509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
21 de abril de 2021
Examen Parcial 1 - Duración: 150 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: [X] PARCIAL 1 [ ] PARCIAL 2 [ ] GLOBAL [ ] PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

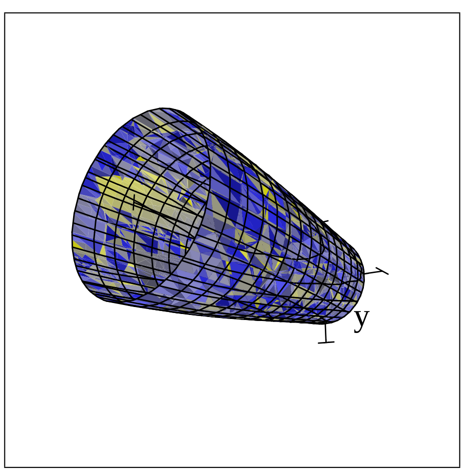
- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado. Pon tu nombre en cada folio de respuesta. Indica en la cabecera del enunciado el número de mesa que usas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz, ni en color rojo**. **Escribe con claridad**.
- Está prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes al examen. **NO** se puede abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se puede salir del aula durante la realización del examen. **Cualquier violación de estas reglas o una acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión y una calificación final de 0 en la asignatura.**
- Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán puntuados con 0.

A. Primer Parcial (35 %)

1. (2 puntos) Determina si son convergentes o no las siguientes integrales impropias calculando su valor:

$$\text{a)} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^2}\,dx \qquad \text{b)} \int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

2. (1 punto) Calcula el volumen del sólido engendrado al girar, en torno al eje OX, la superficie limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2-4x+8}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



3. (1 punto) Calcula $F'(x)$, siendo $F(x)$ la función definida como

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt$$

4. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) (0.5 puntos) Calcula los límites iterados de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.
   b) (0.5 puntos) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ cuando (x,y) se encuentre sobre rectas que pasan por el origen (límites direccionales).
   c) (0.5 puntos) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ al usar coordenadas polares.
   d) (0.5 puntos) En vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿podrías afirmar que la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(0,0)$? Razona la respuesta.
   e) (1 punto) Calcula, si existen, las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

5. Indica de forma razonada, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) (0.5 puntos) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y) = \left(x,y,y^2\right)$ y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x+z$, entonces la función $(g \circ f)$ es una función continua.
   b) (0.5 puntos) La función $f(x,y) = \frac{2+\operatorname{sen}(xy)}{3-\cos x^2} + x^2 \ln\left(y^2+4\right)$ alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto $[0,1] \times [0,1]$.

6. Sean las funciones

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x \ln\left(y^2 - z\right) \\ f_2(x,y,z) &= e^{z\cos(y+2x)} \\ f_3(x,y,z) &= \frac{z+y}{x^2} \end{aligned}$$

   Se pide:

   a) (0.5 puntos) Calcula el Jacobiano de la función $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida mediante la expresión

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$$

   b) (0.5 puntos) Calcula, usando la definición por límites, la derivada direccional de la función $f_3(x,y,z)$ en el punto $\vec{a} = (1,1,0)$, en la dirección $\vec{v} = (1,1,1)$.
   c) (0.5 puntos) Calcula el Hessiano de la función $f_1(x,y,z)$ en el punto $\vec{a} = (1,1,0)$.
   d) (0.5 puntos) Calcula la diferencial de la función $f_2(x,y,z)$ en el punto $\vec{a} = (1,1,0)$.