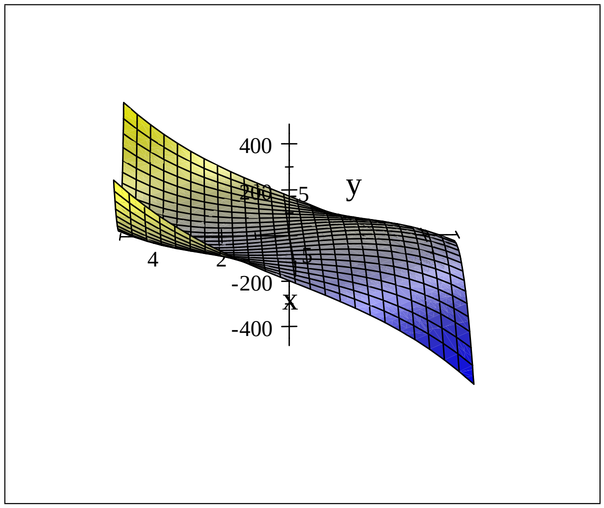
$$\begin{aligned}\Delta_1 H\left(0,0\right) &= 0>0\\ \Delta_2 H\left(0,0\right) &= \det\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix}=-9<0\end{aligned}$$

que indica que es un punto de silla y para $P_2=(1,1)$

$$\begin{aligned}\Delta_1 H\left(0,0\right) &= 6>0\\ \Delta_2 H\left(0,0\right) &= \det\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}=36-9>0\end{aligned}$$

es un mínimo.

*h*) $o(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial o}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial o}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que $x \neq 0$ (y también que $y \neq 0$), así que podemos poner

$$y = \frac{12}{6x} = \frac{2}{x}$$

y sustituímos en la primera ecuación

$$3x^2 + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{12}{x^2} - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4 - 5x^2 = 0$$

Ecuación bicuadrática que se trasnforma en una ecuación de segundo grado. tomando $u = x^2$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

que tiene por solución

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} u_1 = 4 \\ \\ u_2 = 1 \end{cases}$$

Y podemos calcular los valores de $x = \pm\sqrt{u}$

$$x = \sqrt{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{x_1} = 1 \\ \\ x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = \frac{2}{x_2} = -1 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{1} = \begin{cases} x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{2}{x_3} = 2 \\ \\ x_4 = -1 \Rightarrow y_4 = \frac{2}{x_4} = -2 \end{cases}$$

Calculamos el Hessiano para saber la naturaleza de los 4 puntos encontrados $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (-2, -1)$, $P_3 = (1, 2)$ y $P_4 = (-1, -2)$

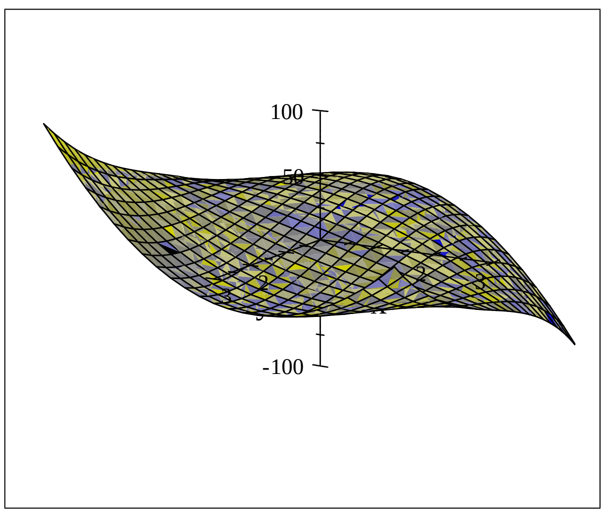
$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{aligned} \Delta_1 H &= 6x \\ \Delta_2 H &= \det \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} = 36\left(x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

Y comprobamos en cada punto

| Punto | $\Delta_1 H(x, y)$ | $\Delta_2 H(x, y)$ | Naturaleza |
|---|---|---|---|
| $P_1 = (2, 1)$ | $12 > 0$ | $108 > 0$ | Posible mínimo |
| $P_2 = (-2, -1)$ | $-12 < 0$ | $108 > 0$ | Posible máximo |
| $P_3 = (1, 2)$ | $6 > 0$ | $-108 < 0$ | Punto de silla |
| $P_4 = (-1, -2)$ | $-6 < 0$ | $-108 < 0$ | Punto de silla |




*i)* $p(x, y, z) = 6 - 4x - 3y - z\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

$$\left\{ \begin{array}{r} \dfrac{\partial p}{\partial x}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow -4 - 2zx = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow -3 - 2zy = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow -\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$. Podemos por tanto despejar $x$ e $y$ en cada ecuación

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{z} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{z^2} \\ y &= -\frac{3}{2z} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4z^2} \end{aligned}$$

y podemos sustituir en la tercera ecuación

$$x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{4}{z^2}+\frac{9}{4z^2}=1 \Leftrightarrow 16+9=4z^2 \Leftrightarrow 4z^2=25 \Leftrightarrow z^2=\frac{25}{4} \Rightarrow z=\begin{cases} z=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Y con estos valores calculamos $x$ e $y$

$$z=\frac{5}{2} \Rightarrow x=-\frac{2}{\left(\frac{5}{2}\right)}=-\frac{4}{5};\ y=-\frac{3}{2\left(\frac{5}{2}\right)}=-\frac{3}{5}$$

$$z=-\frac{5}{2} \Rightarrow x=-\frac{2}{\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{4}{5};\ y=-\frac{3}{2\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{3}{5}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} -2z & 0 & -2x \\ 0 & -2z & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

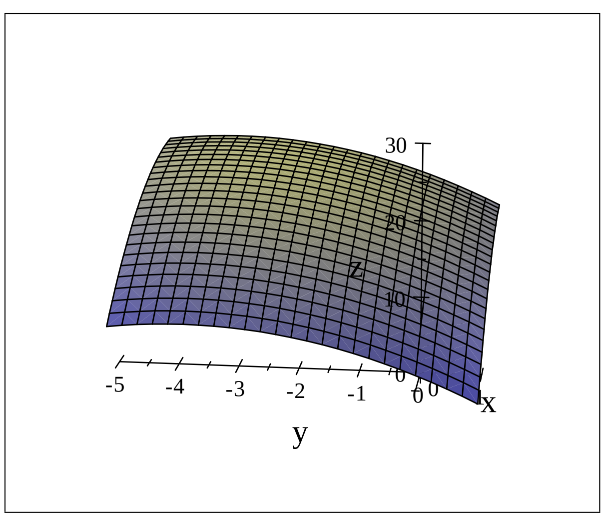
Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{aligned} \Delta_1 H(x,y,z) &= -2z \\ \Delta_2 H(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} -2z & 0 \\ 0 & -2z \end{pmatrix}=4z^2 \\ \Delta_3 H(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} -2z & 0 & -2x \\ 0 & -2z & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}=8\left(x^2+y^2\right)z \end{aligned}$$

Y comprobamos en cada punto

| Punto | $\Delta_1 H(x,y)$ | $\Delta_2 H(x,y)$ | $\Delta_3 H(x,y,z)$ | Naturaleza |
|---|---|---|---|---|
| $P_1=\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{5}{2}\right)$ | $-5<0$ | $25>0$ | $-20<0$ | Máximo relativo |
| $P_2=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right)$ | $5>0$ | $25>0$ | $20>0$ | Mínimo relativo |

*j)* $q(x,y)=6-4x-3y-\frac{2}{5}\left(x^2+y^2-1\right)$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}x-4=0 \\ \\ \dfrac{\partial q}{\partial y}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}y-3=0 \end{cases}$$

Sistema lineal que tiene como única solución (cualquier método)

$$\begin{aligned} x &= -5 \\ \\ y &= -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Calculamos la sucesión de menores

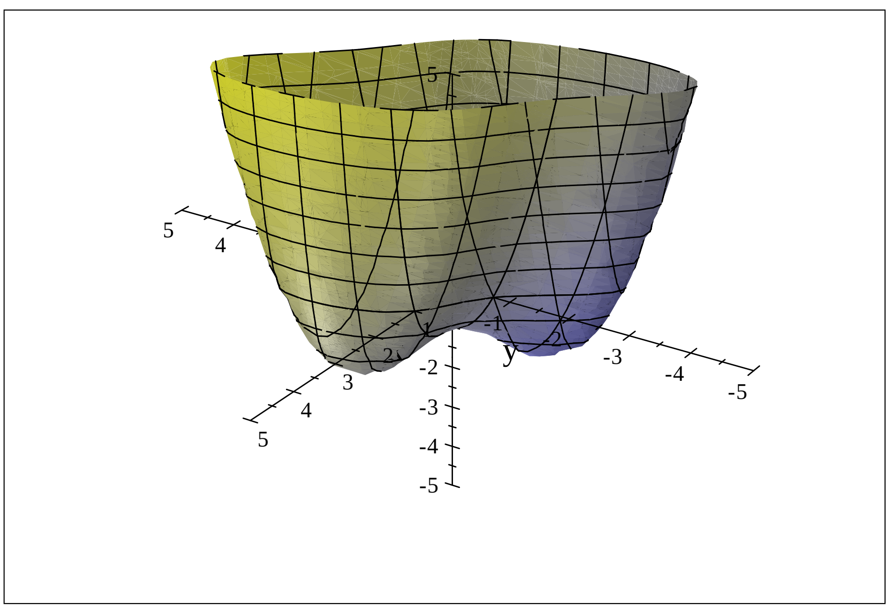
$$\begin{aligned} \Delta_1 H &= -\frac{4}{5}<0 \\ \Delta_2 H &= \det\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}=\frac{16}{25}-0=\frac{16}{25}>0 \end{aligned}$$

Podemos asegurar que le punto

$$\left(-5,-\frac{15}{4}\right)$$

es un máximo.

*k)* $r(x,y)=2x^2-4xy+y^4-1$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 4x-4y=0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -4x+4y^3=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos $x = y$, y sustituimos en la segunda

$$-4y + 4y^3 = 0 \Leftrightarrow y^3 = y \Leftrightarrow y = 0, y = 1, y = -1$$

Tendremos 3 puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0) \\ P_2 &= (1,1) \\ P_3 &= (-1,-1) \end{aligned}$$

Calculamos el Hessiano para saber su naturaleza

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

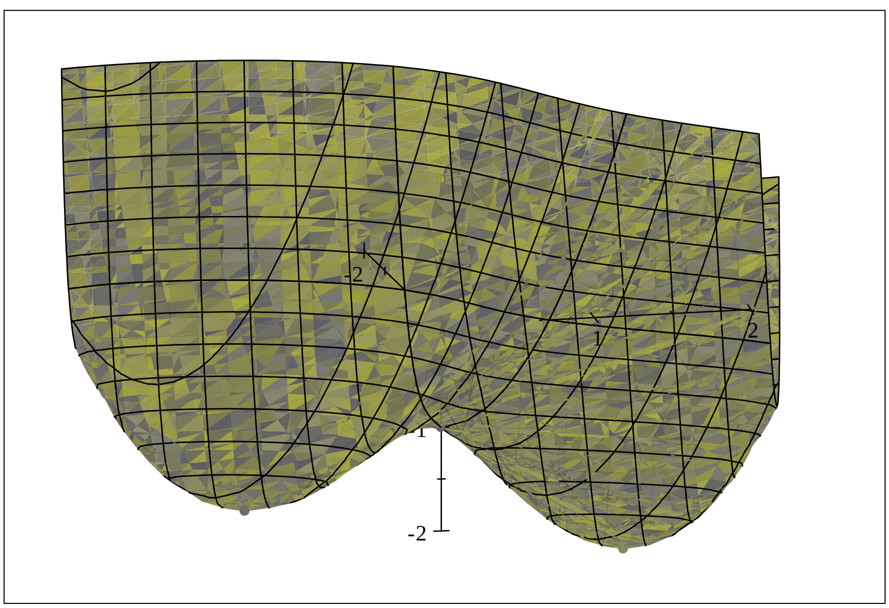
Calculamos la sucesión de menores

$$\begin{aligned} \Delta_1 H &= 4 > 0 \\ \Delta_2 H &= \det \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 48y^2 - 16 \end{aligned}$$

Y comprobamos en cada punto

| Punto | $\Delta_1 H(x,y)$ | $\Delta_2 H(x,y)$ | Naturaleza |
|---|---|---|---|
| $P_1 = (0,0)$ | $4 > 0$ | $-16 < 0$ | Punto de silla |
| $P_2 = (1,1)$ | $4 > 0$ | $32 > 0$ | Mínimo relativo |
| $P_3 = (-1,-1)$ | $4 > 0$ | $32 > 0$ | Mínimo relativo |

Lo podemos comprobar en la siguiente gráfica




Se aprecian los mínimos en los puntos $P_2$ y $P_3$, mientras que en el punto $P_1$ se comprueba que en unas direcciones la función crece y en otras decrece, por tanto es un punto de silla.

16. Dada la función
$$F(x,y)=\int_0^{x^2+y^2} e^{t^2dt}$$
Estudia su continuidad y diferenciabilidad. Calcula sus extremos relativos.

**Solución:** La función del integrando es continua, así como los extremos de integración por tanto la función será continua. Además por el teorema fundamental del cálculo integral la función es derivable y su gradiente se obtiene mediante la regla de la cadena siendo
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=2xe^{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2ye^{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla f(x,y)=\left(2xe^{\left(x^2+y^2\right)^2},2ye^{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$
Calculamos los puntos críticos resolviendo las correspondientes ecuaciones
$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(2xe^{\left(x^2+y^2\right)^2},2ye^{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=(0,0)\Leftrightarrow x=y=0$$
Usando el Hessiano podríamos determinar la naturaleza de este punto crítico
$$\begin{aligned}Hf(x,y)&=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \\ \frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2F}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2e^{\left(x^2+y^2\right)^2}+8x^2e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right) & 8xye^{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right)\\ \\ 8xye^{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right) & 2e^{\left(x^2+y^2\right)^2}+8y^2e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
y si evaluamos en el punto $(0,0)$
$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$
y claramente el punto es un mínimo relativo estricto puesto que $\Delta_1=2>0$ y $\Delta_2=4>0$; además podemos comprobar que es un mínimo absoluto teniendo en cuenta que como el integrando es una función positiva, junto con los extremos de integración $0\leq x^2+y^2$ implican que $F(x,y)\geq 0$ y además $F(0,0)=0$, luego se cumple
$$F(x,y)\geq F(0,0)$$

17. Se considera la función
$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$
Estudia su continuidad y diferenciabilidad y en su caso calcula $df(x,y)$. Calcula y clasifica sus extremos relativos.

**Solución:** La función es continua en $\mathbb{R}^2$ puesto que por una parte el argumento de la función logaritmo neperiano es siempre positivo y por otra el denominador de la función del integrando no se anula, luego es continua y por tanto la función definida mediante la integral es además derivable. Su gradiente se obtiene mediante la regla de la cadena siendo

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla f(x,y)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$

Calculamos los puntos críticos resolviendo las correspondientes ecuaciones

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)=(0,0)\Leftrightarrow x=y=0$$

Usando el Hessiano podríamos determinar la naturaleza de este punto crítico

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\left(1+x^2+y^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}-\frac{2x\left(1+x^2\right)-4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} & \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\\ \\ \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} & \frac{2\left(1+x^2+y^2\right)-4y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\end{pmatrix}$$

y si evaluamos en el punto $(0,0)$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

y claramente el punto es un mínimo relativo estricto puesto que $\Delta_1=2>0$ y $\Delta_2=4>0$.

18. Se considera la función

$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x\frac{2t}{1+t^4}dt$$

Prueba que el punto $(1,0)$ es crítico y clasifícalo. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

**Solución:** La integral es inmediata

$$\int_0^x\frac{2t}{1+t^4}dt=\int_0^x\frac{2t}{1+\left(t^2\right)^2}dt=\arctan x^2$$

y por tanto

$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\arctan x^2$$

que es una función continua en $\mathbb{R}^2$ puesto que por una parte el argumento de la función logaritmo neperiano es siempre positivo. Su gradiente (también se puede obtener mediante la regla de la cadena a partir de la expresión integral) es

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}-\dfrac{2x}{1+x^4}\\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla f(x,y)=\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-\frac{2x}{1+x^4},\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$

donde

$$\nabla f(1,0) = (0,0)$$

y por tanto $(1,0)$ es un punto crítico. Para calcular el polinomio de Taylor de grado 2, necesitamos el Hessiano

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\left(1+x^2+y^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} - \frac{2\left(1+x^4\right)-8x^4}{\left(1+x^4\right)^2} & \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \\ \\ \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} & \frac{2\left(1+x^2+y^2\right)-4y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

y si evaluamos en el punto $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y claramente el punto es un mínimo relativo estricto puesto que $\Delta_1 = 1 > 0$ y $\Delta_2 = 1 > 0$. El polinomio de Taylor es con $f(1,0) = \ln(2) - \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= f(1,0) + \nabla f(1,0)(x,y,z) + \frac{1}{2}(x-1,y)\, Hf(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\ln(2) - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(x-1,y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\ln(2) - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} y^2 \end{aligned}$$

19. **Ajuste por mínimos cuadrados**. El ajuste por mínimos cuadrados de los cuatro puntos $(-1,4)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ a una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ requiere resolver el siguiente problema de programación no lineal: Minimizar $f(a,b,c)$, donde

$$f(a,b,c) = (4-(a-b+c))^2 + (1-c)^2 + (1-(a+b+c))^2 + (1+(a+b+c))^2$$

Como en todos los problemas de ajustes de curvas lo que se pretende es minimizar la suma de los errores que se cometen al aproximar los puntos por la parábola, son problemas de la forma

$$E = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - M(x_k)\right)^2$$

siendo $M(x)$ el modelo elegido en cada caso y $N$ es el número de pares de datos $(x_k, y_k)$. Por ejemplo, para la parábola sería $M(x) = ax^2 + bx + c$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c_k\right)\right)^2$$

y lo que se busca es el valor de los parámetros $a, b$ y $c$ que minimizan el error $E$, en este caso

$$E = f(a,b,c) = (4-a+b-c)^2 + (1-c)^2 + (1-a-b-c)^2 + (1+a+b+c)^2$$

. Se trata de un problema de optimización sin restricciones y tenemos que buscar los puntos críticos. Calculamos el Gradiente de $f$ respecto a los parámetros $a, b$ y $c$ e igualamos a 0

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2(4-a+b-c)-2(1-a-b-c)+2(1+a+b+c)=6a+2b+6c-8=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2(4-a+b-c)-2(1-a-b-c)+2(1+a+b+c)=2a+6b+2c+8=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = -2(4-a+b-c)-2(1-c)-2(1-a-b-c)+2(1+a+b+c)=6a+2b+8c-10=0$$

Sistema lineal cuya solución es

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Y usaremos el Hessiano para comprobar que es un mínimo

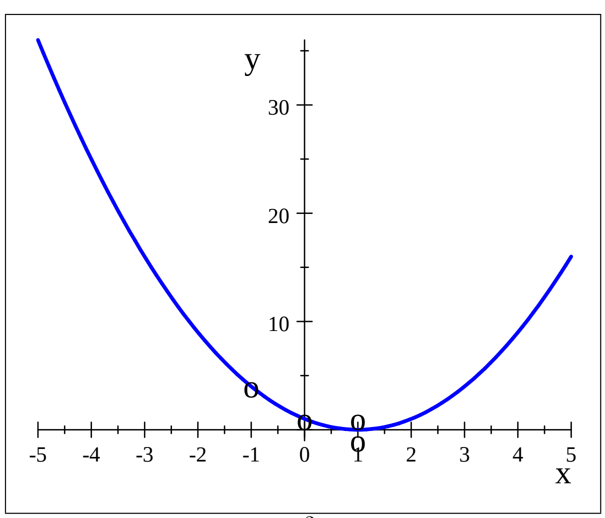
$$HE = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

y calculando la secuencia $\Delta_k$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 6>0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36-4=32>0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (288+24+24)-(216+24+32)=64>0 \end{aligned}$$

Luego todos los menores son positivos y el punto es un mínimo. La parábola buscada es

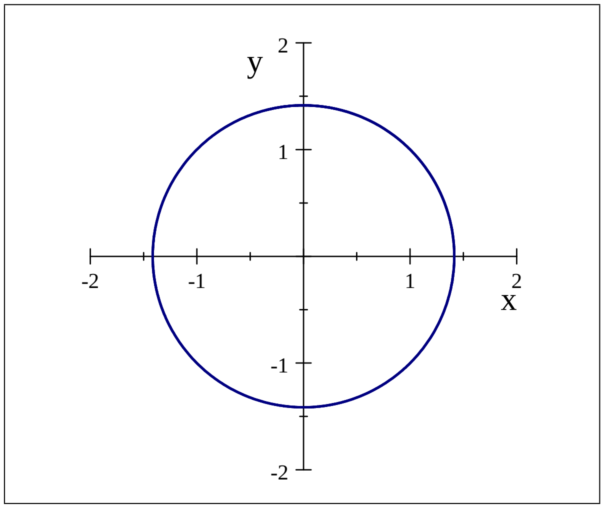
$$M(x)=x^2-2x+1$$




Parábola $x^2-2x+1$.

20. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el recinto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\right\}$

**Solución:** El conjunto $K$ es el interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r = \sqrt{2}$. No se tiene en cuenta la frontera puesto que se ha utilizado la desigualdad estricta, por tanto la forma de resolver el problema es plantear un problema sin restricciones y luego comprobar si las soluciones están dentro del conjunto $K$.



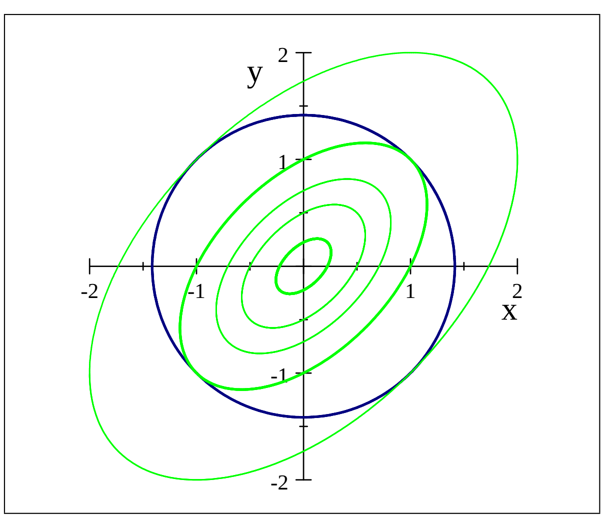

Calculamos los puntos críticos $x^2 - xy + y^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -x + 2y = 0 \end{cases}$$

que tiene como única solución el punto $(0,0)$ y usando el Hessiano en el punto

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

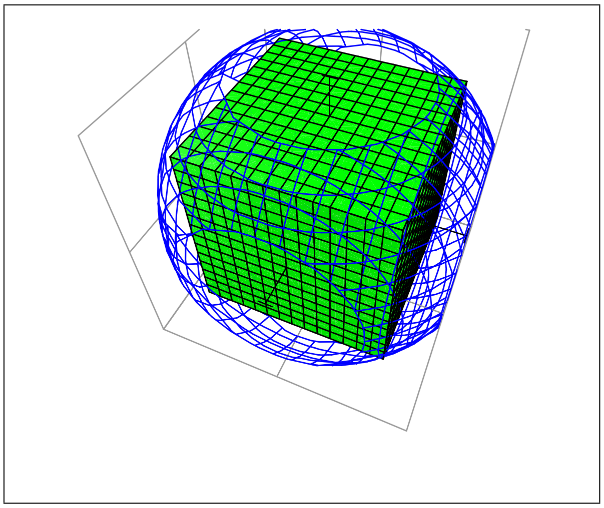
vemos que $\Delta_1 H = 2 > 0$ y $\Delta_2 H = 4 - 1 = 3 > 0$, lo que lo convierte en un punto de mínimo relativo estricto. Podemos comprobar en la gráfica como las diferentes curvas de nivel van disminuyendo hasta el origen, dentro del conjunto $K$.



El máximo se alcanzaría en la frontera, justo en la circunferencia, pero esos puntos no están en $K$, por tanto no hay máximo, nos podemos acercar todo lo que queramos a la frontera sin llegar a contactar con ella.

21. Calcula las dimensiones del cubo de volumen máximo que se puede incluir en una esfera de radio 1.

**Solución:**



Sean $(x, y, z)$ las coordenadas de la esquina superior derecha del cubo inscrito en la esfera de radio 1. El volumen viene dado por el producto de las longitudes de los lados en las respectivas dimensiones, es decir

$$V(x, y, z) = (2x) \cdot (2y) \cdot (2z) = 8xyz,$$

por otra parte el punto $(x, y, z)$ está sobre la esfera, así que debe cumplir su ecuación. El problema se puede plantear como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 8xyz \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}$$

que es un problema de Lagrange. Para resolverlo construimos el Lagrangiano

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 4yz + \lambda x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 4xz + \lambda y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8xy + 2\lambda z = 0 \Leftrightarrow 4xy + \lambda z = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

Restando (1) y (2) obtenemos

$$(4yz + \lambda x) - (4xz + \lambda y) = 0 \Longleftrightarrow \lambda (x - y) + 4z (y - x) = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(\lambda - 4z) = 0,$$

ecuación que nos dos opciones

$$y = x \quad \text{o} \quad \lambda = 4z$$

Para el caso $y = x$, el sistema quedaría

$$4xz + \lambda x = 0 \qquad (5)$$

$$4x^2 + \lambda z = 0 \qquad (6)$$

$$2x^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (7)$$

De la ecuación (5) tenemos

$$x\left(4z + \lambda\right) = 0$$

pero si $x = 0$, entonces no hay paralelepípedo, así que podemos asumir

$$4z + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4z$$

y sustituyendo este valor en (6)

$$4x^2 - 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = z^2$$

y usando ahora la ecuación (7)

$$3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y como

$$z^2 = x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y de este apartado obtenemos 4 puntos

$$P_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_3 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_4 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Para el caso $\lambda = 4z$, el sistema queda como

$$4yz + 4zx = 0 \qquad (8)$$

$$4xy + 4z^2 = 0 \qquad (9)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (10)$$

De la ecuación (8) obtenemos

$$4z\left(y + x\right) = 0$$

y como para $z = 0$ no tendríamos paralelepípedo, entonces $y = -x$ y sustituyendo en (9)

$$-4x^2 + 4z^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = z^2,$$

y usando (10)

$$x^2 + (-x)^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y como en el caso anterior tendremos

$$z^2 = x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

y otros cuatros puntos

$$P_5 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_6 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_7 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_8 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

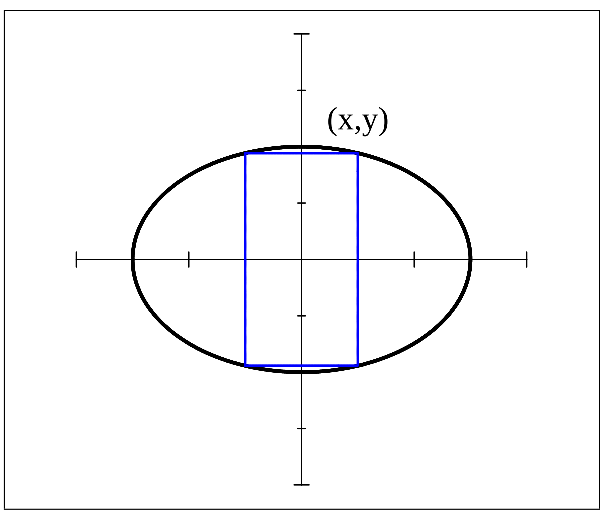
El problema nos ha dado los 8 vértices del paralelepípedo, como habíamos supuesto que $(x, y, z)$ eran las coordenadas del vértice que hay en el primer octante, entonces deben ser positivas y la solución sería $P_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, siendo las dimensiones y el volumen del paralelepípedo máximo:

$$\begin{aligned} a &= b = c = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ V(a, b, c) &= 8\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

22. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que está contenido en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2.$$

**Solución:** Sean $(x, y)$ las coordenadas de las esquina superior derecha del rectánculo inscrito en la elipse (ver figura) .




El área del rectángulo es base por altura, por tanto vendrá dada por la siguiente expresión

$$A(x, y) = (2x) \cdot (2y) = 4xy,$$

por otra parte el punto $(x, y)$ está sobre la elipse, así que debe cumplir su ecuación. El problema se puede plantear como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4xy \\ \text{Sujeto a} & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

que es un problema de Lagrange. Para resolverlo construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4y + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4x + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (2) podemos despejar el multiplicador $\lambda$

$$\lambda = -2a^2\frac{y}{x}, \qquad (4)$$

$$\lambda = -2b^2\frac{x}{y}, \qquad (5)$$

notar que es posible dividir por $x$, puesto que si $x = 0$, entonces de la ecuación (1) se obtendría $y = 0$ y por tanto la ecuación (3) no se podría cumplir; lo mismo ocurre para la variable $y$, tampoco puede ser nula. Igualando las ecuaciones (4) y (5)

$$a^2\frac{y}{x} = b^2\frac{x}{y} \Leftrightarrow a^2y^2 = b^2x^2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

y podemos sutituir en (3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$y^2 = b^2\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Hemos conseguido 4 puntos que son los cuatro vértices del rectángulo tal y como aparece en la figura anterior.

$$P_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_3 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Las dimensiones corresponden a los lados del rectángulo

$$\text{base} = 2\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\text{altura} = 2\frac{b}{\sqrt{2}} = b\sqrt{2}$$

y el área máxima será

$$\text{Área} = 2ab.$$

23. Se dispone de una cantidad fija de material para fabricar una caja rectangular. Calcula las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo posible.

**Solución:** Para determinar las dimensiones de una caja rectangular de forma que contenga el mayor volumen posible, pero utilizando para ello una cantidad fija de material. El problema en forma abstracta se podría plantear en los siguientes términos

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & \text{Volumen de la caja} \\ \text{sujeto a} & \text{Área lateral fija} \end{array}$$

Con el fin de resolver este problema habrá que modelizarlo matemáticamente, es decir tendremos que expresarlo en términos matemáticos. El primer paso para modelizar un problema de optimización es identificar y definir las variables que están implicadas en dicho problema, en este caso y puesto que estamos tratando de determinar el tamaño de una caja rectangular, la opción más clara es considerar como variables sus tres dimensiones rectangulares usuales (ancho, largo, alto) y que representamos con $x$, $y$, $z$.

Con estas variables, la función para la que tenemos que encontrar el mejor valor será el volumen de la caja que puede expresarse como

$$V(x, y, z) = xyz$$

A continuación debemos tener en cuenta las limitaciones existentes sobre el material. Como este material se utiliza para construir las paredes de la caja, necesitaremos considerar el área lateral de la misma, y si la caja tiene tapa, dicha área será

$$A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$$

Por último, teniendo en cuenta que las dimensiones de la caja no pueden ser negativas el problema puede expresarse matemáticamente como

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & xyz \\ \text{sujeto a} & xy + yz + zx = \frac{A}{2} \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}.$$

Se pueden omitir las restricciones de positividad sobre las variables ya que por la naturaleza del problema, los valores de estas variables deben $> 0$; si alguna de las variables $x, y$ o $z$ es nula, entonces no tendremos caja y no habrá volumen. La función Lagrangiana para este problema es

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\left(xy + yz + zx - \frac{A}{2}\right)$$

y los puntos críticos de $L$

$$\nabla L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad yz + \lambda(y + z) = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad xz + \lambda(x + z) = 0 & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy + \lambda(x + y) = 0 & (3) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy + yz + zx - \dfrac{A}{2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Restando (1) y (2) obtenemos

$$(yz + \lambda (y+z)) - (xz + \lambda (x+z)) = 0 \Leftrightarrow (y-x)(z+\lambda) = 0$$

Así que o bien $y = x$, o bien $\lambda = -z$. Pero si $\lambda = -z$, entonces de la ecuación (1)

$$yz - z(y+z) = 0 \Rightarrow yz - zy - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

y no habría caja. Así que debe ocurrir $y = x$.

Restando (1) y (3) obtenemos

$$(yz + \lambda (y+z)) - (xy + \lambda (x+y)) = 0 \Leftrightarrow (z-x)(y+\lambda) = 0$$

Así que o bien $z = x$, o bien $\lambda = -y$. Pero si $\lambda = -y$, entonces de la ecuación (1)

$$yz - y(y+z) = 0 \Rightarrow yz - y^2 - yz = 0 \Rightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

y no habría caja. Así que debe ocurrir $z = x$.

Como $x = y = z$, usamos la ecuación (4)

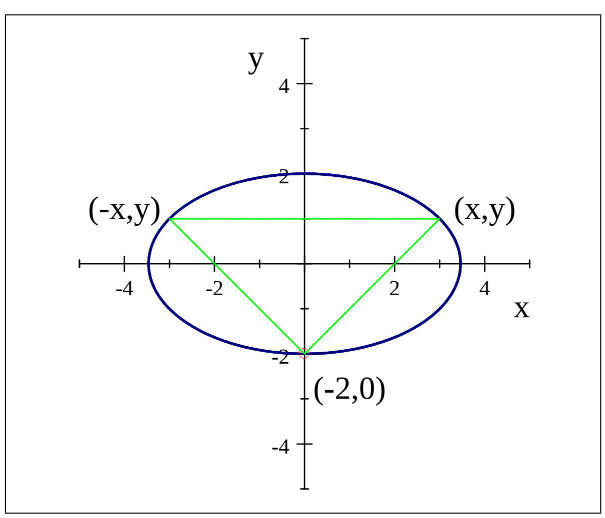
$$xy + yz + zx - \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{A}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{A}{6}},$$

por las condiciones del problema, sólo cogemos la positiva y el sistema anterior tiene como única solución

$$x = y = z = \sqrt{\frac{A}{6}} \qquad \lambda = -\sqrt{\frac{A}{24}}.$$

24. Se considera el conjunto de triángulos isósceles incritos en la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, con vértice fijo en $(0, -2)$ y base paralela al eje OX. Hallar los triángulos de área máxima y mínima.

**Solución:** Si $(x, y)$ son las coordenadas de uno de los vértices sobre la elipse, por la construcción el otro vértice será simétrico respecto al eje $OY$, es decir, tendrá de coordenadas $(-x, y)$,



de forma que la base del triángulo tendrá longitud $2x$, mientras que la altura será $(y+2)$ y el área viene dada por

$$A(x,y) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2x(y+2)}{2} = x(y+2)$$

y el problema será

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x(y+2) \\ \text{Sujeto a} & x^2+3y^2=12 \end{array}$$

que resolvemos usando el método de los multiplicadores de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = x(y+2) + \lambda\left(x^2+3y^2-12\right)$$

Buscamos los puntos críticos

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow (y+2) + 2\lambda x = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x + 6\lambda y = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2+3y^2-12 = 0 \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación

$$x = -6\lambda y$$

25. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ con la condición $3x^2+y^2+6z^2 = 1$ y $-y+z = 0$.

    **Solución:** Consiste en resolver el problema de Lagrange con dos restricciones

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x^2+y^2 \\ \text{Sujeto a} & 3x^2+y^2+6z^2-1=0 \\ & -y+z=0 \end{array}$$

26. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x+z$ en la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$.

    **Solución:** Consiste en resolver el problema de Lagrange con dos restricciones

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2+z^2-1=0 \end{array}$$

27. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = z$ en el recinto

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0\right\}.$$

    Nota: La única solución de la ecuación $t + e^t = 1$ es $t = 0$.

    **Solución:** Consiste en resolver el problema de Lagrange con dos restricciones

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & z \\ \text{Sujeto a} & z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{array}$$

28. Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x+y+z$ condicionados por $x^2+2y^2+3z^2 = 1$.

    **Solución:** Consiste en resolver el problema de Lagrange con dos restricciones

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x+y+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+2y^2+3z^2-1=0 \end{array}$$

29. Resuelve el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \\ \text{sujeto a} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = c \end{cases}$$

donde $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es un vector no nulo de $n$ componentes, $c$ es una constante y $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Resuelve el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & a \cdot x = c \end{cases}$$

donde $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es un vector no nulo de $n$ componentes, $c$ es una constante y $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Solución: $x = \frac{c}{\|a\|^2} a$

Es un problema de Lagrange o problema con restricciones de igualdad. Usando las componentes de los vectores **a** y **x**, el Lagrangiano será

$$L(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - c)$$

y los puntos críticos se obtendrán de la ecuación $\nabla L = 0$. Tendremos $n$ ecuaciones para las variables $x_k$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 2x_k + \lambda a_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

y una para la variable $\lambda$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - c = 0 \qquad (2)$$

Para cada valor de $k$ en (1) obtendremos

$$2x_k + \lambda a_k = 0,$$

de donde

$$x_k = -\frac{\lambda}{2} a_k \qquad k = 1, \ldots, n,$$

y sustituyendo en (2)

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - c = 0 \Rightarrow a_1 \left(-\frac{\lambda a_1}{2}\right) + \cdots + a_n \left(-\frac{\lambda a_n}{2}\right) - c = 0,$$

sacando factor común $\frac{-\lambda}{2}$

$$-\frac{\lambda}{2} \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) - c = 0$$

y despejando

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Sustituyendo en la expresión de $x_k$

$$x_k = -\frac{\lambda}{2}a_k = \frac{c}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}a_k = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2}a_k,$$

es decir

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2}a_1, \ldots, \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2}a_n\right) = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$

30. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy$, sobre el conjunto compacto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$.

31. Una placa con forma circular $x^2 + y^2 \leq 1$,se calienta de manera que en cada punto $(x,y)$, la temperatura viene dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Obtén los puntos de la placa donde se alcanza la mayor y menor temperatura.

32. Resuelve los siguientes apartados:

    *a*) Calcula y clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

    *b*) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y)$ sobre el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2; y \geq 0\right\}$$

**Solución:**

*a*) Para encontrar los puntos críticos resolvemos la ecuación $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad (1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 2xy = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

En la ecuación (2) sacamos factor común la $y$ para poner

$$y(3y - 2x) = 0$$

que nos da dos opciones $y = 0$ y $3y - 2x = 0$.
Para $y = 0$, sustituimos en la ecuación (1)

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \end{cases}$$

Para $3y - 2x = 0$, es decir $y = \frac{2}{3}x \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}x^2$, volvemos a utilizar la ecuación (1)

$$3x^2 - \frac{4}{9}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{23}{9}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{23} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{\sqrt{23}} \Longrightarrow P_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}\right) \\ \\ x_4 = -\frac{3}{\sqrt{23}} \Longrightarrow P_4 = \left(-\frac{3}{\sqrt{23}}, -\frac{2}{\sqrt{23}}\right) \end{cases}$$

Calcularemos el hessiano para estudiar la naturaleza de los puntos críticos

$$Hf\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{cc} 6x & -2y \\ -2y & 6y-2x \end{array}\right)$$

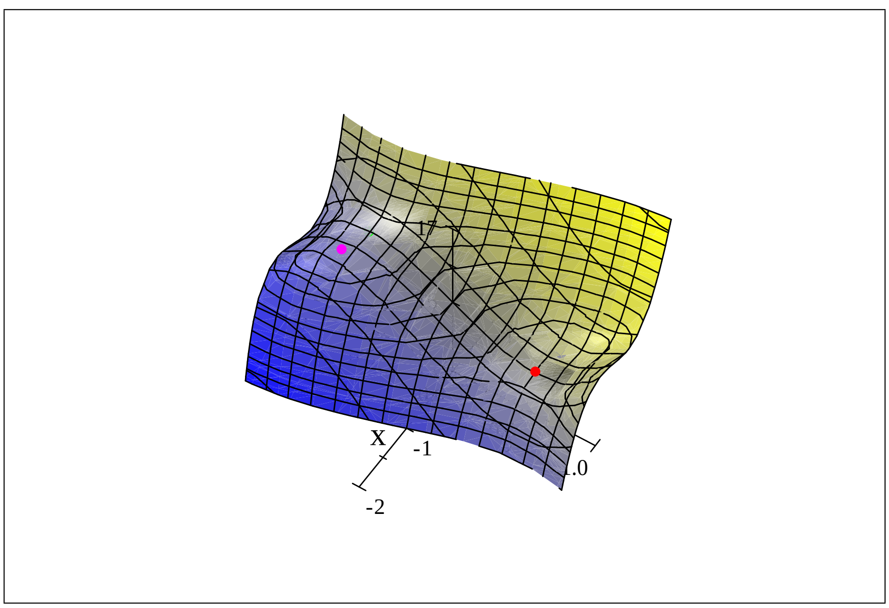
los menores principales son

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 Hf\left(x,y\right) & = & 6x \\ \Delta_2 f Hf\left(x,y\right) & = & 36xy-12x^2-4y^2 \end{array}$$

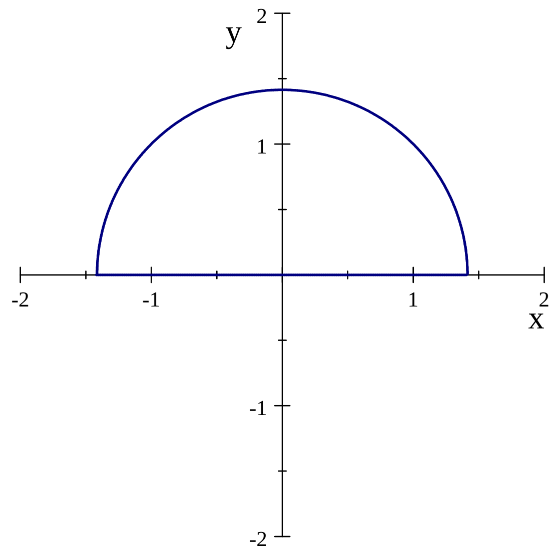
y evaluamos en cada punto (ver gráfica)

| Punto | $\Delta_1 H\left(x,y\right)$ | $\Delta_2 H\left(x,y\right)$ | Naturaleza | Color |
|---|---|---|---|---|
| $P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ | $\frac{6}{\sqrt{3}}>0$ | $-12\frac{1}{3}<0$ | Punto de silla | Rojo |
| $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ | $-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$ | $-12\frac{1}{3}<0$ | Punto de silla | Verde |
| $P_3=\left(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ | $\frac{18}{\sqrt{23}}>0$ | $4>0$ | Mínimo relativo | Azul |
| $P_4=\left(-\frac{3}{\sqrt{23}},-\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ | $-\frac{18}{\sqrt{23}}<0$ | $4>0$ | Máximo relativo | Magenta |

$$z=x^3+y^3-xy^2-x+16$$




*b*) Para calcular los máximos y mínimos absolutos (que existen por el teorema de Weierstrass, ya que la función es continua y el conjunto un compacto) de $f$ sobre $K$, que está representado en la siguiente gráfica




Conjunto $K$

Dividimos el problema en dos subproblemas.

$$\text{Problema P}\left\{\begin{array}{c}\text{Optimizar } x^3+y^3-xy^2-x+16\\ K=\delta K\cup \mathring{K}\\ K \text{ compacto}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{Subproblema P1}\left\{\begin{array}{r}\text{Optimizar } x^3+y^3-xy^2-\\ (x,y)\in \mathring{K}\end{array}\right.\\ \\ \text{Subproblema P2}\left\{\begin{array}{r}\text{Optimizar } x^3+y^3-xy^2-\\ (x,y)\in \delta K\end{array}\right.\end{array}$$

El problema P1 es un problema sin restricciones que ya hemos resuelto en el apartado anterior. Lo único que nos queda por hacer es comprobar cuales de los puntos críticos cumplen las restricciones:

| Punto | $y\geq 0$ | $x^2+y^2\leq 2$ | |
|---|---|---|---|
| $P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ | SI | SI | VÁLIDO |
| $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ | SI | SI | VÁLIDO |
| $P_3=\left(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ | SI | SI | VÁLIDO |
| $P_4=\left(-\frac{3}{\sqrt{23}},-\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ | NO | SI | DESCARTADO |

El problema P2 es un problema sobre la frontera del conjunto que está definida por las igualdades y que en este caso está formada por dos curvas: la semicircunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$ ($x^2+y^2-2=0$ con $y\geq 0$) y el segmento que une el punto $\left(-\sqrt{2},0\right)$ con el $\left(\sqrt{2},0\right)$ situado sobre el eje $OX$ ($y=0$). Tendremos que resolver dos subproblemas

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Optimizar} & x^3+y^3-xy^2-x+16\\ & y=0\end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^3+y^3-xy^2-x+16 \\ & x^2+y^2-2=0 \end{array}\right.$$

Ambos problemas son de Lagrange. El primero es muy sencillo y se resuelve directamente puesto que al ser $y=0$, el problema queda

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^3-x+16 \\ & x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \end{array}$$

que es un problema de optimización en una variable que resolvemos de forma usual, buscando los puntos críticos de la función que están dentro del intervalo y comparando los valores que toma la función en estos puntos y en los extremos del intervalo. Los puntos críticos son

$$f(x)=x^3-x+16\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-1=0\Leftrightarrow x=\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}}\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \end{array}\right.$$

que está en el intervalo, de hecho son puntos que ya hemos encontrado en el apartado anterior. Tomamos los extremos del intervalo y ahora comparamos los valores de la función en todos esos puntos

$$\begin{aligned} f\left(-\sqrt{2},0\right) &= \left(-\sqrt{2}\right)^2-\left(-\sqrt{2}\right)+16=19.414 \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+16=16.911 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+16=16.911 \\ f\left(\sqrt{2},0\right) &= \left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)+16=16.586 \end{aligned}$$

El mayor valor se alcanza en $x_1=-\sqrt{2}$ y el menor en $x_2=\sqrt{2}$, luego en la semirrecta tendremos un máximo en el $x_1$ y un mínimo en el punto $x_2$, ambos con coordenada $y$ nula, lo que nos da 2 puntos en el plano

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(-\sqrt{2},0\right) \\ P_2 &= \left(\sqrt{2},0\right) \end{aligned}$$

El segundo problema se resuelve utilizando los multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta la restricción. Construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-xy^2-x+16+\lambda\left(x^2+y^2-2\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcll} \frac{\partial L}{\partial x}=0 & \Rightarrow & 3x^2-y^2-1+2\lambda x=0 & (1) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 & \Rightarrow & 3y^2-2xy+2\lambda y=0 & (2) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0 & \Rightarrow & x^2+y^2-2=0 & (3) \end{array}\right.$$

Despejando $\lambda$ de la primera y segunda ecuaciones y suponiendo $x \neq 0$

$$2\lambda x = y^2 + 1 - 3x^2 \Rightarrow \lambda = \frac{y^2 + 1 - 3x^2}{2x}$$

En el caso de que $x = 0$, entonces la primera ecuación nos da $-y^2 - 1 = 0$, que no tiene solución real.

y tenemos el punto $P_3 = (0, 1)$, que cumple la tercera ecuación, adicionalmente y sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, obtenemos $\lambda = -1$. En resumen tenemos un primer punto solución

$$P_3 = (0, 1)\,;\ \lambda = -1$$

Suponiendo ahora $y \neq 0$, de la segunda ecuación obtenemos

$$x + 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2\lambda y = -x - 2y \Rightarrow \lambda = \frac{-x - 2y}{2y}$$

En el caso de que $y = 0$, y usando esa misma ecuación obtenemos el valor $x = 0$, sin embargo, el punto $(0, 0)$ no cumple la tercera ecuación y descartamos este caso.

c) **Example 1** *Queda ver qué ocurre cuando $x \neq 0$ e $y \neq 0$, igualando los valores de $\lambda$*

$$\frac{1 - y - 2x}{2x} = \frac{-x - 2y}{2y} \iff 2y\,(1 - y - 2x) = 2x\,(-x - 2y) \iff 2y - 2y^2 - 4xy = -2x^2 - 4xy \iff 2y - 2y^2 =$$

*de donde se obtiene la relación*

$$x^2 = y^2 - y$$

*y sustituyendo en la tercera ecuación*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff \left(y^2 - y\right) + y^2 - 1 = 0 \iff 2y^2 - y - 1 = 0,$$

*ecuación de segundo grado que tiene por solución*

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} y = 1 \\ \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

*la solución negativa no sirve puesto que $y \geq 0$. El valor positivo ya lo hemos obtenido anteriormente ya que $x$ debe ser $0$. Por tanto, para esta parte de la frontera sólo tenemos un punto: el $P_3 = (0, 1)$.El problema P2 es un problema de Lagrange con una restricción de igualdad, así que construimos el Lagrangiano*

$$L\,(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 - 2x + y^2 - 3\right)$$

*y buscamos sus puntos críticos*

$$\nabla L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + \lambda\,(2x - 2) = 0 & \text{(1)} \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y + \lambda\,(2y) = 0 & \text{(2)} \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 & \text{(3)} \end{cases}$$

*De la ecuación (2) se obtiene, sacando factor común* $2y$

$$2y\,(1+\lambda)=0 \Rightarrow y\,(1+\lambda)=0$$

*que proporciona dos opciones*

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 1+\lambda &= 0 \Rightarrow \lambda=-1 \end{aligned}$$

*Para* $y=0$*, sustituimos en la ecuación (3)*

$$x^2-2x-3=0$$

*que tiene por soluciones*

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\frac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

*y utilizamos la ecuación (1) para encontrar el valor de* $\lambda$

$$2x+\lambda\,(2x-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2x}{2-2x}=\begin{cases} x_1=3 \Rightarrow \lambda_1=\frac{6}{2-6}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \\ x_2=-1 \Rightarrow \lambda_1=\frac{6}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2 \end{cases}$$

*Para* $\lambda=-1$*, si usamos la ecuación (1) llegamos a una contradicción. Por tanto tendremos en este caso dos puntos*

$$P_2=(3,0)\ \ y\ \lambda=-\frac{3}{2}$$
$$P_3=(-1,0)\ \ y\ \lambda=2$$

*Evaluamos la función en todos los puntos (frontera e interior)*

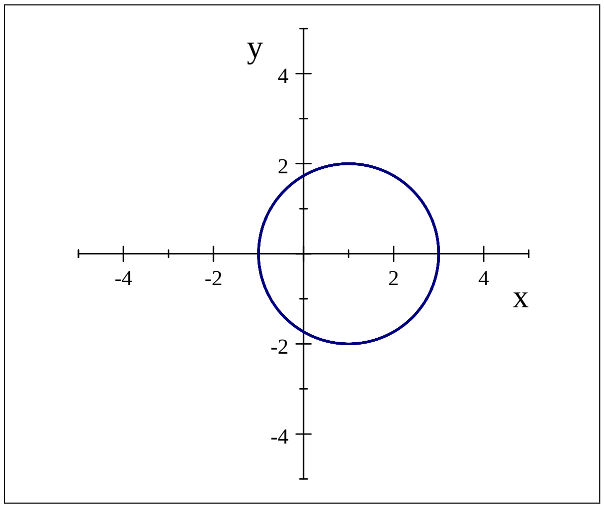
$$\begin{aligned} f\,(P_1) &= f\,(0,0)=0^2+0^2=0 \\ f\,(P_2) &= f\,(3,0)=3^2+0^2=9 \\ f\,(P_3) &= f\,(-1,0)=(-1)^2+0^2=1 \end{aligned}$$

*El punto* $P_1$ *es el mínimo global, mientras que* $P_2$ *es el máximo global.*

33. Halla los extremos absolutos de $f\,(x,y)=x^2+y^2$ en el recinto $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x+y^2-3\leq 0\right\}$.

**Solución:** El conjunto $K$ es un círculo centrado en $(1,0)$ y radio $\sqrt{2}$

$$x^2-2x+y^2-3\leq 0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\leq 2$$




Como $K$ es un compacto, dividimos el problema en dos subproblemas.

$$\text{Problema P}\left\{\begin{array}{c}\text{Optimizar } x^2+y^2\\ K=\delta K\cup \overset{\circ}{K}\\ K \text{ compacto}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{Subproblema P1}\left\{\begin{array}{c}\text{Optimizar } x^2+y^2\\ x^2-2x+y^2-3<0\end{array}\right\}\\ \\ \text{Subproblema P2}\left\{\begin{array}{c}\text{Optimizar } x^2+y^2\\ x^2-2x+y^2-3=0\end{array}\right\}\end{array}$$

El problema P1 es un problema sin restricciones, buscaremos los puntos críticos de la función y comprobaremos si está dentro del interior, verificando si cumple o no la restricción correspondiente. Los puntos críticos

$$\nabla f(x,y)=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad 2y=0\end{array}\right.$$

sistema que tiene como solución única el punto $P_1=(0,0)$, que está en el interior puesto que

$$0^2-2\cdot 0+0^2-3=-3<0$$

El problema P2 es un problema de Lagrange con una restricción de igualdad, así que construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-2x+y^2-3\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L=0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+\lambda(2x-2)=0 & & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad 2y+\lambda(2y)=0 & & (2)\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x+y^2-3=0 & & (3)\end{array}\right.$$

De la ecuación (2) se obtiene, sacando factor común $2y$

$$2y\,(1+\lambda)=0 \Rightarrow y\,(1+\lambda)=0$$

que proporciona dos opciones

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 1+\lambda &= 0 \Rightarrow \lambda=-1 \end{aligned}$$

Para $y=0$, sustituimos en la ecuación (3)

$$x^2-2x-3=0$$

que tiene por soluciones

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\frac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

y utilizamos la ecuación (1) para encontrar el valor de $\lambda$

$$2x+\lambda\,(2x-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2x}{2-2x}=\begin{cases} x_1=3 \Rightarrow \lambda_1=\frac{6}{2-6}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \\ x_2=-1 \Rightarrow \lambda_1=\frac{6}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2 \end{cases}$$

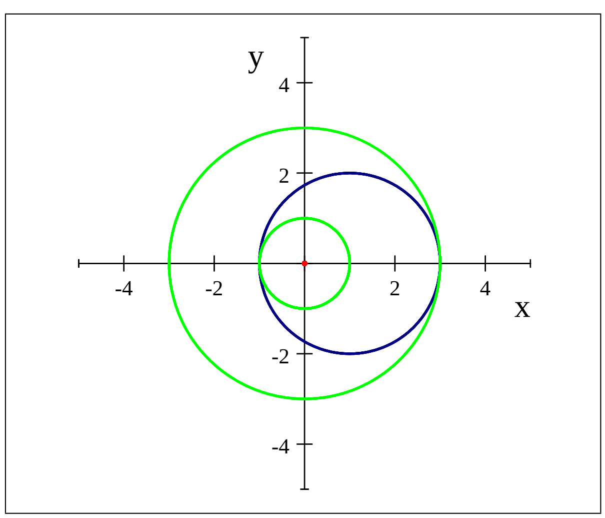
Para $\lambda=-1$, si usamos la ecuación (1) llegamos a una contradicción. Por tanto tendremos en este caso dos puntos

$$P_2=(3,0)\ \text{ y } \lambda=-\frac{3}{2}$$
$$P_3=(-1,0)\ \text{ y } \lambda=2$$

Evaluamos la función en todos los puntos (frontera e interior)

$$\begin{aligned} f\,(P_1) &= f\,(0,0)=0^2+0^2=0 \\ f\,(P_2) &= f\,(3,0)=3^2+0^2=9 \\ f\,(P_3) &= f\,(-1,0)=(-1)^2+0^2=1 \end{aligned}$$

El punto $P_1$ es el mínimo global, mientras que $P_2$ es el máximo global.



34. Consideremos una placa circular que ocupa la región bidimensional $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.Supongamos que la distribución de temperaturas de la placa está dada por la función $T(x, y) = \frac{1-(x^2+y^2)}{4}$.¿Cuál es el punto de la placa que está más caliente ? ¿Y el más frío?

**Solución:** El problema considerado es:

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4} \\ \text{sujeto a} & x^2+y^2 \leq 1 \end{array}$$

El conjunto $\Omega$ donde buscamos el máximo y el mínimo de la función es un círculo de radio 1, que es un conjunto compacto, como la función es continua el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de máximo y mínimo de la función dentro del conjunto.

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

El problema se divide en estudiar qué ocurre en el interior del conjunto $\overset{\circ}{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 < 1 \right\}$ y en su frontera $\delta\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

En el interior tenemos que encontrar las máximos y mínimos de la función $f(x, y) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4}$, para ello buscamos los puntos críticos de la función

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

En la frontera tenemos que resolver el problema de Lagrange

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4} \\ \text{sujeto a} & x^2+y^2 = 1 \end{array}$$

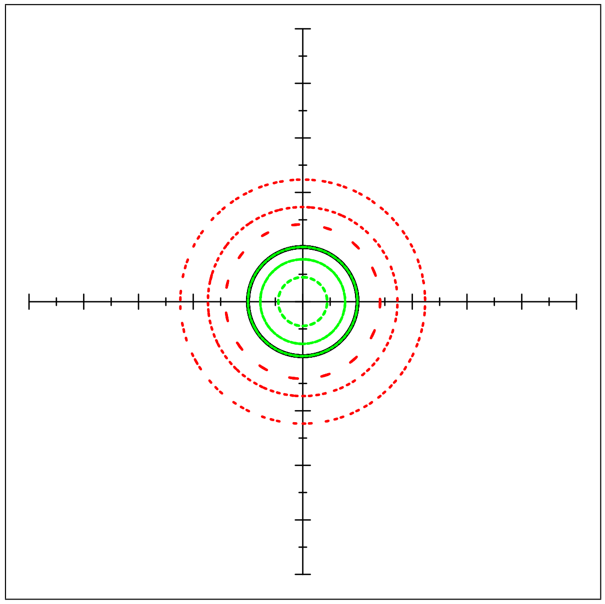
No obstante si $x^2 + y^2 = 1$, entonces $f(x, y) = 0$ es constante sobre la frontera. Evaluando la función en el punto $(0, 0)$ obtendremos

$$f(0, 0) = \frac{1}{4}$$

mientras que en la frontera

$$f(x, y) = 0$$

En el primer caso tendremos un máximo y en el segundo infinitos mínimos, que son todos los puntos de la frontera.



Para comprobar que $T(x,y)$ es solución de la ecuación del calor recordemos que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en este caso

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\nabla^2 T = -\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\forall (x,y) \quad \in \quad \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = 0$$