

1. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$$

2. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right)$$

3. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right)$$

4. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \cdots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Halla el área determinada por las rectas  $x = 0$ ,  $x = t$ , el eje  $OX$  y  $f(x)$ .
- Calcula el volumen obtenido al girar la región anterior alrededor de  $y = 0$ .
- ¿Cuáles son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos  $t \rightarrow \infty$ ?

6. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^6}$$

7. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2}^x \operatorname{sen}(t^2) dt}{x^2}$$

8. Calcula el área de la región plana comprendida entre el eje  $X$ , la gráfica de la función

$$f(x) = -\frac{x}{1+x^4}$$

y limitada lateralmente por las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$ .

9. Halla el área encerrada por las curvas  $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$  e  $y = e^{1-|x|}$ , sabiendo que se cortan en  $x = 1$  y  $x = -1$ .

10. Sea la función

$$f(x) = \tan x; \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

- Calcula las primitivas de  $f(x)$ .
- Halla la longitud de la curva  $y = F(x)$  para  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ , siendo  $F(x)$  una primitiva de  $f(x)$ .
- Estudia la convergencia de la integral impropia de segunda especie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

11. Sea  $R$  la región plana delimitada por las gráficas  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{5}$ ,  $x = 0$  y  $x = y^2$ . Determina el volumen del sólido generado al girar la región  $R$  alrededor del eje  $Y$ , mediante los dos siguientes métodos:

- Por secciones planas.
- Como un sólido de revolución

12. Sea  $R$  la región plana delimitada por la gráfica de la función  $f(x) = (\ln x)^2$ , el eje  $X$  y las rectas verticales  $x = 1$ ,  $x = e$ . Se pide:

- Calcula el área de  $R$ .
- Calcula el volumen del sólido obtenido al girar  $R$  alrededor del eje  $Y$ .

13. Calcula, en el primer cuadrante, el área comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

14. Calcula el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

queda dividida mediante la circunferencia de centro  $(0, -3)$  y radio 5.

15. Sea  $a > 0$ . Calcula las siguientes integrales impropias:

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-ar} r^n dr \quad (c) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(d) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \log x} \quad (e) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} \quad (f) \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx$$

16. **Derivación paramétrica de integrales.** Calcula las siguientes derivadas:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^3} \cos t \, dt & (b) \frac{d}{dx} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} \, dt & (c) \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx \\
 (d) \frac{d}{dx} \int_0^2 t^n \, dt & (e) \frac{d}{dx} \int_0^2 x^n \, dt & (f) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \int_0^x v(t) \, dt \right) \\
 (g) \frac{d}{dx} \int_0^x \left( \int_0^t v(s) \, ds \right) \, dt & (h) \frac{d}{dx} \left( \int_0^x v(t) \, dt + \int_x^1 v(t) \, dt \right) & (i) \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} v(t) \, dt
 \end{array}$$

17. **Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac.** Se define la función escalón (también llamada función de Heaviside) como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se llama masa de Dirac centrada en 0, denotada  $\delta_0(x)$ , a la derivada de  $H(x)$  respecto a  $x$ . Como es bien sabido, toda función derivable es necesariamente continua. Por tanto, como  $H(x)$  no es continua en  $x = 0$ , no puede ser derivable en dicho punto, al menos en el sentido de derivación introducido por Newton. Veamos qué sentido tiene pues la afirmación anterior.

a) Sea  $v : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, con derivada continua, y de modo que  $v(-1) = v(1) = 0$ . Utiliza la fórmula de integración por partes para comprobar que

$$\int_{-1}^1 H'(x)v(x) \, dx = v(0).$$

b) En el contexto de la Física Cuántica, Paul Dirac (Premio Nobel de Física en 1933 junto a Erwin Schrödinger) introdujo la distribución delta  $\delta_0(x)$  atribuyéndole las dos siguientes propiedades:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)v(x) \, dx = v(0),$$

donde  $v$  es como en el apartado anterior.

Estas dos propiedades no encajaban con las Matemáticas conocidas en 1933 pues la integral de Riemann no está definida para "funciones" que toman el valor  $+\infty$ . El sentido en que deben entenderse las propiedades anteriores es el siguiente: para cada  $\varepsilon > 0$  consideremos la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Utiliza el Teorema de la media del Cálculo Integral para comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)v(x) \, dx = v(0),$$

donde  $v$  es una función como en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, es decir,

$$\int_{-1}^1 H'(x)v(x) dx = v(0) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 \delta_0(x)v(x) dx = v(0) \quad \forall v,$$

podemos concluir que  $H'(x) = \delta_0(x)$ . Esta forma de entender las derivadas es lo que se conoce con el nombre de derivación en el sentido de las distribuciones.

18. **Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral.** Son muchas y muy variadas las aplicaciones del Cálculo Integral en Física e Ingeniería. Se presentan a continuación algunas de ellas.

- a) Las líneas de forma en espectroscopia de resonancia magnética se describen a menudo a través de la función de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2(\omega - \omega_0)^2},$$

donde  $T$  y  $\omega_0$  son constantes. Calcula  $\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega) d\omega$ .

- b) La probabilidad de que una molécula de masa  $m$  en un gas a temperatura  $T$  se mueva a velocidad  $v$  está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$

Calcula la velocidad media  $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$ .

- c) La fuerza que actúa entre dos cargas eléctricas  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $x$  en el vacío está dada por (ley de Coulomb)

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 x^2},$$

donde  $\epsilon_0$  es la permeabilidad del vacío. Calcula el trabajo ejercido por dicha fuerza para el caso de dos cargas iguales (por ejemplo dos electrones) que se repelen, es decir, calcula  $W = - \int_{-\infty}^x F(t) dt$ .

- d) Consideremos una barra de longitud  $L$  con densidad de masa  $\rho(x) = L - x$ ,  $0 \leq x \leq L$ . Calcula la posición del centro de masas, es decir,

$$X = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}$$

y también el momento de inercia respecto al punto  $x_0$ , el cual se define como

$$I = \int_0^L \rho(x) (x - x_0)^2 dx.$$