Capítulo 7

Introducción a las ecuaciones diferenciales. Ecuaciones de orden 1

7.1. Introducción

Definición 7.1 *Una* Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) *es una ecuación de la forma*

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

donde $y \equiv y(x)$ *representa una función e* $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ *sus respectivas derivadas respecto de la variable independiente* x*, es decir*

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se denomina orden *de la EDO al orden de la mayor derivada que aparece en ella.*

Ejemplo 7.1 *La ecuación*

$$y' = x + y^{100}$$

es de orden 1*, mientras que la ecuación*

$$y'' + \operatorname{sen}(y) = 0$$

será de orden 2*.*

También es posible plantear ecuaciones en las que la función depende de dos o más variables y en las que aparecen las derivadas parciales respectivas, en este caso la ecuación diferencial es en derivadas parciales (EDP), por ejemplo, la siguiente sería una EDP de orden 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3xyu$$

También es posible tener dos o más variables dependientes en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo

$$\begin{cases} x' = x + y \\ \\ y' = x - y \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias donde x e y son funciones de t. Por ejemplo, las ecuaciones que modelizan los circuitos eléctricos suelen ser sistemas de este tipo.

En este curso sólo usaremos y trateremos de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 7.2 *Se denomina* solución *de la EDO*

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

en el intervalo $I = (a, b)$ a una función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas hasta el orden n en I y que, al sustituirla junto con sus derivadas en la EDO, ésta se transforma en una igualdad.

Resolver una EDO es integrar dicha ecuación.

Ejemplo 7.2 *La función $y(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, es una solución de la EDO de segundo orden $y'' + y = 0$. Sólo tenemos que derivar dos veces la función*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos x - \operatorname{sen} x \\ y''(x) &= -\operatorname{sen} x - \cos x \end{aligned}$$

y sustituir en la ecuación

$$\underbrace{(-\operatorname{sen} x - \cos x)}_{y''} + \underbrace{(\operatorname{sen} x + \cos x)}_{y} = 0$$

Ejemplo 7.3 *La función en forma implícita*

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

es solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = -\frac{x}{y} \text{ en } [-5, 5]$$

Sólo tenemos que derivar de forma implícita la ecuación respecto de x

$$2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow x + yy' = 0 \Leftrightarrow yy' = -x \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

7.2. EDO de primer orden

Consideremos una EDO de primer orden

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

donde x es la variable independiente e $y = y(x)$ es función de x.

Observación 7.1 *Esta notación suele emplearse para problemas espaciales, mientras que si el problema es de tipo temporal se utilizará la t como variable independiente y x como variable dependiente, en ese caso la ecuación sería de la forma $F(t, x, x') = 0$.*

Teorema 7.1 (Existencia y unicidad) *Sea la EDO de primer orden*

$$y' = f(x, y)$$

con $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y U un abierto. Si $f, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathcal{C}(U) \Longrightarrow \forall (x_0, y_0) \in U \Rightarrow \exists^{\circ} y : I \longrightarrow R$, solución de la EDO con $y_0 = y(x_0)$ y siendo I un intervalo con $x_0 \in I$.

El problema de resolver una EDO que satisfaga una condición (llamada *condición inicial*) se denomina *Problema de Valor Inicial (P.V.I.)* o problema de Cauchy.

Ejemplo 7.4 *Sea la ecuación*

$$y' = x + y$$

En este caso $f(x,y) = x + y$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$*, que son funciones continuas en* $\mathbb{R}^2$*. El teorema garantiza la existencia de una única solución* $y(x)$ *que cumple además* $y(x_0) = y_0$ *para cualquier par* (x_0, y_0)*.*

Ejemplo 7.5 *Sea el PVI*

$$\left.\begin{array}{r} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Notar que en este caso hay infinitas soluciones, por ejemplo: $y(x) = 0$*,* $y(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & x \leq 0 \\ x^3 & x > 0 \end{array}\right.$*,* $y(x) = \left\{\begin{array}{cc} x^3 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{array}\right.$*. ¿Quiero esto decir que se contradice el teorema? Obviamente, la respuesta es no, lo único que pasa es que no se cumplen las hipótesis del mismo, porque aunque* $f(x,y) = 3y^{2/3}$ *es una función continua en* $[0, \infty[$*, su derivada es* $y'(x) = 2y^{-1/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ *que no es continua (ni siquiera existe) en* $x_0 = 0$*.*

Definición 7.3 *Se llama* solución general *de la EDO* $y' = f(x,y)$ *a una función* $y(x) = g(x,C)$ *que depende de* x *y de una constante* C*, tal que*

1. $y = g(x,C)$ *es solución de la EDO, es decir,* $g'(x,C) = f(x, g(x,C))$ *para cualquier valor de* C*.*

2. *Para cualquier condición inicial* $y(x_0) = y_0$*, siempre se puede asignar un valor* C_0 *a la constante* C*, tal que* $y = g(x,C)$ *satisfaga la condición inicial, es decir,* $g(x_0, C_0) = y_0$*.*

Definición 7.4 *Una* solución particular *de una EDO es una solución que se obtiene de la solución general y cierto valor concreto para la constante* C*.*

Ejemplo 7.6 *Verifica que*

$$y(x) = x^2 + C$$

es solución de la EDO $y' = 2x$ *y encuentra una solución particular que cumpla* $y(1) = 4$*.*

Para ello calculamos la derivada de $y(x) \Rightarrow y'(x) = 2x$*, luego se cumple.*

Como debe ocurrir $y(1) = 4$*, sustituyendo en la solución general*

$$y(1) = 1^2 + C = 1 + C = 4 \Leftrightarrow C = 3$$

Luego

$$y_p(x) = x^2 + 3$$

es una solución particular de la EDO.

Ejemplo 7.7 *Demuestra que la ecuación implícita* $x^2 + y^2 = C^2$*, es solución de la EDO* $y' = -\frac{x}{y}$ *y encuentra la solución particular tal que* $y(3) = 4$*.*

Para comprobar que es una solución, lo único que tenemos que hacer es derivar de forma implícita en la ecuación

$$2x + 2yy' = 0 \Longleftrightarrow x + yy' = 0 \Longleftrightarrow yy' = -x \Longleftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Y para encontrar la solución particular tenemos en cuenta que si $x_0 = 3$*, entonces* $y(x_0) = 4$*, luego*

$$x_0^2 + y(x_0)^2 = C^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = C^2 \Rightarrow C = 5$$

7.3. Ecuaciones de variables separadas

Definición 7.5 *Diremos que la EDO $y' = f(x, y)$ es de* variables separadas *si es de la forma*

$$y' = p(x)\,q(y)$$

o bien de la forma

$$M(x) + N(y)\,y' = 0$$

El método de resolución de una EDO en variables separadas es muy sencillo. A partir de la EDO, podemos dividir por $q(y)$, suponiendo que es distinto de 0, ya que en caso contrario la solución es trivial (¿por qué?), para poner

$$\frac{1}{q(y)}y' = p(x)$$

Si encontramos $Q(x)$, una primitiva de $q(x)$ y $P(x)$ una primitiva de $p(x)$, entonces podemos poner

$$\frac{y'(x)}{Q'(y(x))} = P'(x)$$

y usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left[\ln Q(y(x))\right] = \frac{d}{dx}\left[P(x)\right]$$

de donde se deduce que

$$\ln Q(y(x)) = P(x) + C$$

y por tanto

$$Q(y(x)) = e^{P(x)+C} = e^{C}e^{P(x)} = Ae^{P(x)}$$

que define a $y(x)$ de forma implícita.

Observación 7.2 *Aunque formalmente no sea correcto, a efectos prácticos se escribe lo siguiente*

$$y' = p(x)\,q(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = p(x)\,q(y) \Leftrightarrow \frac{1}{q(y)}dy = p(x)\,dx$$

e integrando

$$\int \frac{1}{q(y)}dy = \int p(x)\,dx$$

Este mecanismo no es formalmente correcto, puesto que estamos integrando respecto de variables distintas en cada lado de la ecuación.

Ejemplo 7.8 *Resuelve la siguiente EDO en variables separadas*

$$y'(x) = \frac{1-y}{1+x}$$

Para encontrar la solución es necesario que cada variable esté en un lado de la ecuación. Siguiendo el procedimiento práctico que se ha descrito en la observación anterior, ponemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1-y}dy = \frac{1}{1+x}dx$$

e integrando en cada lado respecto de la variable correspondiente

$$\int \frac{1}{1-y} dy = \int \frac{1}{1+x} dx$$

ambas son inmediatas

$$-\ln(1-y) = \ln(1+x) + K$$

donde K es una constante. La ecuación se puede expresar como

$$\ln \frac{1}{1-y} = \ln(1+x) + K$$

Usando la función exponencial

$$e^{\ln \frac{1}{1-y}} = e^{\ln(1+x)+K} \Longleftrightarrow e^{\ln \frac{1}{1-y}} = e^{\ln(1+x)} e^{K} \Longleftrightarrow \frac{1}{1-y} = (1+x)\, e^{K}$$

y poniendo $C = e^K$, entonces la solución sería

$$\frac{1}{1-y} = (1+x)\, C$$

Podemos expresar y de forma explícita, despejando en la ecuación como

$$y(x) = 1 - \frac{1}{C} \frac{1}{1+x}$$

Ejemplo 7.9 *Resuelve la siguiente EDO*

$$(x-4)\, y^4 - x^3 \left(y^2 - 3\right) y' = 0$$

Podemos comprobar que se trata de una EDO en variables separadas reescribiéndola de otra forma, para ello hacemos el cambio $y' = \frac{dy}{dx}$, para poner

$$(x-4)\, y^4 - x^3 \left(y^2-3\right) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow (x-4)\, y^4 dx - x^3 \left(y^2-3\right) dy = 0 \Longleftrightarrow (x-4)\, y^4 dx = x^3 \left(y^2-3\right) dy$$

de donde se deduce

$$(x-4)\, y^4 dx = x^3 \left(y^2-3\right) dy \Longleftrightarrow \frac{(x-4)}{x^3} dx = \frac{\left(y^2-3\right)}{y^4} dy$$

Integramos en cada lado de la igualdad

$$\int \frac{(x-4)}{x^3} dx = \int \frac{\left(y^2-3\right)}{y^4} dy \Longleftrightarrow \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right) dy \Leftrightarrow -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + C = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3},$$

Si se multiplica la ecuación por $x^2 y^3$ y se agrupa, obtenemos la ecuación implícita

$$y^3 \left(Cx^{2-x+2}\right) + y^2 x^2 - x^2 = 0$$

Ejemplo 7.10 *Resuelve el siguiente problema de valor inicial*

$$\left.\begin{array}{r} xy\ dx + e^{-x^2}\left(y^2-1\right)dy = 0 \\ \\ y\left(0\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Comprobaremos que la ecuación diferencial del problema es de variables separadas, para ello reorganizamos los términos

$$e^{-x^2}\left(y^2-1\right)dy = -xy\ dx \Longleftrightarrow \frac{\left(y^2-1\right)}{y}dy = -xe^{x^2}dx \Longleftrightarrow \left(y-\frac{1}{y}\right)dy = -xe^{x^2}dx$$

y ya podemos integrar en cada lado de la igualdad

$$\int\left(y-\frac{1}{y}\right)dy = -\int xe^{x^2}dx \Longleftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - \ln y = -\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Usando la condición inicial $y\left(0\right)=1$*, obtenemos el valor de* C

$$\frac{1}{2}y\left(0\right)^2 - \ln\left(y\left(0\right)\right) = -\frac{1}{2}e^{0^2}+C \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}+C \Rightarrow C = 1$$

Con este valor obtenemos la solución del problema

$$\frac{1}{2}y^2 - \ln y = -\frac{1}{2}e^{x^2}+1$$

Ejemplo 7.11 *Supongamos que está nevando con regularidad (nieve constante). A las 12h sale una máquina quitanieves que en la primera hora recorre 2km, mientras que en la segunda hora recorre 1Km (¡hay más nieve y el avance es más lento!). Si consideramos que la velocidad de la máquina es inversamente proporcional a la altura de la nieve ¿a qué hora comenzó a nevar?*

Este problema se puede resolver como un problema de valor inicial. Supongamos que comenzó a nevar en el instante t_0*. Como nieva con intensidad constante la cantidad de nieve que hay en el instante* t *es proporcional al tiempo transcurrido desde que empezó a nevar, es decir, la altura de la nieve* h *sería*

$$h = k_1\left(t-t_0\right)\ \text{con } t \geq t_0$$

y k_1 *es la constante de proporcionalidad. Por otra parte la velocidad de la máquina es inversamente proporcional a la altura, por tanto podemos poner*

$$v = \frac{k_2}{h} = \frac{k_2}{k_1\left(t-t_0\right)}\ \text{con } t > t_0$$

siendo k_2 *otra constante de proporcionalidad. Finalmente la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo,* $v=\frac{ds}{dt}$*, y por tanto podemos poner*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k_2}{k_1\left(t-t_0\right)}$$

écuación diferencial ordinaria de variables separadas, que podemos resolver fácilmente

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k_2}{k_1\left(t-t_0\right)} \Rightarrow ds = \frac{k_2}{k_1\left(t-t_0\right)}dt = \frac{k}{\left(t-t_0\right)}dt$$

donde hemos puesto $\frac{k_2}{k_1} = k$*.Integrando*

$$\int ds = \int \frac{k}{(t - t_0)} dt \Leftrightarrow s(t) = k \ln (t - t_0) + C.$$

Para encontrar los valores de k*,* C *y* t_0*, tendremos en cuenta que, por una parte, la máquina quitanieves ha comenzado a las* $12h$*, por tanto la distancia recorrida es en ese momento* 0

$$s(12) = k \ln (12 - t_0) + C = 0$$

Cuando ha transcurrido 1 *hora a partir de las* 12 *horas, la máquina ha recorrido* $2km$*, es decir*

$$s(12 + 1) = s(13) = k \ln (13 - t_0) + C = 2$$

mientras que después de $2h$*, la máquina habrá recorrido* $(2 + 1)\, km$*, luego*

$$s(14) = k \ln (13 - t_0) + C = 3$$

Tendremos por tanto

$$\begin{aligned} k \ln (12 - t_0) + C &= 0 \\ k \ln (13 - t_0) + C &= 2 \\ k \ln (14 - t_0) + C &= 3 \end{aligned}$$

Usando la primera ecuación

$$C = -k \ln (12 - t_0)$$

que sustituimos en las otras dos

$$\begin{aligned} k \ln (13 - t_0) - k \ln (12 - t_0) &= 2 \Rightarrow k \ln \frac{13 - t_0}{12 - t_0} = 2 \\ k \ln (14 - t_0) - k \ln (12 - t_0) &= 3 \Rightarrow k \ln \frac{14 - t_0}{12 - t_0} = 3 \end{aligned}$$

Dividimos las dos ecuaciones

$$\frac{k \ln \frac{13-t_0}{12-t_0}}{k \ln \frac{14-t_0}{12-t_0}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\ln \frac{13-t_0}{12-t_0}}{\ln \frac{14-t_0}{12-t_0}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \ln \frac{13 - t_0}{12 - t_0} = 2 \ln \frac{14 - t_0}{12 - t_0} \Rightarrow \ln \left(\frac{13 - t_0}{12 - t_0} \right)^3 = \ln \left(\frac{14 - t_0}{12 - t_0} \right)^2$$

y por tanto

$$\left(\frac{13 - t_0}{12 - t_0} \right)^3 = \left(\frac{14 - t_0}{12 - t_0} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{(13 - t_0)^3}{(12 - t_0)^3} = \frac{(14 - t_0)^2}{(12 - t_0)^2} \Leftrightarrow (13 - t_0)^3 = (14 - t_0)^2 (12 - t_0)$$

y desarrollando

$$2197 - 507 t_0 + 39 t_0^2 - t_0^3 = -t_0^3 + 40 t_0^2 - 532 t_0 + 2352 \Leftrightarrow t_0^2 - 25 t_0 + 155 = 0$$

Ecuación de segundo grado con soluciones

$$t_0 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 620}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{25+\sqrt{5}}{2} = 13{,}61803398874989 \\ \\ t_0 = \frac{25-\sqrt{5}}{2} = 11{,}38196601125011 \end{cases}$$

La primera solución no sirve puesto que debe ocurrir que $t_0 < 12$, ya que empieza a nevar antes de que salga la máquina quitanieves, así que la solución es

$$t_0 = 11{,}38196601125011$$

que en forma sexagesimal de horas minutos y segundos sería

$$t_0 = 11h\ 22'\ 55{,}078''$$

Ejemplo 7.12 *Resuelve la siguiente EDO*

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Comprobamos que es una ecuación en variables separables, expresando y' como $\frac{dy}{dx}$ y transformamos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx$$

Integramos en cada miembro

$$\int ydy = \int xdx \Longleftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

y multiplicando por 2

$$y^2 - x^2 = 2C$$

Ejemplo 7.13 *Resuelve el PVI*

$$\left.\begin{array}{r} x'(t) = -kx(t) \\ \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

La EDO es de variables separadas, si ponemos $x' = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -kx \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = -kdt$$

e integrando

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt \Leftrightarrow \ln x = -kt + C \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-kt+C} \Leftrightarrow x(t) = e^C e^{-kt} = Ae^{-kt}$$

donde $A = e^C$. Usando la condición inicial

$$x(0) = x_0 \Leftrightarrow x(0) = Ae^{-k\cdot 0} = A \Leftrightarrow x_0 = A$$

La solución sería

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

Ejemplo 7.14 *Resuelve el siguiente PVI*

$$\left.\begin{array}{r} x'(t) = -2kx^2(t) \\ \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

La EDO es de variables separadas, si ponemos $x' = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -2kx^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}dx = -2kdt$$

e integrando

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -2\int kdt \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = -2kt + C$$

es decir

$$x(t) = \frac{1}{2kt - C}$$

Usando la condición inicial

$$x(0) = \frac{1}{-C} = x_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{x_0}$$

por tanto la solución particular será

$$x(t) = \frac{1}{2kt + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{2ktx_0 + 1}.$$

Ejemplo 7.15 *Resuelve el siguiente PVI*

$$\left.\begin{array}{c} x' = k(a-x)(b-x) \\ \\ x(0) = 0 \end{array}\right\}$$

donde $x = x(t)$.

La EDO es de variables separadas, si ponemos $x' = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \Leftrightarrow \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx = kdt$$

e integrando

$$\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx = \int kdt$$

El primer término se resuelve mediante descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx = \int \left(\frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}\right)dx = A\ln(a-x) + B\ln(b-x)$$

siendo A y B

$$\frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{A(b-x) + B(a-x)}{(a-x)(b-x)} = \frac{-x(A+B) + (Ab+Ba)}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(a-x)(b-x)}$$

con

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

y

$$Ab + Ba = 1 \Rightarrow Ab - Aa = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{b-a} \Rightarrow B = \frac{1}{a-b}$$

de modo que

$$\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx = \frac{1}{b-a}\ln(a-x) - \frac{1}{b-a}\ln(b-x) = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x}$$

Volviendo a la solución de la EDO

$$\int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx = \int kdt \Longleftrightarrow \frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x} = kt + C \Longleftrightarrow \ln\frac{x-a}{x-b} = (b-a)(kt+C)$$

y usando la exponencial

$$\frac{x-a}{x-b} = e^{(b-a)(kt+C)}.$$

7.4. Ecuaciones homogéneas

Definición 7.6 *Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice* homogénea de orden o grado $\alpha \in \mathbb{R}$ *en $D \Longleftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)\ \forall (x,y) \in D$.*

Definición 7.7 *Una EDO de primer orden de la forma*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

se dice homogénea, *si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado.*

Para resolver una EDO homogénea haremos un cambio de variable en la variable dependiente, de la forma

$$y(x) = x \cdot v(x)$$

que transformará la EDO en una de variables separadas.

Si derivamos en la expresión anterior tendremos

$$y'(x) = v(x) + xv'(x)$$

o en forma de diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

y podemos sustuir en la EDO

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Longleftrightarrow M(x,xv)\,dx + N(x,xv)(vdx + xdv) = 0$$

Reagrupando términos

$$(M(x,xv) + vN(x,xv))\,dx + xN(x,xv)\,dv = 0$$

teniendo en cuenta que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado

$$\begin{aligned} M(x,xv) &= M(x\cdot 1, x\cdot v) = x^\alpha M(1,v) \\ N(x,xv) &= N(x\cdot 1, x\cdot v) = x^\alpha N(1,v) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$(x^\alpha M(1,v) + vx^\alpha N(1,v))\,dx + x\cdot x^\alpha N(1,v)\,dv = 0$$

donde podemos simplificar x^α en toda la ecuación

$$(M(1,v) + vN(1,v))\,dx + xN(1,v)\,dv = 0$$

quedando una ecuación en variables separadas de la forma

$$\frac{N(1,v)}{(M(1,v) + vN(1,v))}dv = -\frac{1}{x}dx.$$

Ejemplo 7.16 *Resuelve*
$$\left(x^2-y^2\right)dx+3xydy=0.$$

La ecuación es homogénea, puesto que las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son dos funciones homogéneas del mismo grado, grado 2, como podemos comprobar a continuación

$$M(x,y)=x^2-y^2\Rightarrow M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-(\lambda y)^2=\lambda^2x^2-\lambda^2y^2=\lambda^2\left(x^2-y^2\right)=\lambda^2M(x,y)$$
$$N(x,y)=3xy\Rightarrow N(\lambda x,\lambda y)=3(\lambda x)(\lambda y)=3\lambda^2xy=\lambda^2(3xy)=\lambda^2N(x,y)$$

Hacemos el cambio indicado
$$y=xv\Rightarrow dy=vdx+xdv$$

y la ecuación quedará

$$\begin{aligned}\left(x^2-y^2\right)dx+3xydy &= 0\Leftrightarrow\\ \left(x^2-(xv)^2\right)dx+3x(xv)(vdx+xdv) &= 0\Leftrightarrow\\ \left(x^2-x^2v^2\right)dx+3x^2v^2dx+3x^3vdv &= 0\end{aligned}$$

y reagrupando
$$\left(x^2+2x^2v^2\right)dx+3x^3vdv=0\Leftrightarrow x^2\left(1+2v^2\right)dx+3x^3vdv=0$$

podemos dividir por x^2 para obtener la ecuación
$$\left(1+2v^2\right)dx+3xvdv=0$$

que es de variables separadas
$$\frac{v}{1+2v^2}dv=-\frac{1}{3x}dx$$

y que integramos usando el procedimiento habitual
$$\int\frac{v}{1+2v^2}dv=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\frac{1}{4}\int\frac{4v}{1+2v^2}dv=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left(1+2v^2\right)=-\frac{1}{3}\ln x+C$$

Podemos usar la función exponencial

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\ln\left(1+2v^2\right) &= -\frac{1}{3}\ln x+C\Rightarrow\\ \ln\left(1+2v^2\right) &= -\frac{4}{3}\ln x+C\Rightarrow\\ \ln\left(1+2v^2\right) &= \ln x^{-4/3}+C\Rightarrow\\ \left(1+2v^2\right) &= Kx^{-4/3}\end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio $K=e^C$. Finalmente, procedemos a deshacer el cambio
$$v(x)=\frac{y(x)}{x}$$

para obtener la relación entre y y x de forma implícita:
$$1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2=Kx^{-4/3}\Leftrightarrow x^2+2y^2=Kx^{2/3}\Leftrightarrow x^2+2y^2-Kx^{2/3}=0.$$

Ejemplo 7.17 *Resuelve la EDO*

$$\left(x \operatorname{sen}\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Es una ecuación homogénea, puesto que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x\operatorname{sen}\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} \Rightarrow \\ M(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)\operatorname{sen}\frac{\lambda y}{\lambda x} - (\lambda y)\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda\left(x\operatorname{sen}\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right) = \lambda M(x,y) \end{aligned}$$

$$N(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow N(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda x\cos\frac{y}{x} = \lambda N(x,y)$$

son dos funciones homogéneas del mismo grado (1). Hacemos el cambio

$$y = xv \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

que transforma la EDO en

$$\begin{aligned} \left(x\operatorname{sen}\frac{xv}{x} - (xv)\cos\frac{xv}{x}\right)dx + x\cos\left(\frac{xv}{x}\right)(vdx + xdv) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x\operatorname{sen}v - (xv)\cos v)\,dx + x\cos(v)(vdx + xdv) &= 0 \end{aligned}$$

y reagrupando

$$(x\operatorname{sen}v - xv\cos v + xv\cos v)\,dx + x^2\cos v dv = 0 \Leftrightarrow x\operatorname{sen}v dx + x^2\cos v dv = 0$$

dividiendo por x

$$\operatorname{sen}v dx + x\cos v dv = 0 \Leftrightarrow x\cos v dv = -x\operatorname{sen}v dx \Leftrightarrow \frac{\cos v}{\operatorname{sen}v}dv = -\frac{1}{x}dx$$

que podemos integrar

$$\int\frac{\cos v}{\operatorname{sen}v}dv = -\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln\operatorname{sen}v = -\ln x + C \Leftrightarrow e^{\ln\operatorname{sen}v} = e^{-\ln x + c} = e^{-\ln x}e^{c}$$

si hacemos el cambio $e^C = K$*, podemos poner*

$$\operatorname{sen}v = -Kx$$

y deshaciendo el cambio

$$\operatorname{sen}\frac{y}{x} = -Kx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \arcsin(-Kx) \Leftrightarrow y = x\arcsin(-Kx) = -x\arcsin(Kx)$$

7.5. Ecuaciones diferenciales exactas: Factores integrantes

Otro tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1 que podemos resolver fácilmente son las ecuaciones diferenciales exactas.

Definición 7.8 *Diremos que una EDO*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es exacta, *si existe una función* $f(x,y)$ *con derivadas parciales continuas, tal que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= M(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= N(x,y)\end{aligned}$$

En este caso podemos poner

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow df(x,y) = 0$$

que tiene como solución

$$f(x,y) = C$$

con C *una constante.*

Para resolver una ecuación diferencial exacta, usamos que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

de forma que si integramos respecto de x

$$\int M(x,y)\,dx = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx$$

La constante de integración será en este caso una función de y, que llamamos $g(y)$, puesto que la derivada respecto de x de la expresión $\int M(x,y)\,dx + g(y)$ es $M(x,y)$ ya que la derivada de $g(y)$ es 0 al no depender de x. Tenemos por tanto

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

La expresión de $g(y)$ se obtiene utilizando que

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

así que si derivamos respecto de y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + g(y)\right) \Leftrightarrow\\ N(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \frac{\partial}{\partial y}g(y)\\ N(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + g'(y)\end{aligned}$$

y despejando $g'(y)$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)$$

e integrando respecto de y

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right)dy$$

Veremos a continuación un resultado que nos indica que la EDO es exacta.

Teorema 7.2 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con derivadas parciales continuas en D. Entonces*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ es exacta } \Longleftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

Si la EDO es exacta entonces

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

derivando la primera respecto de y y la segunda respecto de x, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

y por el teorema de Schwartz-Clairaut

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(N(x,y))$$

Ejemplo 7.18 *Resuelve la EDO*

$$\left(xy^2 + x\right)dx + yx^2 dy = 0$$

Primero comprobaremos que se trata de una EDO exacta utilizando el teorema anterior

$$M(x,y) = xy^2 + x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$N(x,y) = yx^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

se cumple $\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(N(x,y))$ y la EDO es exacta, es decir, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 + x$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \left(xy^2 + x\right)dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + g(y)$$

recordemos que la constante de integración no depende de x, pero puede depender de y, por tanto

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ utilizamos que $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow yx^2 = x^2y + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

y la función $f(x,y)$ será

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 = C_2 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 = K$$

donde hemos multiplicado por 2 y se ha hecho el cambio $2(C_2 - C_1) = K$, para reagrupar las dos constantes en una sola.

Ejemplo 7.19 *Resuelve la EDO*

$$\cos y \; dx + \left(y^2 - x \operatorname{sen} y\right) dy = 0$$

Primero comprobaremos que se trata de una EDO exacta utilizando el teorema

$$M(x,y) = \cos y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sen} y$$

$$N(x,y) = \left(y^2 - x \operatorname{sen} y\right) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen} y$$

y la EDO es exacta, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx = \int (\cos y)\, dx = x \cos y + g(y)$$

como antes, recordemos que la constante de integración no depende de x, pero puede depender de y, por tanto

$$f(x,y) = x \cos y + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ utilizamos que $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \left(y^2 - x \operatorname{sen} y\right) = -x \operatorname{sen} y + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = y^2 \Rightarrow g(y) = \frac{y^3}{3} + C_1$$

y la función $f(x,y)$ *será*

$$f(x,y) = x\cos y + \frac{y^3}{3} + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$x\cos y + \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2 \Leftrightarrow 3x\cos y + y^3 = K$$

donde hemos multiplicado por 3 *y se ha hecho el cambio* $3(C_2 - C_1) = K$.

Ejemplo 7.20 *Resuelve la EDO*

$$\left(2xy - 3x^2\right)dx + \left(x^2 - 2y\right)dy = 0$$

Primero comprobaremos que se trata de una EDO exacta utilizando el teorema anterior

$$M(x,y) = 2xy - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x$$

$$N(x,y) = x^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2x$$

y la EDO es exacta, existe una función $f(x,y)$ *tal que*

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 3x^2$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \left(2xy - 3x^2\right)dx = x^2y - x^3 + g(y)$$

recordemos que la constante de integración no depende de x*, pero puede depender de* y*, por tanto*

$$f(x,y) = x^2y - x^3 + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ *utilizamos que* $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow x^2 - 2y = x^2 + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C_1$$

y la función $f(x,y)$ *será*

$$f(x,y) = x^2y - x^3 - y^2 + C_1$$

La solución de la EDO en forma implícita es

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$x^2y - x^3 - y^2 + C_1 = C_2 \Leftrightarrow x^2y - x^3 - y^2 = K$$

donde se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$*, para agrupar ambas constantes en una.*

Observación 7.3 *Es posible integrar primero $N(x,y)$ respecto de y y utilizar la otra igualdad.*

Ejemplo 7.21 *Resuelve el siguiente PVI*

$$\left.\begin{array}{c}\left(\cos x - x\operatorname{sen} x + y^2\right)dx + 2xydy = 0 \\ \\ y(\pi) = 1\end{array}\right\}$$

Primero comprobaremos que se trata de una EDO exacta utilizando el teorema

$$M(x,y) = \cos x - x\operatorname{sen} x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$N(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$$

y la EDO es exacta, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

en este caso, integraríamos respecto de y

$$\int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int 2xydy = xy^2 + h(x)$$

pero ahora, la constante de integración no depende de y, pero puede depender de x, por tanto

$$f(x,y) = xy^2 + h(x)$$

Para encontrar $h(x)$ ahora, utilizamos que $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Leftrightarrow \left(\cos x - x\operatorname{sen} x + y^2\right) = y^2 + h'(x)$$

de donde

$$h'(x) = \cos x - x\operatorname{sen} x \Rightarrow h(x) = \int(\cos x - x\operatorname{sen} x)\,dx = \int \cos xdx - \int x\operatorname{sen} xdx$$

la segunda integral se hace por partes, tomando $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} xdx$, con $du = dx$ y $v = -\cos x$

$$\int x\operatorname{sen} xdx = x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

de este modo

$$h(x) = \operatorname{sen} x - (-x\cos x + \operatorname{sen} x) = x\cos x + C_1$$

y la función $f(x,y)$ será

$$f(x,y) = xy^2 + x\cos x + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$xy^2 + x\cos x + C_1 = C_2 \Leftrightarrow xy^2 + x\cos x = K$$

donde se ha hecho el cambio $3(C_2 - C_1) = K$. El valor de K se obtiene usando la condición inicial $y(\pi) = 1$, de forma que

$$\pi y(\pi)^2 + \pi\cos\pi = K \Leftrightarrow \pi - \pi = K \Leftrightarrow K = 0$$

y la solución particular vendría dada por la ecuación implícita

$$xy^2 + x\cos x = 0 \Leftrightarrow x\left(y^2 + \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow y^2 + \cos x = 0.$$

7.5.1. Factores integrantes

En ocasiones la EDO

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

no es exacta, pero es posible convertirla en exacta usando lo que se denomina *factor integrante.* Por ejemplo, la EDO

$$2ydx + xdy = 0$$

no es exacta puesto que

$$M(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2$$

mientras que

$$N(x,y) = x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x}(x,y) = 1$$

y por tanto, no coinciden. Sin embargo, si multiplicamos toda la ecuación por x, la ecuación resultante

$$2yxdx + x^2dy = 0$$

sí que es exacta, puesto que ahora

$$M^*(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial y}(x,y) = 2x$$

mientras que

$$N^*(x,y) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial x}(x,y) = 2x$$

De este modo, podemos resolver esta ecuación usando el procedimiento correspondiente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M^*(x,y) = 2xy \Rightarrow f(x,y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N^*(x,y) \Rightarrow x^2 + g'(y) = x^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C_1$$

siendo la solución

$$f(x,y) = C_2 \Rightarrow x^2y + C_1 = C_2.$$

La función $\mu(x) = x$ que hemos utilizado para transformar la EDO inicial es un ejemplo de *factor integrante.*

Definición 7.9 *Una función $\mu(x,y)$ que admite derivadas parciales continuas en un dominio D de $\mathbb{R}^2$ es un factor integrante de la EDO*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

si y sólo si la ecuación

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

es exacta.

Ejemplo 7.22 *Comprueba que* $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$ *es un factor integrante de la ecuación diferencial*

$$ydx - xdy = 0$$

La EDO no es exacta, puesto que

$$M(x,y) = y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1$$

mientras que

$$N(x,y) = -x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x}(x,y) = -1$$

y no coinciden. Si multiplicamos la ecuación por $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$ *obtendremos una nueva ecuación*

$$\frac{1}{y^2}(ydx - xdy) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dx = 0$$

que comprobamos que es exacta, puesto que

$$M^*(x,y) = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

mientras que

$$N^*(x,y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

ambas coinciden, la ecuación es exacta y existirá una función $f(x,y)$ *tal que*

$$M^*(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \frac{1}{y}dx = \frac{x}{y} + g(y)$$

recordemos que la constante de integración no depende de x*, pero puede depender de* y*, de ahí que elijamos* $g(y)$*, la función* $f(x,y)$ *será*

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ *utilizamos que* $N^*(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$N^*(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C_1$$

y la función $f(x,y)$ *será*

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + C_1$$

La solución de la EDO en forma implícita es

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$\frac{x}{y} + C_1 = C_2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = K$$

donde como siembre se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$*, para agrupar ambas constantes.*

Algunos factores integrantes

Para que la función $\mu(x,y)$ sea un factor integrante, debe ocurrir que la ecuación diferencial

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx+\mu(x,y)\,N(x,y)\,dy=0\Leftrightarrow \widetilde{M}(x,y)\,dx+\widetilde{N}(x,y)\,dy=0$$

sea exacta, es decir, debe ocurrir

$$\frac{\partial\widetilde{M}}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\widetilde{N}}{\partial x}(x,y)\Longleftrightarrow\frac{\partial\left(\mu(x,y)\,M(x,y)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu(x,y)\,N(x,y)\right)}{\partial x}$$

o derivando cada producto

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}M(xy)+\mu(x,y)\,\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}N(x,y)+\mu(x,y)\,\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

y reagrupando

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=N(x,y)\,\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}-M(xy)\,\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}$$

Esta ecuación es diferencial en derivadas parciales que a veces es más difícil de resolver que la EDO original, aunque en lagunos casos se puede simplificar.

Factor integrante $\mu(x)$

Supongamos que la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, admite un factor integrante μ que sólo dependa de la variable x, es decir, que $\mu(x,y)=\mu(x)$. En este caso debe cumplirse $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x)}{\partial y}=0$ y $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu'(x)$ y la ecuación quedaría

$$\mu(x)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=\mu'(x)\,N(x,y)$$

de modo que

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{N(x,y)}$$

Como el miembro de la izquierda sólo depende de x, el factor integrante será de esta forma si se cumple

$$\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{N(x,y)}\text{ sólo depende de la variable } x$$

en ese caso ponemos

$$h(x)=\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{N(x,y)}$$

y obtendremos la expresión del factor integrante

$$\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx=\int h(x)\,dx\Rightarrow\ln\mu(x)=H(x)\Rightarrow\mu(x)=e^{H(x)}$$

En resumen

$$\mu(x,y)=\mu(x)\Longleftrightarrow\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{N(x,y)}=h(x)$$

Ejemplo 7.23 *Resuelve la siguiente ecuación diferencial usando un factor integrante de tipo* $\mu(x,y) = \mu(x)$

$$(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dx + \cos y dy = 0$$

En este caso

$$M(x,y) = x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y$$

$$N(x,y) = \cos y \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$$

y por tanto no es una ecuación exacta. Calculemos el cociente

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{\cos y - 0}{\cos y} = 1$$

que puede considerarse como una función sólo de x

$$h(x) = 1$$

por tanto el factor integrante debe ser

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

La ecuación diferencial que incluye el factor integrante será

$$e^x (x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dx + e^x \cos y dy = 0$$

que podemos comprobar que es exacta

$$\widetilde{M}(x,y) = e^x (x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\widetilde{N}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y$$

Y podemos resolver utilizando el procedimiento para este tipo de ecuaciones. existe una función $f(x,y)$ *tal que*

$$\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$$

integrando respecto de y

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx = \int e^x \cos y dx = e^x \operatorname{sen} y + h(x)$$

recordemos que la constante de integración no depende de y*, pero puede depender de* x*, por tanto*

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + h(x)$$

Para encontrar $h(x)$ *utilizamos que* $\widetilde{M}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$$\widetilde{M}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Leftrightarrow e^x (x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) = e^x \operatorname{sen} y + h'(x)$$

de donde

$$h'(x) = xe^x + e^x \operatorname{sen} x \Rightarrow \int (xe^x + e^x \operatorname{sen} x)\, dx$$

integral que hacemos por partes para obtener

$$\int (xe^x + e^x \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x + 2(x-1)) + C_1$$

y la función $f(x,y)$ será

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x + 2(x-1)) + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$e^x \operatorname{sen} y + \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x + 2(x-1)) + C_1 = C_2 \Leftrightarrow e^x \operatorname{sen} y + \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x + 2(x-1)) = K$$

donde se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$.

Factor integrante $\mu(y)$

Supongamos que la ecuación diferencial $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$, admite un factor integrante μ que sólo dependa de la variable y, es decir, $\mu(x,y) = \mu(y)$. En este caso debe cumplirse $\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \mu'(y)$ y $\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \mu(y)}{\partial x} = 0$ y la ecuación sería

$$\mu(y) \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right) = -\mu'(y)\, M(x,y)$$

de modo que podríamos poner

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)}{M(x,y)}$$

Como el miembro de la izquierda sólo depende de y, el factor integrante será de esta forma si se cumple

$$\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)}{N(x,y)} \text{ sólo depende de } y$$

en ese caso ponemos

$$g(x) = -\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)}{M(x,y)}$$

y obtendremos la expresión del factor integrante

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy = \int g(y)\, dy \Rightarrow \ln \mu(y) = G(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{G(y)}$$

En resumen

$$\mu(x,y) = \mu(y) \Longleftrightarrow -\frac{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)}{N(x,y)} = g(y)$$

Ejemplo 7.24 *Resuelve la siguiente ecuación diferencial usando un factor integrante de tipo $\mu(x,y) = \mu(y)$*

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln x\right)dy = 0$$

En este caso

$$M(x,y) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$N(x,y) = \left(y^3 - \ln x\right) \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

y por tanto no es una ecuación exacta. Calculemos el cociente

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)} = \frac{\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{2}{y}$$

que es una función de y y por tanto

$$g(y) = -\frac{2}{y}$$

por tanto el factor integrante debe ser

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

La ecuación diferencial que incluye el factor integrante será

$$\frac{1}{y^2}\frac{y}{x}dx + \frac{1}{y^2}\left(y^3 - \ln x\right)dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{xy}dx + \left(y - \frac{1}{y^2}\ln x\right)dy = 0$$

que podemos comprobar que es exacta

$$\widetilde{M}(x,y) = \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2}$$

$$\widetilde{N}(x,y) = \left(y - \frac{1}{y^2}\ln x\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{xy^2}$$

Y podemos resolver utilizando el procedimiento para este tipo de ecuaciones. existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\widetilde{M}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{xy}$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \frac{1}{xy}dx = \frac{1}{y}\ln(x) + g(y)$$

recordemos que la constante de integración no depende de x, pero puede depender de y, por tanto

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x) + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ utilizamos que $\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{y^2}\ln x\right) = -\frac{1}{y^2}\ln x + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = y \Rightarrow \int y dx = \frac{y^2}{2} + C_1$$

y la función $f(x,y)$ será

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2}$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$\frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} + C_1 = C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} = K$$

donde se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$.

Factor integrante $\mu(z)$ con $z = z(x,y)$

Supongamos que el factor integrante μ depende de las variables x e y, relacionadas entre sí mediante una función dada $z(x,y) \in \mathbb{R}$ es decir, $\mu(x,y) = \mu(z(x,y))$. En este caso usando la regla de la cadena, tendremos $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$ y la ecuación quedaría

$$\mu(z)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = N(x,y)\mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x} - M(xy)\mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \left(N(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mu'(z)$$

de modo que

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{\left(N(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}$$

Como el miembro de la izquierda sólo depende de z, el factor integrante es de esa forma si

$$\frac{\left(N(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)} \text{ sólo depende de } z(x,y)$$

es decir el término de la izquierda se puede expresar en términos de z, la relación entre x e y, en ese caso ponemos

$$k(z) = \frac{\left(N(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}$$

y obtendremos la expresión del factor integrante integrando respecto de z

$$\int \frac{\mu'(z)}{\mu(z)}dz = \int k(z)\,dz \Rightarrow \ln\mu(z) = K(z) \Rightarrow \mu(z) = e^{K(z)}$$

En resumen

$$\mu(x,y) = \mu(z(x,y)) \Longleftrightarrow \frac{\left(N(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)} = k(z)$$

Ejemplo 7.25 *Resuelve la siguiente ecuación diferencial sabiendo que tiene un factor integrante de tipo* $\mu(x,y) = \mu\left(x^2+y^2\right)$

$$(x - xy)\,dx + \left(x^2+y\right)dy = 0$$

En este caso

$$M(x,y) = x - xy \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -x$$

$$N(x,y) = \left(x^2+y\right) \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

y por tanto no es una ecuación exacta.

El enunciado nos indica que hay un factor integrante de la forma

$$\mu(z) = \mu\left(x^2+y^2\right)$$

con $z = x^2+y^2$*,es decir la ecuación*

$$\mu(z)(x-xy)\,dx + \mu(z)\left(x^2+y\right)dy = 0$$

es exacta, lo que quiere decir que

$$\widetilde{M}(x,y) = \mu(z)(x-xy) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y}(x-xy) - x\mu(z)$$

y

$$\widetilde{N}(x,y) = \mu(z)\left(x^2+y\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(x^2+y\right) + 2x\mu(z)$$

son iguales

$$\mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y}(x-xy) - x\mu(z) = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(x^2+y\right) + 2x\mu(z)$$

pero como $z = x^2+y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ \ y \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

por tanto, tendremos

$$2\mu'(z)\,y\,(x-xy) - x\mu(z) = 2\mu'(z)\,x\left(x^2+y\right) + 2x\mu(z)$$

y agrupando

$$\begin{aligned}
\mu'(z)\left(2y(x-xy) - 2x\left(x^2+y\right)\right) &= \mu(z)(2x+x) \Leftrightarrow \\
\mu'(z)\left(2yx - 2xy^2 - 2x^3 - 2xy\right) &= 3x\mu(z) \Leftrightarrow \\
\mu'(z)\left(-2xy^2 - 2x^3\right) &= 3x\mu(z) \Leftrightarrow \\
-2x\mu'(z)\left(y^2+x^2\right) &= 3x\mu(z) \\
-2\mu'(z)\left(y^2+x^2\right) &= 3\mu(z) \\
-2\mu'(z)\,z &= 3\mu(z) \\
\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} &= -\frac{3}{2z}
\end{aligned}$$

e integrando

$$\int \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} dz = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{z} dz \Leftrightarrow \ln \mu(z) = -\frac{3}{2}\ln z = \ln z^{-3/2} \Leftrightarrow \mu(z) = z^{-3/2}$$

de modo que el factor integrante es

$$\mu\left(x^2+y^2\right) = \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$$

La ecuación diferencial que incluye el factor integrante será

$$\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}(x-xy)\,dx + \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\left(x^2+y\right)dy = 0$$

que podemos comprobar que es exacta

$$\widetilde{M}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}(x-xy) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = \frac{x\left(2y^2-3y-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\widetilde{N}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\left(x^2+y\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} = \frac{x\left(2y^2-3y-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

Y podemos resolver utilizando el procedimiento para este tipo de ecuaciones. existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\widetilde{M}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x-xy)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

integrando respecto de x

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx &= \int \frac{(x-xy)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dx \\
&= (1-y)\int x\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}dx \\
&= \frac{(1-y)}{2}\int 2x\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}dx = \\
&= \frac{(1-y)}{2}\frac{\left(x^2+y^2\right)^{-3/2+1}}{-3/2+1} + g(y) \\
&= \frac{(1-y)}{2}\frac{\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}}{-1/2} + g(y) \\
&= \frac{(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} + g(y)
\end{aligned}$$

recordemos que la constante de integración no depende de x, pero puede depender de y, por tanto

$$f(x,y) = \frac{(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ *utilizamos que* $\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \frac{\left(x^2+y\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} = \frac{y+x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C_1$$

y la función $f(x,y)$ *será*

$$f(x,y) = \frac{(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$\frac{(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1 = C_2 \Leftrightarrow \frac{(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} = K$$

donde se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$*.*

Ejemplo 7.26 *Resuelve la siguiente ecuación diferencial sabiendo que tiene un factor integrante de tipo* $\mu(x,y) = \mu(xy)$

$$y\left(x^2y^2+xy\right)dx + x\left(x^2y^2-1\right)dy = 0$$

En este caso

$$M(x,y) = y\left(x^2y^2+xy\right) = x^2y^3+xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2+2xy$$

$$N(x,y) = x\left(x^2y^2-1\right) = x^3y^2 - x \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2-1$$

y por tanto no es una ecuación exacta.

El enunciado nos indica que hay un factor integrante de la forma

$$\mu(z) = \mu(xy)$$

con $z = xy$*,es decir la ecuación*

$$\mu(z)\left(x^2y^3+xy^2\right)dx + \mu(z)\left(x^3y^2-x\right)dy = 0$$

es exacta, lo que quiere decir que

$$\widetilde{M}(x,y) = \mu(z)\left(x^2y^3+xy^2\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\left(x^2y^3+xy^2\right) + \mu(z)\left(3x^2y^2+2xy\right)$$

y

$$\widetilde{N}(x,y) = \mu(z)\left(x^3y^2-x\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(x^3y^2-x\right) + \mu(z)\left(3x^2y^2-1\right)$$

son iguales

$$\mu'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\left(x^2y^3+xy^2\right) + \mu(z)\left(3x^2y^2+2xy\right) = \mu'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(x^3y^2-x\right) + \mu(z)\left(3x^2y^2-1\right)$$

pero como $z = xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

por tanto, tendremos

$$\mu'(z)\, x \left(x^2y^3 + xy^2\right) + \mu(z) \left(3x^2y^2 + 2xy\right) = \mu'(z)\, y \left(x^3y^2 - x\right) + \mu(z) \left(3x^2y^2 - 1\right)$$

y agrupando

$$\begin{aligned}
\mu'(z) \left(x \left(x^2y^3 + xy^2\right) - y \left(x^3y^2 - x\right)\right) &= \mu(z) \left(\left(3x^2y^2 - 1\right) - \left(3x^2y^2 + 2xy\right)\right) \Leftrightarrow \\
\mu'(z) \left(x^2y^2 + xy\right) &= -\mu(z)(2xy + 1) \Leftrightarrow \\
\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} &= -\frac{2xy + 1}{x^2y^2 + xy} = -\frac{2z + 1}{z^2 + z}
\end{aligned}$$

y podemos integrar

$$\int \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} dz = -\int \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz \Longleftrightarrow \ln(\mu(z)) = -\ln\left(z^2 + z\right) \Longleftrightarrow \ln(\mu(z)) = \ln \frac{1}{(z^2 + z)} \Longleftrightarrow \mu(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

El factor integrante será

$$\mu(xy) = \frac{1}{xy(xy + 1)}$$

La ecuación diferencial modificada por el factor integrante sería

$$\begin{aligned}
\frac{\left(x^2y^3 + xy^2\right)}{xy(xy + 1)} dx + \frac{\left(x^3y^2 - x\right)}{xy(xy + 1)} dy &= 0 \Rightarrow \\
\frac{xy^2(xy + 1)}{xy(xy + 1)} dx + \frac{x\left(x^2y^2 - 1\right)}{xy(xy + 1)} dy &= 0 \Rightarrow \\
ydx + \frac{(xy - 1)(xy + 1)}{y(xy + 1)} dy &= 0 \\
ydx + \frac{(xy - 1)}{y} dy &= 0 \\
ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy &= 0
\end{aligned}$$

que podemos comprobar que es exacta:

$$\widetilde{M}(x, y) = y \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}(x, y)}{\partial y} = 1$$

$$\widetilde{N}(x, y) = \left(x - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}(x, y)}{\partial x} = 1$$

Y podemos resolver utilizando el procedimiento para este tipo de ecuaciones. existe una función $f(x, y)$ *tal que*

$$\widetilde{M}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$$

integrando respecto de x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int y dx = xy + g(y)$$

recordemos que la constante de integración no depende de x, pero puede depender de y, por tanto

$$f(x,y) = xy + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ utilizamos que $\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\widetilde{N}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{y}\right) = x + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow g(y) = -\ln y + C_1 = \ln\frac{1}{y} + C_1$$

y la función $f(x,y)$ será

$$f(x,y) = xy + \ln\frac{1}{y} + C_1$$

La solución de la EDO es en forma implícita

$$f(x,y) = C_2$$

por tanto

$$xy + \ln\frac{1}{y} + C_1 = C_2 \Leftrightarrow xy + \ln\frac{1}{y} = K$$

donde se ha hecho el cambio $(C_2 - C_1) = K$.

7.6. Ecuaciones lineales

Una EDO lineal de primer orden es de la forma

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$$

o dividiendo por $a(x)$, que debe ser distinto de 0 o no habría ecuación diferencial, se puede expresar como

$$y'(x) = p(x)\,y(x) + q(x)$$

Si $q \equiv 0$, la ecuación se dice *homogénea*, mientras que si $q \neq 0$, la ecuación es *no homogéna.*

Para resolver una EDO lineal de primer orden, primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'(x) = p(x)\,y(x)$$

que es de variables separables

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = p(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int p(x)\,dx \Rightarrow \ln y(x) = P(x) + C \Rightarrow y(x) = Ae^{P(x)}$$

donde $A = e^C$ y $P(x)$ es una primitiva de $p(x)$, obtenemos así la solución de la ecuación homogénea

$$y_h(x) = Ae^{P(x)}$$

Para resolver la ecuación no homogénea, utilizaremos el método de variación de las constantes y consideraremos que la solución general de dicha ecuación viene dada por una expresión de la forma

$$y(x) = B(x) e^{P(x)}$$

donde $B(x)$ es una función a determinar. Para encontar el valor de esa función hacemos uso de la hipótesis para esta $y(x)$ de ser solución de la EDO, por tanto si calculamos $y'(x)$

$$y'(x) = B'(x) e^{P(x)} + B(x) e^{P(x)} P'(x) = B'(x) e^{P(x)} + B(x) e^{P(x)} p(x)$$

y sustituimos en la EDO

$$\underbrace{B'(x) e^{P(x)} + B(x) e^{P(x)} p(x)}_{y'(x)} = p(x) \underbrace{B(x) e^{P(x)}}_{y(x)} + q(x) \Longrightarrow B'(x) e^{P(x)} = q(x)$$

por tanto

$$B'(x) = q(x) e^{-P(x)} \Longrightarrow B(x) = \int q(x) e^{-P(x)} dx + K$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

Observación 7.4 *Una ecuación lineal de orden* 1 *también puede resolverse usando un factor integrante. Si expresamos la EDO lineal como*

$$\frac{dy}{dx} = p(x) y(x) + q(x) \Leftrightarrow dy = (p(x) y(x) + q(x)) dx \Leftrightarrow (p(x) y(x) + q(x)) dx - dy = 0$$

donde $M(x, y) = (p(x) y(x) + q(x))$ *y* $N(x, y) = -1$*, si calculamos el cociente*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p(x) - 0}{-1} = -p(x)$$

que es función solo de x*, por tanto usaríamos como factor integrante el siguiente*

$$\mu(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

y resolveríamos la ecuación

$$\mu(x) (p(x) y(x) + q(x)) dx - \mu(x) dy = 0$$

que nos conduce al mismo resultado.

Ejemplo 7.27 *Resuelve la siguiente EDO lineal*

$$y' - y = 3e^{2x}$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y' - y = 0 \Longleftrightarrow y' = y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int dx \Leftrightarrow \ln(y) = x + C$$

y usando la función exponencial

$$y_h = e^{x+C} = e^C e^x = Ae^x$$

Para calcular la solución de la ecuación no homogénea, hacemos variación de constantes y suponemos que la solución es de la forma

$$y(x) = B(x)\, e^x$$

por tanto

$$y'(x) = B'(x)\, e^x + B(x)\, e^x$$

y sustituyendo en la EDO

$$\underbrace{\left(B'(x)\, e^x + B(x)\, e^x\right)}_{y'(x)} - \underbrace{B(x)\, e^x}_{y(x)} = 3e^{2x}$$

y simplificando

$$B'(x)\, e^x = 3e^{2x} \Rightarrow B'(x) = 3e^x \Rightarrow B(x) = 3e^x + K$$

por tanto la solución general buscada es de la forma

$$y(x) = B(x)\, e^x = (3e^x + K)\, e^x = 3e^{2x} + Ke^x$$

Ejemplo 7.28 *Resuelve la siguiente EDO lineal*

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x^3$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y' + \frac{2}{x}y = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{2}{x}y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y}dx = -\int \frac{2}{x}dx \Leftrightarrow \ln(y) = -2\ln x + C = \ln\frac{1}{x^2} + C$$

y usando la función exponencial

$$y_h = e^{\ln\frac{1}{x^2} + C} = e^C \frac{1}{x^2} = A\frac{1}{x^2}$$

Para calcular la solución de la ecuación no homogénea, hacemos variación de constantes y suponemos que la solución es de la forma

$$y(x) = B(x)\, \frac{1}{x^2}$$

por tanto

$$y'(x) = B'(x)\, \frac{1}{x^2} - B(x)\, \frac{2}{x^3}$$

y sustituyendo en la EDO

$$\underbrace{\left(B'(x)\, \frac{1}{x^2} - B(x)\, \frac{2}{x^3}\right)}_{y'(x)} + \frac{2}{x}\underbrace{B(x)\, \frac{1}{x^2}}_{y(x)} = 3x^3$$

y simplificando

$$B'(x)\, \frac{1}{x^2} = 3x^3 \Rightarrow B'(x) = 3x^5 \Rightarrow B(x) = \frac{1}{2}x^6 + K$$

por tanto la solución general buscada es de la forma

$$y(x) = B(x)\, \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{2}x^6 + K\right)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}x^4 + K\frac{1}{x^2}$$

7.6.1. Ecuación de Bernouilli

Una ecuación es de tipo Bernouilli si es de la forma

$$y'(x) = p(x)\, y(x) + q(x)\, [y(x)]^n \qquad n \in \mathbb{N},\, n \neq 0, 1$$

Si hacemos el cambio de variable

$$y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-n}}$$

por tanto

$$y'(x) = \frac{1}{1-n} [u(x)]^{\frac{1}{1-n}-1} u'(x) = \frac{1}{1-n} [u(x)]^{\frac{n}{1-n}} u'(x),$$

y sustituyendo en la EDO

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{1-n} [u(x)]^{\frac{n}{1-n}} u'(x)}_{y'(x)} &= p(x) \underbrace{[u(x)]^{\frac{1}{1-n}}}_{y(x)} + q(x) \left[\underbrace{[u(x)]^{\frac{1}{1-n}}}_{y(x)} \right]^n \\
\frac{1}{1-n} [u(x)]^{\frac{n}{1-n}} u'(x) &= p(x) [u(x)]^{\frac{1}{1-n}} + q(x) [u(x)]^{\frac{n}{1-n}}
\end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos la ecuación por

$$[u(x)]^{-\frac{n}{1-n}}$$

obtendremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-n} [u(x)]^{\frac{n}{1-n}} [u(x)]^{-\frac{n}{1-n}} u'(x) &= p(x) [u(x)]^{\frac{1}{1-n}} [u(x)]^{-\frac{n}{1-n}} + q(x) [u(x)]^{\frac{n}{1-n}} [u(x)]^{-\frac{n}{1-n}} \\
\frac{1}{1-n} u'(x) &= p(x)\, u(x) + q(x)
\end{aligned}$$

que es una EDO lineal.

Ejemplo 7.29 *Resuelve la siguiente ecuación de Bernouilli*

$$y' = 2y + y^3$$

Para esta ecuación $n = 3$, por tanto hacemos el cambio

$$y = u^{\frac{1}{1-3}} = u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} u'$$

y sustituyendo en la EDO

$$\underbrace{-\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} u'}_{y'(x)} = \underbrace{2u^{-\frac{1}{2}}}_{2y(x)} + \underbrace{\left[u^{-\frac{1}{2}} \right]^3}_{y(x)^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} u' = 2u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{3}{2}}$$

multiplicamos por $u^{\frac{3}{2}}$

$$-\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} u' = 2u^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} + u^{-\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} u' = 2u + 1 \Leftrightarrow u' = -4u - 2$$

que es una edo lineal en u. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$u' = -4u \Longleftrightarrow \frac{u'}{u} = -4 \Leftrightarrow \int \frac{u'}{u}dx = -4\int dx \Leftrightarrow \ln(u) = -4x + A$$

y usando la función exponencial

$$u_h = e^{-4x+A} = e^A e^{-4x} = Ce^{-4x}$$

Para calcular la solución de la ecuación no homogénea, hacemos variación de constantes y suponemos que la solución es de la forma

$$u(x) = C(x)\,e^{-4x}$$

por tanto

$$u'(x) = C'(x)\,e^{-4x} - 4C(x)\,e^{-4x}$$

y sustituyendo en la EDO

$$\underbrace{C'(x)\,e^{-4x} - 4C(x)\,e^{-4x}}_{u'(x)} = -4\underbrace{C(x)\,e^{-4x}}_{u(x)} - 2$$

y simplificando

$$C'(x)\,e^{-4x} = -2 \Rightarrow C'(x) = -2e^{4x} \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} + K$$

por tanto la solución general buscada es de la forma

$$u(x) = C(x)\,e^{-4x} = \left(-\frac{1}{2}e^{4x} + K\right)e^{-4x} = -\frac{1}{2} + Ke^{-4x}$$

y teniendo en cuenta que $y = u^{-\frac{1}{2}}$ *la solución* $y(x)$ *buscada es*

$$y(x) = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{Ke^{-4x} - \frac{1}{2}}}$$

Ejemplo 7.30 *Resuelve la siguiente ecuación de Bernouilli*

$$xy' - y = y^2 \operatorname{sen} x$$

Para esta ecuación $n = 2$*, por tanto hacemos el cambio*

$$y = u^{\frac{1}{1-2}} = u^{-1} \Rightarrow y' = -u^{-2}u'$$

y sustituyendo en la EDO

$$\underbrace{-u^{-2}u'}_{y'(x)} - \underbrace{u^{-1}}_{y(x)} = \underbrace{\left[u^{-1}\right]^2 \operatorname{sen} x}_{y(x)^3} \Leftrightarrow -u^{-2}u' - u^{-1} = u^{-2}\operatorname{sen} x$$

multiplicamos por u^2

$$-u^2u^{-2}u' - u^2u^{-1} = u^2u^{-2}\operatorname{sen} x \Leftrightarrow -u' - u = \operatorname{sen} x$$

que es una edo lineal en u. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea $-u' - u = 0$

$$u' = -u \Longleftrightarrow \frac{u'}{u} = -1 \Leftrightarrow \int \frac{u'}{u}dx = -\int dx \Leftrightarrow \ln(u) = -x + A$$

y usando la función exponencial

$$u_h = e^{-x+A} = e^A e^{-x} = Ce^{-x}$$

Para calcular la solución de la ecuación no homogénea, hacemos variación de constantes y suponemos que la solución es de la forma

$$u(x) = C(x) e^{-x}$$

por tanto

$$u'(x) = C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x}$$

y sustituyendo en la EDO

$$-\underbrace{C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x}}_{u'(x)} - \underbrace{C(x) e^{-x}}_{u(x)} = \operatorname{sen} x$$

y simplificando

$$C'(x) e^{-x} = -\operatorname{sen} x \Rightarrow C'(x) = -e^x \operatorname{sen} x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + K$$

por tanto la solución general buscada es de la forma

$$u(x) = C(x) e^{-x} = \left(\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + K\right) e^{-x} = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} + Ke^{-x}$$

y teniendo en cuenta que $y = u^{-1}$la solución $y(x)$ buscada es

$$y(x) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} + Ke^{-x}} = \frac{2}{2Ke^{-x} + \operatorname{sen} x - \cos x}$$

7.7. Ejemplos

Ejemplo 7.31 *Resuelve la siguiente ecuación diferencial*

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

El primer paso es determinar el tipo de ecuación, para ello expresamos $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}} \Longleftrightarrow (2 + ye^{xy}) dx - (2y - xe^{xy}) dy = 0$$

Claramente no es de variable separadas. Veamos si es exacta

$$M(x, y) = (2 + ye^{xy}) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$N(x, y) = -(2y - xe^{xy}) = xe^{xy} - 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

efectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por tanto debe existir una función $f(x,y)$ *tal que* $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $N = \frac{\partial f}{\partial y}$*. Para encontrar* f *usamos la primera igualdad e integramos respecto de* x

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int M(x,y)\, dx = \int (2 + ye^{xy})\, dx = 2x + e^{xy} + g(y)$$

Usando la otra igualdad

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \iff -(2y - xe^{xy}) = xe^{xy} + g'(y)$$

de forma que

$$g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2$$

por tanto

$$f(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2,$$

y la función y *se describirá mediante la ecuación impícita*

$$2x + e^{xy} - y^2 = C.$$

Ejemplo 7.32 *Resuelve el siguiente problema de valor inicial*

$$\left.\begin{array}{c} y' = (y+1)\, x \\ \\ y(0) = 4 \end{array}\right\}$$

Resolvemos la ecuación diferencial, que es de variables separadas

$$y' = (y+1)\, x \Rightarrow \frac{y'}{1+y} = x \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = xdx$$

podemos integrar

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int xdx \iff \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + C$$

y usando la función exponencial

$$(1+y) = Ae^{x^2/2} \Rightarrow y(x) = Ae^{x^2/2} - 1$$

Para encontrar la solución particular que cumple la condición inicial sustituimos $x = 0, y(0) = 4$

$$y(0) = 4 \iff A - 1 = 4 \iff A = 5$$

y la solución es

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Ejemplo 7.33 *Resuelve la siguiente EDO*

$$\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right) dx - xe^{\frac{y}{x}} dy = 0$$

Podemos comprobar que se trata de una EDO homogénea

$$M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}} \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x) + (\lambda y)\, e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} = (\lambda x) + (\lambda y)\, e^{\frac{y}{x}} = \lambda \left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right) = \lambda M(x,y)$$

$$N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}} \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x)\, e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} = -(\lambda x)\, e^{\frac{y}{x}} = \lambda\left(-xye^{\frac{y}{x}}\right) = \lambda N(x,y)$$

Hacemos el cambio

$$y = xv \Longleftrightarrow dy = vdx + xdv$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\left(x + (xv)\, e^{\frac{xv}{x}}\right) dx - xe^{\frac{xv}{x}} (vdx + xdv) &= 0 \Longleftrightarrow \\
(x + (xv)\, e^{v})\, dx - xe^{v} (vdx + xdv) &= 0 \Longleftrightarrow \\
(x + xve^{v} - xve^{v})\, dx - x^2 e^{v} dv &= 0 \Longleftrightarrow \\
xdx - x^2 e^{v} dv &= 0 \Longleftrightarrow \\
dx - xe^{v} dv &= 0
\end{aligned}$$

que es de variables separadas

$$dx = xe^{v} dv \Longleftrightarrow \frac{1}{x} dx = e^{v} dv$$

Integramos

$$\int \frac{1}{x} dx = \int e^{v} dv \Longleftrightarrow \ln(x) + C = e^{v}$$

y deshaciendo el cambio

$$\ln(x) + C = e^{\frac{y}{x}}$$

que define a y como función implícita de x.

Ejemplo 7.34 *Resuelve*

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

Reescribimos la ecuación para poner

$$xdy = \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx - xdy = 0$$

y podemos comprobar que se trata de una EDO homogénea

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \sqrt{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} \\
&= \lambda y + \sqrt{\lambda^2 (x^2 - y^2)} = \lambda y + \lambda \sqrt{x^2 - y^2} = \lambda\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) = \lambda M(x,y).
\end{aligned}$$

$$N(x,y) = x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x,y)$$

Hacemos el cambio

$$y = xv \Longleftrightarrow dy = vdx + xdv$$

que transforma la EDO

$$\begin{aligned}\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy &= 0\Leftrightarrow\left(xv+\sqrt{x^2-(xv)^2}\right)dx-x\left(vdx+xdv\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(xv+\sqrt{x^2-x^2v^2}\right)dx-xvdx-x^2dv=0\\ &\Leftrightarrow \left(xv+x\sqrt{1-v^2}\right)dx-xvdx-x^2dv=0\\ &\Leftrightarrow x\sqrt{1-v^2}dx-x^2dv=0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-v^2}dx-xdv=0\end{aligned}$$

que es de variables separadas, que podemos poner

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$$

Integramos ambos miembros de forma directa

$$\ln x+C=\arcsin v$$

y deshaciendo el cambio

$$\ln x+C=\arcsin\frac{y}{x}.$$

Ejemplo 7.35 *Resuelve*

$$\left(3xy+\frac{\cos(x)}{x}\right)dx+\left(2x^2+\frac{\operatorname{sen}x}{xy}\right)dy=0$$

probando previamente que admite a $\mu(x,y)=xy$ como factor integrante.

Primero multiplicaremos la EDO por el factor integrante

$$xy\left(3xy+\frac{\cos(x)}{x}\right)dx+xy\left(2x^2+\frac{\operatorname{sen}x}{xy}\right)dy=0\Leftrightarrow\left(3x^2y^2+y\cos x\right)dx+\left(2x^3y+\operatorname{sen}x\right)dy=0$$

que podemos comprobar que es exacta

$$M(x,y)=\left(3x^2y^2+y\cos x\right)\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=6x^2y+\cos x$$

$$N(x,y)=\left(2x^3y+\operatorname{sen}x\right)\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=6x^2y+\cos x$$

efectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Por tanto debe existir una función $f(x,y)$ tal que $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ y $N=\frac{\partial f}{\partial y}$. Para encontrar f usamos la primera igualdad e integramos respecto de x

$$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int M(x,y)\,dx=\int\left(3x^2y^2+y\cos x\right)dx=x^3y^2+y\operatorname{sen}x+g(y)$$

Usando la otra igualdad

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Longleftrightarrow \left(2x^3 y + \operatorname{sen} x\right) = 2x^3 y + \operatorname{sen} x + g'(y)$$

de forma que

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

por tanto

$$f(x,y) = x^3 y^2 + y \operatorname{sen} x + C$$

y la función y se describirá mediante la ecuación impícita

$$x^3 y^2 + y \operatorname{sen} x + K = 0.$$

Ejemplo 7.36 *Resuelve*

$$2\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)dx + 3xydy = 0$$

probando previamente que admite a $\mu(x,y) = xy$ como factor integrante.

Primero multiplicaremos la EDO por el factor integrante

$$2xy\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)dx + 3x^2y^2dy = 0 = 0 \Leftrightarrow 2\left(xy^3 + x\right)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

que podemos comprobar que es exacta

$$M(x,y) = 2\left(xy^3 + x\right) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6xy^2$$

$$N(x,y) = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 6xy^2$$

efectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por tanto debe existir una función $f(x,y)$ tal que $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Para encontrar f usamos la primera igualdad e integramos respecto de x

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int M(x,y)\,dx = \int 2\left(xy^3 + x\right)dx = x^2y^3 + x^2 + g(y)$$

Usando la otra igualdad

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Longleftrightarrow 3x^2y^2 = 3x^2y^2 + g'(y)$$

de forma que

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

por tanto

$$f(x,y) = x^2y^3 + x^2 + C$$

y la función y se describirá mediante la ecuación impícita

$$x^2y^3 + x^2 + K = 0.$$

Ejemplo 7.37 *Resuelve la siguiente EDO*

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$$

Expresamos la ecuación como

$$\left(x^2 - y^2\right) dx + 2xydy = 0$$

Los términos son dos funciones polinomiales de grado 2, vamos a comprobar que es una EDO homogénea

$$M(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2\left(x^2 - y^2\right) = \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(x,y) = 2xy \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) = 2\lambda^2 xy = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 N(x,y)$$

Así que hacemos el cambio

$$y = xv \Longleftrightarrow dy = vdx + xdv$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - y^2\right) dx + 2xydy &= 0 = 0 \Longleftrightarrow \\
\left(x^2 - (xv)^2\right) dx + 2x(xv)(vdx + xdv) &= 0 \Longleftrightarrow \\
\left(x^2 - x^2v^2 + 2x^2v^2\right) dx + 2x^3vdv &= 0 \Longleftrightarrow \\
\left(x^2 + x^2v^2\right) dx + 2x^3vdv &= 0 \Longleftrightarrow \\
\left(1 + v^2\right) dx + 2xvdv &= 0 \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

que es de variables separadas

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{2v}{1+v^2}dv$$

Integramos

$$-\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2v}{1+v^2}dv \Longleftrightarrow -\ln(x) + C = \ln\left(1+v^2\right) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C = \ln\left(1+v^2\right)$$

tomando exponenciales en ambos miembros

$$\frac{A}{x} = 1 + v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{A}{x} - 1$$

y deshaciendo el cambio

$$\frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{A}{x} - 1\right) \Leftrightarrow y^2 = x^2\left(\frac{A}{x} - 1\right) = Ax - x^2$$

que define a y como función implícita de x.

Veamos que también podemos utilizar un factor integrante, para ello calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= -2y \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2y
\end{aligned}$$

que indica que no es una ecuación diferencial exacta, pero si tomamos

$$\frac{-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-2y-(2y)}{2xy}=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x}$$

Por tanto admite como factor integrante a

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=\frac{1}{x^2}$$

y la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x^2}\left(x^2-y^2\right)dx+\frac{1}{x^2}2xydy=0\Leftrightarrow\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+2\frac{y}{x}dx=0$$

que es exacta puesto que

$$\widetilde{M}(x,y)=\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\Rightarrow\frac{\partial\widetilde{M}}{\partial y}(x,y)=-\frac{2y}{x^2}$$

$$\widetilde{N}(x,y)=\left(2\frac{y}{x}\right)\Rightarrow\frac{\partial\widetilde{N}}{\partial x}(x,y)=2y\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

efectivamente

$$\frac{\partial\widetilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{N}}{\partial x}$$

Por tanto debe existir una función $f(x,y)$ tal que $\widetilde{M}=\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\widetilde{N}=\frac{\partial f}{\partial y}$. Para encontrar f usamos la primera igualdad e integramos respecto de x

$$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int\widetilde{M}(x,y)\,dx=\int\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx=x+\frac{y^2}{x}+g(y)$$

Usando la otra igualdad

$$\widetilde{N}=\frac{\partial f}{\partial y}\Longleftrightarrow\left(2\frac{y}{x}\right)=\frac{2y}{x}+g'(y)$$

de forma que

$$g'(y)=0\Rightarrow g(y)=C$$

por tanto

$$f(x,y)=x+\frac{y^2}{x}+C,$$

y la función y se describirá mediante la ecuación impícita

$$x+\frac{y^2}{x}+K=0\Leftrightarrow x^2+y^2+Kx=0\Leftrightarrow y^2=Ax-x^2.$$

donde hemos puesto $A=-K$, para obtener la expresión que hemos hallado antes.

Ejemplo 7.38 *Encuentra el valor de k para que la EDO de primer orden*

$$\left(y^3+kxy^4-2x\right)dx+\left(3xy^2+20x^2y^3\right)dy=0$$

sea exacta. Resuelve la EDO para dicho valor.

Para encontrar el valor de k, la EDO debe ser exacta, por tanto, debe cumplir

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow 3y^2+4kxy^3=3y^2+40xy^3\Rightarrow 4kxy^3=40xy^3$$

y por tanto

$$k=10$$

Para ese valor y como la EDO es exacta debe existir una función $f(x,y)$ tal que $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ y $N=\frac{\partial f}{\partial y}$. Para encontrar f, tomamos $k=10$ y usamos la primera igualdad, que integramos respecto de x

$$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int M(x,y)\,dx=\int\left(y^3+10xy^4-2x\right)dx=xy^3+5x^2y^4-x^2+g(y)$$

Usando la otra igualdad

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}\Longleftrightarrow 3xy^2+20x^2y^3=3xy^2+20x^2y^3+g'(y)$$

de forma que

$$g'(y)=0\Rightarrow g(y)=C$$

por tanto

$$f(x,y)=xy^3+5x^2y^4-x^2+C,$$

y la función y se describirá mediante la ecuación impícita

$$xy^3+5x^2y^4-x^2+K=0.$$

7.8. Ejercicios

Ejercicio 7.1 *Determina si el teorema de existencia y unicidad de la solución implica que los siguientes problemas de valor inicial tienen solución única:*

(a) $\left.\begin{array}{c} y'=x^3-y^3 \\ y(0)=6 \end{array}\right\}$ *(b)* $\left.\begin{array}{c} y'+\cos y-\operatorname{sen} x=0 \\ y(\pi)=0 \end{array}\right\}$ *(c)* $\left.\begin{array}{c} yy'=4x \\ y(0)=0 \end{array}\right\}$

Ejercicio 7.2 *Resuelve las siguientes EDO*

(a) $\left(1+y^2\right)\left(e^{2x}dx-e^ydy\right)-(1+y)\,dy$ *(b)* $y'+\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(c) $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ *(d)* $\left(x^2+y^2\right)dx-yxdy=0$

(e) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$ *(f)* $y'=\frac{y+x-1}{3x-y+5}$