509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
10 de junio de 2021
Examen Parcial 2 - Duración: 150 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: PARCIAL 1 ☐ PARCIAL 2 ☒ GLOBAL ☐ PROBLEMAS ☐ MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado. Pon tu nombre en cada folio de respuesta. Indica en la cabecera del enunciado el número de mesa que usas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz, ni en color rojo**. **Escribe con claridad**.
- Está prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes al examen. **NO** se puede abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se puede salir del aula durante la realización del examen. **Cualquier violación de estas reglas o una acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión y una calificación final de 0 en la asignatura.**
- Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán puntuados con 0.

SEGUNDO PARCIAL (35 %)

1. Dada la ecuación:

$$z^2 + z - xy = 1$$

Responde de forma razonada a los siguientes apartados:

a) **(1.25 puntos)** Demuestra que la ecuación anterior define a $z = z(x, y)$ como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, 1, 1)$ y encuentra la ecuación del plano tangente a la función $z(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.

Solución: Por comodidad en la notación se ha usado la notación con subíndices, es decir

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Pasando todos los términos al miembro de la izquierda obtendremos la función que permitirá determinar la relación implícita de z con x e y:

$$\varphi(x, y, z) = z^2 + z - xy - 1$$

Comprobamos las dos hipótesis de existencia de la función implícita en el punto $(1, 1, 1)$. La primera es que la función φ debe anularse en ese punto

$$\Rightarrow \varphi(1, 1, 1) = 1^2 + 1 - 1 \cdot 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

y la segunda es que la derivada de la función respecto de las variables dependientes, en este caso sólo la z, no debe anularse en el punto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2z^2+1 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,1,1) = 2\cdot 1^2+1 = 3 \neq 0$$

Como se cumplen ambas hipótesis, podemos poner de manera formal que z es función de x e y, es decir, podemos poner que $z = z(x,y)$.

Para construir la ecuación del plano tangente a $z(x,y)$ en el punto $(1,1)$ necesitamos el polinomio de Taylor de orden 1en el punto $(1,1)$, su expresión viene dada por

$$p_1(x) = z(1,1) + z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)(y-1)$$

Para obtener las derivadas parciales z_x y z_y usaremos la ecuación dada por el ejercicio. Si se deriva parcialmente la ecuación respecto de x, obtendremos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z(x,y)^2 + z(x,y) - xy - 1\right) = 0 \Rightarrow 2z(x,y)\,z_x(x,y) + z_x(x,y) - y = 0$$

como la ecuación se cumple en el punto $(1,1,1)$, entonces podemos poner que $z(1,1) = 1$, y sustituyendo en la ecuación anterior

$$2z(1,1)\,z_x(1,1) + z_x(1,1) - 1 = 0 \Rightarrow 2z_x(1,1) + z_x(1,1) - 1 = 0 \Rightarrow 3z_x(1,1) = 1 \Rightarrow z_x(1,1) = \frac{1}{3}$$

Para obtener la derivada parcial z_y, usamos el mismo procedimiento pero derivando la ecuación respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z(x,y)^2 + z(x,y) - xy - 1\right) = 0 \Rightarrow 2z(x,y)\,z_y(x,y) + z_y(x,y) - x = 0$$

y sustituyendo de nuevo en $x = 1$, $y = 1$, $z(1,1) = 1$

$$2z(1,1)\,z_y(1,1) + z_y(1,1) - 1 = 0 \Rightarrow 2z_y(1,1) + z_y(1,1) - 1 = 0 \Rightarrow 3z_y(1,1) = 1 \Rightarrow z_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

Con estos dos valores obtenemos la ecuación del plano tangente buscada

$$\begin{aligned} p_1(x) &= z(1,1) + z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)(y-1) \\ p_1(x) &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) \end{aligned}$$

b) **(1.25 puntos)** Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

La expresión del polinomio de Taylor de orden 2 de una función $z(x,y)$ en el punto $(1,1)$ viene dada por

$$p_2(x) = z(1,1) + z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)\,y + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)$$

o usando el polinomio de primer orden que hemos calculado en el apartado anterior

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)$$

Necesitaremos las segundas derivadas parciales de la función $z(x,y)$, que podemos obtener derivando de nuevo respecto de x e y en las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior. Para obtener z_{xx}, derivamos respecto de x, la ecuación obtenida al derivar por x la ecuación inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2}\left(z(x,y)^2 + z(x,y) - xy - 1\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(z(x,y)^2 + z(x,y) - xy - 1\right)}_{\text{Calculada en el apartado anterior}}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2z(x,y)\,z_x(x,y) + z_x(x,y) - y\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(2z_x(x,y)\,z_x(x,y) + 2z(x,y)\,z_{xx}(x,y)\right) + z_{xx}(x,y) = 0 \\ &\Rightarrow 2\left(z_x(x,y)\right)^2 + 2z(x,y)\,z_{xx}(x,y) + z_{xx}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo para $x=1$ e $y=1$, donde sabemos que $z(1,1)=1$ y que, por el apartado anterior, también sabemos que $z_x(1,1)=z_y(1,1)=\frac{1}{3}$, así que

$$\begin{aligned} 2\left(z_x(1,1)\right)^2+2z(1,1)\,z_{xx}(1,1)+z_{xx}(1,1) &= 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)^2+2z_{xx}(1,1)+z_{xx}(1,1)=0 \\ &\Rightarrow \frac{2}{9}+3z_{xx}(1,1)=0 \\ &\Rightarrow z_{xx}(1,1)=-\frac{2}{27} \end{aligned}$$

Para z_{yy}, repetimos el proceso para la variable y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^2}\left(z(x,y)^2+z(x,y)-xy-1\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(z(x,y)^2+z(x,y)-xy-1\right)}_{\text{Calculada en el apartado anterior}}\right)=0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(2z(x,y)\,z_y(x,y)+z_y(x,y)-x\right)=0 \\ &\Rightarrow 2z_y(x,y)\,z_y(x,y)+2z(x,y)\,z_{yy}(x,y)+z_{yy}(x,y)=0 \\ &\Rightarrow 2\left(z_y(x,y)\right)^2+2z(x,y)\,z_{yy}(x,y)+z_{yy}(x,y)=0 \end{aligned}$$

Como antes usamos que $z(1,1)=1$, $z_x(1,1)=z_y(1,1)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 2\left(z_y(1,1)\right)^2+2z(1,1)\,z_{yy}(1,1)+z_{yy}(1,1) &= 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)^2+2z_{yy}(1,1)+z_{yy}(1,1)=0 \\ &\Rightarrow \frac{2}{9}+3z_{yy}(1,1)=0 \\ &\Rightarrow z_{yy}(1,1)=-\frac{2}{27} \end{aligned}$$

La derivada z_{xy} se obtiene de la misma forma, en este caso derivando primero respecto de x y después respecto de y, aunque por el teorema de Schwarz-Clairaut también podríamos intercambiar el orden de derivación en las variables, derivando primero respecto de y y después respecto de x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x\partial y}\left(z(x,y)^2+z(x,y)-xy-1\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(z(x,y)^2+z(x,y)-xy-1\right)}_{\text{Calculada en el apartado anterior}}\right)=0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(2z(x,y)\,z_x(x,y)+z_x(x,y)-y\right)=0 \\ &\Rightarrow 2z_y(x,y)\,z_x(x,y)+2z(x,y)\,z_{xy}(x,y)+z_{xy}(x,y)-1=0 \end{aligned}$$

Y sustituyendo para $x=1$ e $y=1$

$$\begin{aligned} 2z_y(1,1)\,z_x(1,1)+2z(1,1)\,z_{xy}(1,1)+z_{xy}(1,1)-1 &= 0 \\ 2\frac{1}{3}\frac{1}{3}+2z_{xy}(1,1)+z_{xy}(1,1)-1 &= 0 \\ \frac{2}{9}+3z_{xy}(1,1)-1 &= 0 \\ z_{xy}(1,1) &= \frac{7}{27} \end{aligned}$$

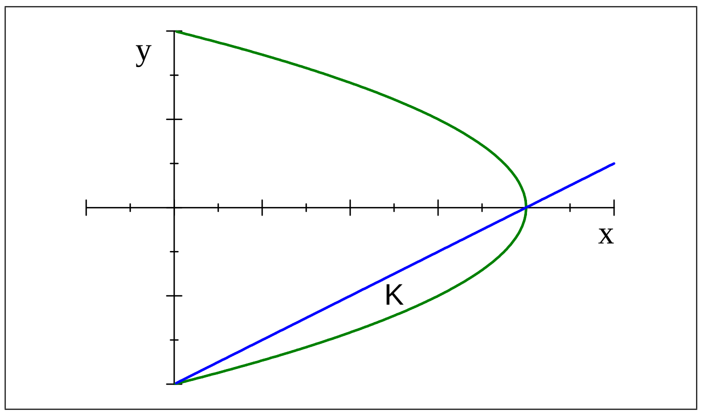
Ahora podemos construir el polinomio de segundo grado

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= p_1(x,y) + +\frac{1}{2}\left(z_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z_{yy}(1,1)(y-1)^2\right) \\ &= \frac{1+x+y}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{27}(x-1)^2 + 2\frac{7}{27}(x-1)(y-1) - \frac{2}{27}(y-1)^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) - \frac{1}{27}(x-1)^2 + \frac{7}{27}(x-1)(y-1) - \frac{1}{27}(y-1)^2 \end{aligned}$$

2. **(2 puntos)** Encuentra, justificando su existencia, los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 4 - y^2; \quad x \geq 2y + 4\right\}$$

y que está representado en la siguiente gráfica



Solución: El conjunto K es un conjunto compacto, puesto que usando la gráfica se puede deducir que está acotado y como incluye a la frontera (incluye las igualdades en la definición) también es cerrado, como además la función es continua, el teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia de máximo y mínimo sobre el conjunto K. Para encontrar estos valores dividimos el problema en dos subproblemas: interior y frontera.

$$\text{Problema } P \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ K = \delta K \cup \mathring{K} \\ K \text{ compacto} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{Subproblema en el interior } P1 \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ (x,y) \in \mathring{K} \end{array} \right\} \\ \\ \text{Subproblema en la frontera } P2 \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ (x,y) \in \delta K \end{array} \right\} \end{array}$$

El problema $P1$ es un problema sin restricciones muy fácil de resolver

$$\text{Optimizar } x^2 + y^2$$

sólo hay que utilizar las condiciones de primer orden para encontrar los puntos críticos, es decir, puntos que anulan el gradiente de la función

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \\ \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0$$

y para este problema encontramos un único punto $P1 = (0,0)$.

El problema $P2$ es un problema sobre la frontera del conjunto que está definida usando las igualdades; en este caso está formada por dos curvas: la parábola $x = 4 - y^2$ y la recta $x = 2y + 4$. Tenemos que resolver dos subproblemas

$$P2_1 \text{ Optimización sobre la parábola} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2+y^2 \\ & x = 4 - y^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2+y^2 \\ & x - 4 + y^2 = 0 \end{array} \right.$$

y

$$P2_2 \text{ Optimización sobre la recta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2+y^2 \\ & x=2y+4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2+y^2 \\ & x-2y-4=0 \end{array} \right.$$

Ambos problemas son de Lagrange y ambos problemas se resuelven de la misma forma: usando los multiplicadores de Lagrange. Se ha expresado cada problema en la forma estándar

Para el primer problema, el Lagrangiano toma la forma

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda\left(x-4+y^2\right)$$

y buscamos sus puntos críticos resolviendo el sistema correspondiente

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllr} \frac{\partial L}{\partial x}=0 & \Rightarrow & 2x+\lambda=0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 & \Rightarrow & 2y+2\lambda y=0 & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0 & \Rightarrow & x-4+y^2=0 & (3) \end{array} \right.$$

De la ecuación (2) obtenemos, sacando factor común

$$2y(1+\lambda)=0$$

que tiene por soluciones $y=0$ y $\lambda=-1$. Si $y=0$, entonces usando la ecuación (3)

$$x-4+y^2=0 \Rightarrow x=4-y^2=4-0^2=4$$

y con (1) obtenemos el valor de λ

$$\lambda=-2x=-2\cdot 4=-8$$

Para $\lambda=-1$, usamos la ecuación (1) para poner

$$x=-\frac{\lambda}{2}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$$

y usando (3)

$$y^2=4-x=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=\sqrt{\frac{7}{2}} \\ y=-\sqrt{\frac{7}{2}} \end{array} \right.$$

Obteniendo por tanto tres puntos en este apartado

$$\begin{aligned} P_2 &= (4,0) \\ P_3 &= \left(\frac{1}{2},\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \\ P_4 &= \left(\frac{1}{2},-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \end{aligned}$$

Para problema $P2_2$, repetimos el proceso constryendo el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x-2y-4)$$

y buscando sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllr} \frac{\partial L}{\partial x}=0 & \Rightarrow & 2x+\lambda=0 & (4) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 & \Rightarrow & 2y-2\lambda=0 & (5) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0 & \Rightarrow & x-2y-4=0 & (6) \end{array} \right.$$

De la ecuación (4) obtenemos

$$\lambda = -2x$$

y de la ecuación (5)

$$\lambda = y$$

por tanto

$$y = -2x$$

y podemos sustituir en (6)

$$x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x - 2(-2x) - 4 = 0 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

y por tanto

$$y = -2x = -\frac{8}{5}$$

y obtenemos en este apartado un punto más

$$P_5 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

Finalmente hay que tener en cuenta las intersecciones de las dos restricciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 4 + y^2 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 - y^2 \\ x = 2y + 4 \end{array} \right. \Rightarrow 4 - y^2 = 2y + 4 \Rightarrow y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y(y+2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} y = 0 \Rightarrow x = 4 \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

lo que nos da dos puntos adicionales, aunque uno de ellos ya lo hemos obtenido en los cálculos anteriores, así que no lo tendremos en cuenta

$$P_6 = (4,0) = P_2$$

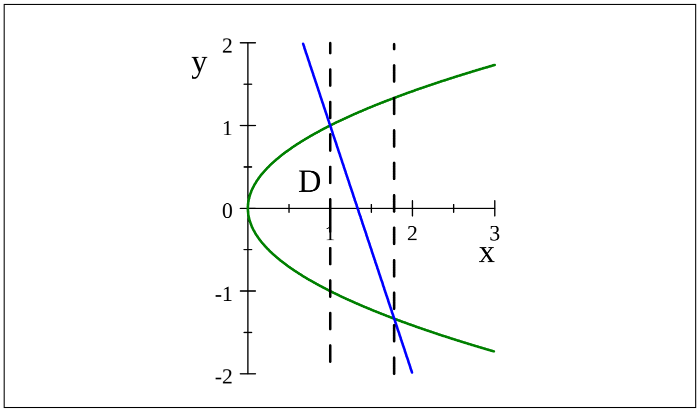
$$P_7 = (0,-2)$$

El análisis nos ha dado un conjunto de puntos para los que debemos comprobar si están o no dentro del conjunto K, es decir, tenemos que comprobar qué puntos cumplen las restriciones y en ese caso evaluaremos la función objetivo con el fin de determinar el máximo y el mínimo valor

Punto	$x \leq 4 - y^2$	$x \geq 2y + 4$		$x^2 + y^2$
$P_1 = (0,0)$	SI	NO	DESCARTADO	–
$P_2 = P_6 = (4,0)$	SI	SI	VÁLIDO	16
$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$	SI	NO	DESCARTADO	–
$P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$	SI	SI	VÁLIDO	$\frac{1}{4} + \frac{7}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$
$P_5 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$	SI	SI	VÁLIDO	$\frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25} = 3{,}2$
$P_7 = (0,-2)$	SI	SI	VÁLIDO	4

Podemos deducir que P_2 es el máximo del problema con un valor de 16, mientras que P_5 es el mínimo con un valor de 3,2.

3. Sea $f(x,y) = (x+y)$ y D la región del plano limitada por la recta $y = 4 - 3x$ y la parábola $x = y^2$, y representada en la siguiente gráfica



Responde de forma razonada a cada uno de los siguientes apartados, definiendo para ello el conjunto D de la forma adecuada en cada caso:

$a)$ **(1.25 puntos)** Calcula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int dx \int f(x,y)\,dy$$

integrando primero respecto de y.

Solución: Como se pide integrar la x en último lugar, hay que encontrar el rango de valores que toma esa variable dentro del conjunto. Viendo el gráfico, está claro que la x irá desde el origen hasta el valor de la abcisa correspondiente al punto de intersección entre la parábola y la recta; ese punto se obtiene resolviendo el sistema formado por estas dos curvas

$$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = y^2 \end{cases}$$

sustituyendo $x = y^2$ en la ecuación de la recta

$$y = 4 - 3x \Rightarrow y = 4 - 3y^2 \Rightarrow 3y^2 + y - 4 = 0$$

ecuación de segundo grado que tiene por solución

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} y = \frac{-1+7}{6} = 1 \\ y = \frac{-1-7}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

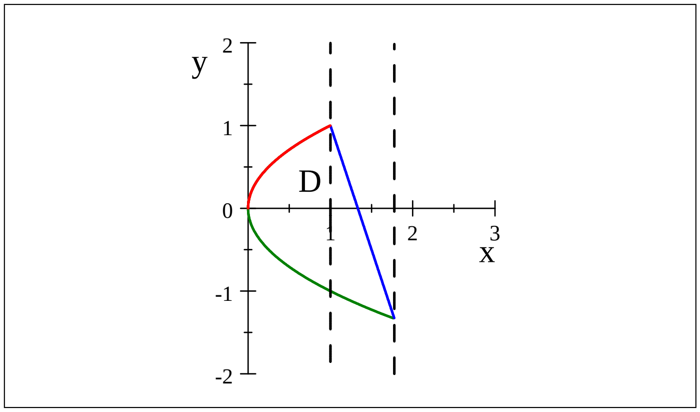
mientras que para el valor de la x

$$x = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow \; x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{9} \end{cases}$$

El rango de la variable x sería

$$0 \le x \le \frac{16}{9}$$

Ahora tenemos que ver qué curva es la que va por encima y cuál es la que va por debajo. Podemos comprobar en el gráfico que la curva que va por encima depende del valor de la x, mientras que la que va por debajo siempre es la parábola. La función que va por encima cambia de la parábola a la recta en el primer punto de corte de ambas, que hemos calculado antes y que no es otro que el punto $(1,1)$, por tanto: Si $0 \le x \le 1$, la curva (en rojo) que hay por encima es la rama positiva de la parábola $x = y^2$, es decir $y = \sqrt{x}$, mientras que si $1 \le x \le \frac{16}{9}$, entonces la curva (en azul) que va por encima es la recta de ecuación $y = 4 - 3x$.



Como se ha comentado, la curva que va por debajo siempre es la rama negativa de la parábola $x = y^2$, es decir, $y = -\sqrt{x}$, por tanto

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy) = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy + \int_1^{\frac{16}{9}} dx \int_{-\sqrt{x}}^{4-3x} (x+y)\,dy$$

y podemos integrar respecto de y

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) - \left(-x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) = 2x\sqrt{x}$$

$$\int_{-\sqrt{x}}^{4-3x} (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=4-3x} = \left(x(4-3x) + \frac{(4-3x)^2}{2}\right) - \left(-x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + x^{\frac{3}{2}} + 8$$

y después respecto de x

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy = \int_0^1 \left(2x\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5/2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{16}{9}} dx \int_{-\sqrt{x}}^{4-3x} (x+y)\,dy &= \int_1^{\frac{16}{9}} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + x^{\frac{3}{2}} + 8\right)dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{17}{4}x^2 + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} + 8x\right]_{x=1}^{x=\frac{16}{9}} \\
&= \left[\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^3}{2} - \frac{17}{4}\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{5}{2}} + 8\frac{16}{9}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{17}{4} + \frac{2}{5} + 8\right] \\
&= \left[\frac{4096}{1458} - \frac{4352}{324} + \frac{2048}{1215} + \frac{128}{9}\right] - \left[\frac{93}{20}\right] \\
&= \frac{19\,264}{3645} - \frac{93}{20} \\
&= \frac{9259}{14\,580}
\end{aligned}$$

siendo el resultado final

$$\frac{4}{5} + \frac{9259}{14\,580} = \frac{20\,923}{14\,580}$$

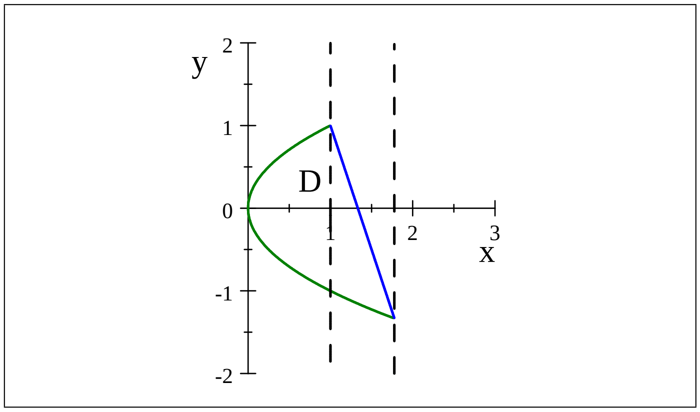
$b)$ **(1.25 puntos)** Comprueba que se cumple el teorema de Fubini, intercambiando el orden de integración usado en el apartado anterior y calculando en este caso

$$\iint_D f(x,y)\,dydx = \int dy \int f(x,y)\,dx$$

integrando ahora primero respecto de x.

En este apartado, como la última integral respecto de la que tenemos que integrar es la variable y, tendremos que buscar el rango numérico para esa variable. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en el apartado anterior (cortes entre curvas) la variable y cumple

$$-\frac{4}{3} \leq y \leq 1$$



Para la x tenemos que ver qué función está a la izquierda y qué función permanece a la derecha. En este caso no hay cambio de función, a la izquierda siempre se encuentra la parábola $x = y^2$ (en verde) y a la derecha siempre está la recta $y = 4 - 3x$ (en azul) o despejando, ya que tenemos que expresar a la x en función de la y, sería $x = \frac{4-y}{3}$, y la integral que debemos calcular es

$$\int_{-\frac{4}{3}}^{1} dy \int_{y^2}^{\frac{4-y}{3}} (x+y)\, dx$$

Si integramos respecto de x

$$\begin{aligned}
\int_{y^2}^{\frac{4-y}{3}} (x+y)\, dx &= \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=y^2}^{x=\frac{4-y}{3}} = \left(\frac{\left(\frac{4-y}{3}\right)^2}{2} + \left(\frac{4-y}{3}\right) y\right) - \left(\frac{\left(y^2\right)^2}{2} + y^2 y\right) \\
&= \left(\frac{16 + y^2 - 8y}{18} + \frac{4y - y^2}{3}\right) - \left(\frac{y^4}{2} + y^3\right) \\
&= -\frac{1}{2}y^4 - y^3 - \frac{5}{18}y^2 + \frac{8}{9}y + \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

y hora integramos respecto de y

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{4}{3}}^{1} dy \int_{y^2}^{\frac{4-y}{3}} (x+y)\, dx &= \int_{-\frac{4}{3}}^{1} \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 - \frac{5}{18}y^2 + \frac{8}{9}y + \frac{8}{9}\right) dy \\
&= \left[-\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} - \frac{5y^3}{54} + \frac{4y^2}{9} + \frac{8}{9}y\right]_{y=-\frac{4}{3}}^{y=1} \\
&= \frac{20\,923}{14\,580}
\end{aligned}$$

4. Responde de forma razonada a los siguientes apartados, indicando en cada caso el tipo de EDO de la que se trata:

   a) **(1.25 puntos)** Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{c} x^2y' - 3xy = 9x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \\ y\,(1) = 1 \end{array}\right\}$$

La ecuación del problema es una edo lineal de orden 1, puesto que es de la forma

$$a\,(x)\, y'\,(x) + b\,(x)\, y\,(x) = c\,(x)$$

Primero tenemos que resolver la ecuación homogénea

$$x^2y' - 3xy = 0$$

que es una ecuación en variables separadas

$$x^2y' = 3xy \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3x}{x^2} \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$$

e integrando cada miembro

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int \frac{3}{x}dx \Leftrightarrow \ln(y(x)) = 3\ln(x) + C \Longleftrightarrow \ln(y) = \ln\left(x^3\right) + C$$

de modo que usando la función exponencial obtenemos la solución de la ecuación homogénea

$$e^{\ln y} = e^{\ln x^3 + C} = e^C e^{\ln x^3} \Rightarrow y = e^C x^3 = Bx^3$$

donde por comodidad hemos puesto$B = e^C$. Para obtener la solución de la ecuación no homogénea, utilizaremos el método de variación de constantes poniendo como solución

$$y(x) = B(x)\, x^3$$

que debe cumplir la EDO no homogénea. Si calculamos su derivada

$$y'(x) = B'(x)\, x^3 + 3B(x)\, x^2$$

y sustituimos en la EDO, obtenemos la siguiente relación

$$x^2\underbrace{\left(B'(x)\, x^3 + 3B(x)\, x^2\right)}_{y'(x)} - 3x\underbrace{\left(B(x)\, x^3\right)}_{y(x)} = 9x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$$

y simplificando el resultado

$$x^5B'(x) = 9x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$$

de donde podemos deducir que

$$B'(x) = \frac{9}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{2}{x^6} + \frac{3}{x^7}$$

expresión que podemos integrar fácilmente para obtener $B(x)$

$$B(x) = \int \left(\frac{9}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{2}{x^6} + \frac{3}{x^7}\right) dx = -\frac{9}{2x^2} - \frac{2}{3x^3} - \frac{3}{4x^4} - \frac{2}{5x^5} - \frac{1}{2x^6} + k$$

La solución general buscada es:

$$y(x) = \underbrace{\left(-\frac{9}{2x^2} - \frac{2}{3x^3} - \frac{3}{4x^4} - \frac{2}{5x^5} - \frac{1}{2x^6} + k\right)}_{B(x)} x^3 = kx^3 - \frac{9}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{3}{4x} - \frac{2}{5x^2} - \frac{1}{2x^3}$$

Como debe cumplirse la condición inicial $y(1) = 1$, entonces usando la solución general

$$y(1) = k - \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow k - \frac{409}{60} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{469}{60}$$

b) **(1.25 puntos)** Resuelve la siguiente EDO

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 9e^{2x}$$

La ecuación es lineal de coeficientes constantes y orden 3. Resolvemos en primer lugar la EDO homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

para ello usamos su polinomio característico

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

que tiene por raíces (usando Ruffini), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, por tanto la solución de la EDO homogénea será

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$$

Para encontrar la solución particular, se mira el término independiente y se elige uno similiar como solución particular. El término independiente es $9e^{2x}$, así que deberíamos probar con una solución particular del mismo tipo, sin embargo esa solución ya se encuentra en la solución homogénea, por tanto debemos usar como solución particular la siguiente:

$$y_p(x) = Dxe^{2x}$$

Calculamos por tanto sus derivadas

$$y_p'(x) = De^{2x} + 2Dxe^{2x} = D(1+2x)e^{2x}$$

$$y_p''(x) = D(2)e^{2x} + D(1+2x)2e^{2x} = 4D(1+x)e^{2x}$$

$$y_p'''(x) = 4De^{2x} + 4D(1+x)2e^{2x} = 4D(3+2x)e^{2x}$$

y sustituyendo en la EDO no homogénea

$$\underbrace{\left(4D(3+2x)e^{2x}\right)}_{y_p'''} - 6\underbrace{\left(4D(1+x)e^{2x}\right)}_{y_p''} + 11\underbrace{\left(D(1+2x)e^{2x}\right)}_{y_p'} - 6\underbrace{\left(Dxe^{2x}\right)}_{y_p} = 9e^{2x}$$

eliminando e^{2x} y agrupando

$$4D(3+2x) - 6(4D(1+x)) + 11D(1+2x) - 6Dx = 9$$

$$12D + 8Dx - 24D - 24Dx + 11D + 22Dx - 6Dx = 9$$

$$y - D = 9$$

y por tanto $D = -9$ y la solución partiuclar es

$$y_p(x) = -9xe^{2x}$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} - 9xe^{2x}$$