Capítulo 6

Integrales múltiples de Riemann

6.1. Integración sobre rectángulos

El objetivo de este tema es extender a varias variables el concepto de integral de Riemann, introducido en una variable. Para ello necesitamos definir el concepto equivalente de partición de un intervalo visto en el caso de una variable para el caso de n variables. Por claridad y para simplificar los cálculos usaremos el caso $n = 2$, que se extenderá de forma natural para cualquier $n > 2$.

Definición 6.1 *Se define* rectángulo *de* $\mathbb{R}^2$ *al conjunto definido como*

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b; c \leq x \leq d\}$$

Definición 6.2 *Se define el* área o medida del rectángulo $\mathcal{R}$, *al número*

$$\mu(\mathcal{R}) = (b - a)(c - d)$$

Definición 6.3 *Se llama* partición *del rectángulo* $\mathcal{R}$ *a un conjunto* $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$*, donde* $\mathcal{P}_1$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$ *y donde* $\mathcal{P}_2$ *es una partición del intervalo* $[c, d]$*.*

Por tanto si la partición $\mathcal{P}_1$ *tiene* m *subintervalos y está definida como*

$$\mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$$

y la partición $\mathcal{P}_2$ *tiene* n *subintervalos y está definida por*

$$\mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$$

entonces la partición $\mathcal{P}$ *estará formada por* $m \times n$ *subrectángulos de la forma*

$$R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$$

para $j = 1, \ldots, m$ *y* $k = 1, \ldots n$*.*

Definición 6.4 *Dado* $\mathcal{R}$ *un rectángulo de* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathcal{P}$ *una partición del mismo, definimos su* norma*, que representamos como* $\|\mathcal{P}\|$ *, al valor máximo de las medidas de cada uno de los subrectángulos en los que* $\mathcal{P}$ *dividie al rectángulo* $\mathcal{R}$*, es decir*

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{\mu(\mathcal{R}_{jk}) \mid \mathcal{R}_{jk} \textit{ subrectángulo de la partición } \mathcal{P}\}$$

Definición 6.5 *Dado $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$, dos particiones del mismo. Diremos que $\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{Q}$, si cada $\mathcal{P}_i$ es más fina que la correspondiente Q_i, para $i = 1, 2$, y si $\|P\| < \|Q\|$, es decir, si todo subrectángulo de Q es unión de subrectángulos de P. Para indicar que una partición es más fina que otra se puede utilizar la notación*

$$P \angle Q$$

Definición 6.6 *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f(x, y) \geq 0$ sobre $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{P}$ una partición de $\mathcal{R}$. Llamaremos* suma inferior *de $f(x, y)$ respecto a la partición $\mathcal{P}$ a*

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} m_{jk} (x_k - x_{k-1}) (y_k - y_{k-1}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} m_{jk} \mu(R_{jk})$$

siendo

$$m_{jk} = \text{mín} \{f(x, y) \mid (x, y) \in R_{jk}\}$$

y llamaremos suma superior *de $f(x, y)$ respecto a la partición $\mathcal{P}$ a*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{jk} (x_k - x_{k-1}) (y_k - y_{k-1}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{jk} \mu(R_{jk})$$

siendo

$$M_{jk} = \text{máx} \{f(x, y) \mid (x, y) \in R_{jk}\}$$

Como en el caso de una variable, las sumas inferiores y superiores dan una aproximación por defecto y por exceso, respectivamente, del valor real del volumen bajo la gráfica.

Proposición 6.1 *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f(x, y) \geq 0$ sobre $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{P}$ una partición de $\mathcal{R}$. Si V es el volumen bajo la gráfica $z = f(x, y)$ entonces se cumple:*

1. $$s(f, P) \leq V \leq S(f, \mathcal{P})$$

2. *Si definimos $m = \text{mín} \{f(x, y) \mid (x, y) \in [a, b] \times [cd]\}$*

$$m\mu(\mathcal{R}) \leq s(f, \mathcal{P})$$

3. *Si definimos $M = \text{máx} \{f(x, y) \mid (x, y) \in [a, b] \times [cd]\}$*

$$S(f, \mathcal{P}) \leq M\mu(\mathcal{R})$$

De la proposición se deduce que

$$m\mu(\mathcal{R}) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq V \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M\mu(\mathcal{R})$$

es decir cualquier suma inferior está acotada superiormente por $M\mu(\mathcal{R})$ y cualquier suma superior está acotada inferiormente por $m\mu(\mathcal{R})$.

Proposición 6.2 *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f(x, y) \geq 0$ sobre $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones del rectángulo, siendo $\mathcal{P} \angle \mathcal{Q}$, entonces se cumple:*

1.

$$s\left(f,\mathcal{P}\right) \geq s\left(f,\mathcal{Q}\right)$$

2.

$$S\left(f,\mathcal{P}\right) \leq S\left(f,\mathcal{Q}\right)$$

Proposición 6.3 *Sea $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f(x,y)\geq 0$ sobre $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones del rectángulo, entonces se cumple:*

$$s\left(f,\mathcal{P}\right) \leq S\left(f,\mathcal{Q}\right)$$

De esta forma si tomamos particiones cada vez más finas de $\mathcal{R}$ y con norma tendiendo a 0, se obtiene una sucesión monótona creciente de sumas inferiores y una sucesión monótona decreciente de sumas superiores. Como ambas sucesiones están acotadas superioremente e inferiormente por $m\mu\left(\mathcal{R}\right)$ y $M\mu\left(\mathcal{R}\right)$ respectivamente, ambas sucesiones serán convergentes y tiene sentido la siguiente definición:

Definición 6.7 *Sea $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f(x,y)\geq 0$ sobre $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$. Si consideramos una sucesión de particiones $\mathcal{P}_n=\mathcal{P}_{n,1}\times\mathcal{P}_{n,2}$ cada vez más finas de $\mathcal{R}$, con su norma $\|\mathcal{P}_n\|\longrightarrow 0$, definimos la* integral inferior de Riemann de *f en $\mathcal{R}$ como*

$$\lim_{\|\mathcal{P}_n\|\longrightarrow 0} s\left(f,\mathcal{P}_n\right) = \underline{\iint_{\mathcal{R}^-} f}$$

y se define la integral superior de Riemann de *f en $\mathcal{R}$ como*

$$\lim_{\|\mathcal{P}_n\|\longrightarrow 0} S\left(f,\mathcal{P}_n\right) = \overline{\iint_{\mathcal{R}} f}$$

Definición 6.8 *Se dice que $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x)\geq 0$ y acotada en el rectángulo $\mathcal{R}$ es* integrable Riemann, *sí y sólo sí,*

$$\underline{\iint_{\mathcal{R}^-} f} = \overline{\iint_{\mathcal{R}} f}$$

A este valor común se le denomina integral doble de Riemann *de f en $\mathcal{R}$ y se representa por*

$$\iint_{\mathcal{R}} f\left(x,y\right)dxdy$$

También se le denomina integral de área y se representa como

$$\iint_{\mathcal{R}} f\left(x,y\right)dA$$

Aunque el planteamiento inicial es el cálculo del volumen que se encuentra debajo de la gráfica de una función $z=f(x,y)$ con $f(x,y)\geq 0$, las definiciones anteriores se pueden generalizar a funciones $f(x,y)$ independientemente de su signo, con la condición de que la función $f(x,y)$ sea acotada en el rectángulo R.

6.1.1. Sumas de Riemann

Proposición 6.4 (Criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) \geq 0$ y acotada en el rectángulo $\mathcal{R}$, entonces*

$$f \text{ es integrable Riemann en } \mathcal{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \text{ partición de } \mathcal{R} \text{ tal que } S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$$

Definición 6.9 *Sea $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, una función acotada e integrable en sentido Riemann en el rectángulo $\mathcal{R}$ y sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ una partición del intervalo con*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{a = x_0, x_1, \ldots, x_m = b\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{c = y_0, y_1, \ldots, y_n = d\} \end{aligned}$$

Si tomamos $(\xi_j, \eta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k] = \mathcal{R}_{jk}$, se define la suma de Riemann *de f en $\mathcal{R}$ asociada a $\mathcal{P}$ a*

$$S_R(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_j, \eta_k)\, \mu(\mathcal{R}_{jk}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_j, \eta_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

Por la definición de m_{jk} y M_{jk}, se cumple

$$m_{jk} \leq f(\xi_j, \eta_k) \leq M_{jk}$$

y por tanto

$$s(f,\mathcal{P}) \leq S_R(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$$

Está claro que si la función es integrable entonces el límite de $s(f,\mathcal{P})$ y de $S(f,\mathcal{P})$ coinciden cuando se hacen particiones cada vez más finas y se deduce que, si f es integrable, el límite de $S_R(f,\mathcal{P})$ también será el mismo (regla del Sandwich) y podemos poner

$$\lim_{\|\mathcal{P}_k\| \longrightarrow 0} S_R(f,\mathcal{P}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x)\, dxdy.$$

Como en el caso de una variable, la ventaja que da el uso de las series de Riemann es que, si la función es integrable, entonces la partición que tomemos no importa y tampoco importará el punto que tomemos dentro de cada subintervalo en la partición, por tanto, se eligen particiones y puntos intermedios fáciles de manejar. Por ejemplo, la partición del intervalo se podría hacer dividiendo, cada intervalo $[a,b]$ y $[c,d]$ en, respectivamente, m y n partes iguales

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,m} &= \left\{a = x_0, x_1 = a + \frac{b-a}{m}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{m}, \ldots, x_m = a + m\frac{b-a}{m} = b\right\} \\ \mathcal{P}_{2,n} &= \left\{c = y_0, y_1 = c + \frac{d-c}{n}, y_2 = c + 2\frac{d-c}{n}, \ldots, y_n = c + n\frac{d-c}{n} = d\right\} \end{aligned}$$

es decir

$$x_0 = a \text{ y } x_j = x_{j-1} + \frac{b-a}{m};\ j = 1, \ldots, m$$

y

$$y_0 = c \text{ y } y_k = x_{k-1} + \frac{d-c}{n};\ k = 1, \ldots, n$$

©SPH

de esta forma la partición dependería de m y n

$$\mathcal{P}_{m,n} = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,m}$$

Todos los intervalos tienen el mismo tamaño, lo que hace que su norma sea

$$\|\mathcal{P}_{m,n}\| = \left(\frac{b-a}{m}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right)$$

y en este caso que

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\mathcal{P}_{m,n}\| = 0.$$

También por simplicidad, se tomaría como punto intermedio en cada subrectángulo $\mathcal{R}$, alguno de los siguientes

$$\text{Esquina inferior izquierda} \quad \left\{\begin{array}{c} \xi_j = x_{j-1} = a + (j-1)\,\frac{b-a}{m} \\ \\ \eta_k = y_{k-1} = c + (k-1)\,\frac{d-c}{n} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} j = 1, \ldots, m \\ \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

$$\text{Esquina inferior derecha} \quad \left\{\begin{array}{c} \xi_j = x_j = a + j\,\frac{b-a}{m} \\ \\ \eta_k = y_{k-1} = c + (k-1)\,\frac{d-c}{n} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} j = 1, \ldots, m \\ \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

$$\text{Esquina superior izquierda} \quad \left\{\begin{array}{c} \xi_j = x_{j-1} = a + (j-1)\,\frac{b-a}{m} \\ \\ \eta_k = y_k = c + k\,\frac{d-c}{n} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} j = 1, \ldots, m \\ \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

$$\text{Esquina superior derecha} \quad \left\{\begin{array}{l} \xi_j = x_j = a + j\,\frac{b-a}{m} \\ \\ \eta_k = y_k = c + k\,\frac{d-c}{n} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} j = 1, \ldots, m \\ \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

o finalmente el centro del rectángulo

$$\text{Punto medio del intervalo} \quad \left\{\begin{array}{l} \xi_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} = a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{m} \\ \\ \eta_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{m} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} j = 1, \ldots, m \\ \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

Siempre que f fuera integrable en $\mathcal{R}$ podríamos poner

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x)\,dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_j, \eta_k\right)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

Ejemplo 6.1 *Probar que* $f(x,y) = e^{x+y}$ *es integrable en* $[0,1]\times[0,1]$ *y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Dividimos el rectángulo, respectivamente, en m *y* n *partes iguales*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{b-a}{m} & = & \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{d-c}{n} & = & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

©SPH

la partición sería

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{1,m} &= \left\{a=0, x_1=\frac{1}{m}, x_2=2\frac{1}{m}, \ldots, x_m=m\frac{1}{m}=1\right\}\\ \mathcal{P}_{2,m} &= \left\{a=0, y_1=\frac{1}{n}, y_2=2\frac{1}{n}, \ldots, y_n=n\frac{1}{n}=1\right\}\end{aligned}$$

Vamos a elegir la esquina superior derecha como punto de cada subrectángulo de la partición

$$\left(\xi_j, \eta_k\right) = \begin{cases} \xi_j = x_j = \frac{j}{m} \\ \\ \eta_k = y_k = \frac{k}{n} \end{cases}$$

de forma que

$$f\left(\xi_j, \eta_k\right) = e^{\frac{j}{m}+\frac{k}{n}} = e^{\frac{j}{m}} e^{\frac{k}{n}}$$

Calculamos la suma de Riemann para esta partición $\mathcal{P}_{m,n} = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n}$

$$S_R\left(f, \mathcal{P}_{m,n}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_j, \eta_k\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)\left(y_k - y_{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{j}{m}} e^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n}\frac{1}{m} = \frac{1}{n}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{\frac{j}{m}} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$$

La suma interior, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$, *es la suma de una progresión geométrica de razón* $e^{\frac{1}{n}}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{e^{\frac{n}{n}} e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

y por tanto

$$S_R\left(f, \mathcal{P}_{m,n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{\frac{j}{m}} \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\sum_{j=1}^{m} e^{\frac{j}{m}}$$

El sumatorio restante es de nuevo la suma de una progresión geométrica, en este caso de razón $e^{\frac{1}{m}}$

$$\sum_{j=1}^{m} e^{\frac{j}{m}} = \frac{e^{\frac{1}{m}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{m}} - 1}$$

Finalmente

$$S_R\left(f, \mathcal{P}_{m,n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\sum_{j=1}^{m} e^{\frac{j}{m}} = \frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\frac{e^{\frac{1}{m}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{m}} - 1}$$

Si ahora hacemos $(m,n) \to \infty$ *obtenemos*

$$\lim_{(m,n)\to\infty} S_R\left(f, \mathcal{P}_{m,n}\right) = \lim \frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\frac{e^{\frac{1}{m}}\left(e-1\right)}{e^{\frac{1}{m}} - 1}$$

como

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \to 0 \text{ si } n, m \to \infty$$

usando infinitésimos equivalentes

$$\begin{aligned} e^{1/m} &\sim 1+\frac{1}{m} \text{ si } m\to\infty \Rightarrow e^{1/m}-1\sim\frac{1}{m} \\ e^{1/n} &\sim 1+\frac{1}{n} \text{ si } n\to\infty \Rightarrow e^{1/n}-1\sim\frac{1}{n} \end{aligned}$$

sustituyendo en el límite

$$\lim_{(m,n)\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}\frac{e^{\frac{1}{m}}(e-1)}{e^{\frac{1}{m}}-1}=\lim_{(m,n)\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\frac{1}{n}}\frac{e^{\frac{1}{m}}(e-1)}{\frac{1}{m}}=\lim_{(m,n)\to\infty}e^{\frac{1}{n}}(e-1)\,e^{\frac{1}{m}}(e-1)=(e-1)^2$$

6.1.2. Propiedades de las funciones integrables

Las integrales dobles en sentido Riemann cumplen propiedades análogas a las funciones reales de una variable real y las resumimos en las siguientes proposiciones.

Proposición 6.5 *Sea $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, acotada en el rectángulo $\mathcal{R}$, entonces se cumple:*

1. *Si $f\in\mathcal{C}(\mathcal{R})\Longrightarrow f$ es integrable en $\mathcal{R}$.*
2. *Si f es monótona (creciente o decreciente) $\Longrightarrow f$ es integrable en $\mathcal{R}$.*
3. *Si f es continua en $\mathcal{R}$ salvo una cantidad finita de discontinuidades $\Longrightarrow f$ es integrable en $\mathcal{R}$.*

Proposición 6.6 *Sea $f,g:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, dos funciones integrables dobles en sentido Riemann en el rectángulo $\mathcal{R}$, entonces se cumple:*

1. *Si $\alpha\in\mathbb{R}\Longrightarrow\alpha f$ es integrable en $\mathcal{R}$ y*
$$\iint_{\mathcal{R}}\alpha f(x,y)\,dxdy=\alpha\iint_{\mathcal{R}}f(x,y)\,dxdy.$$
2. *Las funciones $f\pm g$ son integrables dobles en sentido Riemann sobre $\mathcal{R}$ y además*
$$\iint_{\mathcal{R}}(f\pm g)(x,y)\,dxdy=\iint_{\mathcal{R}}f(x,y)\,dxdy\pm\iint_{\mathcal{R}}g(x,y)\,dxdy$$
3. *Si $f(x,y)\geq 0$ en $\mathcal{R}\Longrightarrow$*
$$\iint_{\mathcal{R}}f(x,y)\,dxdy\geq 0$$
4. *Si $f(x,y)\leq g(x,y)$ en $\mathcal{R}\Longrightarrow$*
$$\iint_{\mathcal{R}}f(x,y)\,dxdy\leq\iint_{\mathcal{R}}g(x,y)\,dxdy$$
5. *La función $|f(x,y)|$ es integrable en $\mathcal{R}$ y*
$$\left|\iint_{\mathcal{R}}f(x,y)\,dxdy\right|\leq\iint_{\mathcal{R}}|f(x,y)|\,dxdy$$

©SPH

6. *El producto* $(f \cdot g)(x,y)$ *también es integrable en* $\mathcal{R}$*, aunque en general se cumple*

$$\iint_{\mathcal{R}} (f \cdot g)(x,y)\,dxdy \neq \left(\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy\right) \cdot \left(\iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dxdy\right)$$

7. *Si* $g(x,y) \neq 0$*, para todo* $(x,y) \in \mathcal{R}$*, entonces el producto* $\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)$ *también es integrable en* $\mathcal{R}$*.*

8. *Si* $\mathcal{P}$ *es una partición del rectángulo* $\mathcal{R}$ *en* m *rectángulos* $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$*, entonces* f *es integrable en* $\mathcal{R} \iff f$ *integrable en cada* $\mathcal{R}_k$ *y se cumple*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathcal{R}_k} f(x,y)\,dxdy$$

Teorema 6.7 (Teorema de la Media Integral) *Si* $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, es continua y acotada en el rectángulo* $\mathcal{R} \Longrightarrow \exists\,(\xi,\eta) \in \mathcal{R}$ *tal que*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\,\mu(\mathcal{R}).$$

6.1.3. Integrales iteradas: Teorema de Fubini

Teorema 6.8 (Teorema de Fubini en un rectángulo) *Sea* $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, acotada e integrable en* $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$*. Supongamos que para cada* $x \in [a,b]$*, la integral* $\int_c^d f(x,y)\,dy$ *existe y vale* $A(x)$*. Entonces la integral* $\int_a^b A(x)\,dx$ *también existe y su valor coincide con* $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$*, es decir*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Análogamente, si suponemos que para cada $y \in [c,d]$*, la integral* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *existe y vale* $B(y)$*, entonces también existirá* $\int_c^d B(y)\,dy$ *y su valor coincide con* $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$*, es decir*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d B(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

A las integrales $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$ y $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$, si existen, se les llaman *integrales iteradas de* f en $\mathcal{R}$. Si f es continua, entonces ambas integrales existen y son iguales y en este caso es indiferente el orden de integración que se realice, es decir, podemos integrar primero respecto de x, considerando a y constante, y el resultado respecto de y, o viceversa, primero respecto de y y después respecto de x.

Ejemplo 6.2 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dxdy$$

en $\mathcal{R} = [0,2] \times [0,1]$*. Vamos a calcular las dos integrales iteradas y comprobaremos que ambas dan el mismo resultado. Si integramos primero respecto de* x*, considerando al* y *como constante*

$$\int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dx = \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x\right]_{x=0}^{x=2} = \left[32 - \frac{8}{3} - 4y^2\right] - [0] = \frac{88}{3} - 4y^2$$

©SPH

y el resultado, que es una función de y, la integramos respecto de esa variable :

$$\int_0^1 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \left[\frac{88}{3} - \frac{4}{3}\right] - [0] = 28$$

Si ahora integramos primero respecto de y

$$\int_0^1 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dx = \left[16y - x^2y - \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \left[16 - x^2 - \frac{2}{3}\right] - [0] = \frac{46}{3} - x^2$$

y el resultado, que es función de x, lo integramos respecto de esa variable

$$\int_0^2 \left(\frac{46}{3} - x^2\right) dx = \left[\frac{46}{3}x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{46}{3}2 - \frac{8}{3}\right] - [0] = 28$$

Ejemplo 6.3 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\, dxdy$$

en $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,2]$. *Integramos primero respecto de x, dejando y fija*

$$\int_0^1 (x+y)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=1} = \left[\frac{1}{2} + y\right] - [0] = \frac{1}{2} + y$$

y después respecto de y

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \left[\frac{1}{2}2 + \frac{2^2}{2}\right] = 3$$

Se deja al lector que compruebe que la otra integral iterada proporciona el mismo resultado.

6.2. Integrales múltiples

Todo el desarrollo teórico que se ha realizado en funciones de dos variables se puede extender al caso de tres o más variables de forma completamente equivalente, definiendo tanto los rectángulos $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k\}$$

como su medida

$$\mu(\mathcal{R}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

En este caso, la partición $\mathcal{P}$ de un rectángulo $\mathcal{R}$ sería de la forma $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, donde $\mathcal{P}_k$ es una partición del intervalo $[a_k, b_k]$. Por tanto si la partición $\mathcal{P}_k$, está definida como

$$\mathcal{P}_k = \left\{a_k = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{m_k}^k = b_k\right\}$$

con m_k subintervalos, la partición $\mathcal{P}$ estará formada por $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ subrectángulos de la forma

$$R_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \left[x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1\right] \times \left[x_{i_2-1}^2, x_{i_2}^2\right] \times \cdots \times \left[x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n\right]$$

No es necesario repetir todos los resultados y procedimientos vistos en el caso $n = 2$, el más importante de los cuales es el Teorema de Fubini que permite intercambia el orden de integración

$$\int\int\cdots\int_{\mathcal{R}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\cdots\left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{i_n}\right)\cdots dx_{i_1}$$

Veamos el resultado con un ejemplo para una integral triple.

Ejemplo 6.4 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\iiint_{\mathcal{R}} (xy+z)\,dxdydz$$

en $\mathcal{R} = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$*. Podemos integrar respecto* x*, dejando fijas* y *y* z

$$\int_0^1 (xy+z)\,dx = \left[\frac{x^2y}{2}+zx\right]_{x=0}^{x=1} = \left[\frac{y}{2}+z\right]-[0] = \frac{y}{2}+z$$

después respecto de y

$$\int_1^2\left(\frac{y}{2}+z\right)dy = \left[\frac{y^2}{4}+zy\right]_{y=1}^{y=2} = \left[\frac{2^2}{4}+z2\right]-\left[\frac{1^2}{4}+z\right] = 2z+1-z-\frac{1}{4} = z+\frac{3}{4}$$

y finalmente respecto de z

$$\int_2^3\left(z+\frac{3}{4}\right)dz = \left[\frac{z^2}{2}+\frac{3}{4}z\right]_{z=2}^{z=3} = \left[\frac{3^2}{2}+\frac{3}{4}3\right]-\left[\frac{2^2}{2}+\frac{3}{4}2\right] = \frac{13}{4}.$$

El lector puede comprobar que cualquier secuencia de integración daría el mismo resultado

$$\int_1^2\left(\int_2^3\left(\int_0^1 (xy+z)\,dx\right)dz\right)dy = \cdots = \int_1^2\left(\int_0^1\left(\int_2^3 (xy+z)\,dz\right)dx\right)dy$$

Obviamente es aconsejable elegir las iteraciones de forma que el cálculo de cada una de las integrales iteradas sea el más sencillo posible. Esta recomendación cobra más importancia cuando el recinto de integración no es un rectángulo sino una región más complicada.

Se suele emplear la notación

$$\int\int\cdots\int_{\mathcal{R}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} dx_{i_1}\left(\cdots\left(\int_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} dx_{i_{n-1}}\left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{i_n}\right)\right)\right)$$

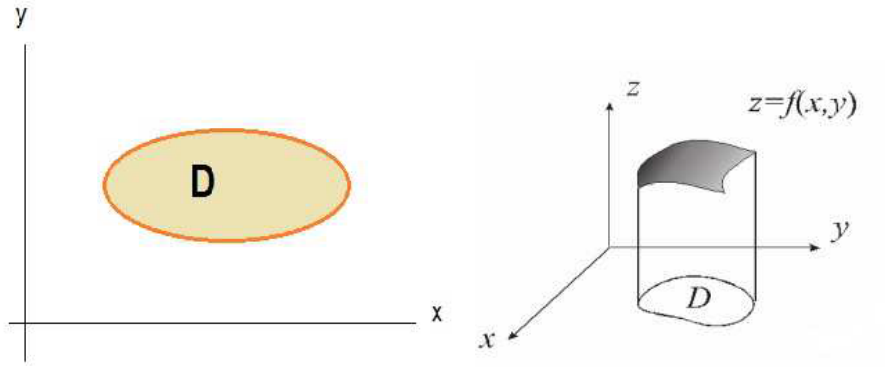
que indica claramente el intervalo de integración de cada variable. En el caso de la integral del ejemplo, se expresaría como

$$\iiint_{\mathcal{R}} (xy+z)\,dxdydz = \int_2^3 dz\int_1^2 dy\int_0^1 (xy+z)\,dx.$$

6.3. Integración sobre regiones más generales

Si la región de integración en $\mathbb{R}^2$ no fuera un rectángulo, sino un conjunto D cualquiera y la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fuera continua, podríamos extender sin dificultad el teorema de Fubini si este conjunto cumpliera ciertas condiciones de regularidad".

Supongamos que queremos calcular la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre una región planta D como la de la figura

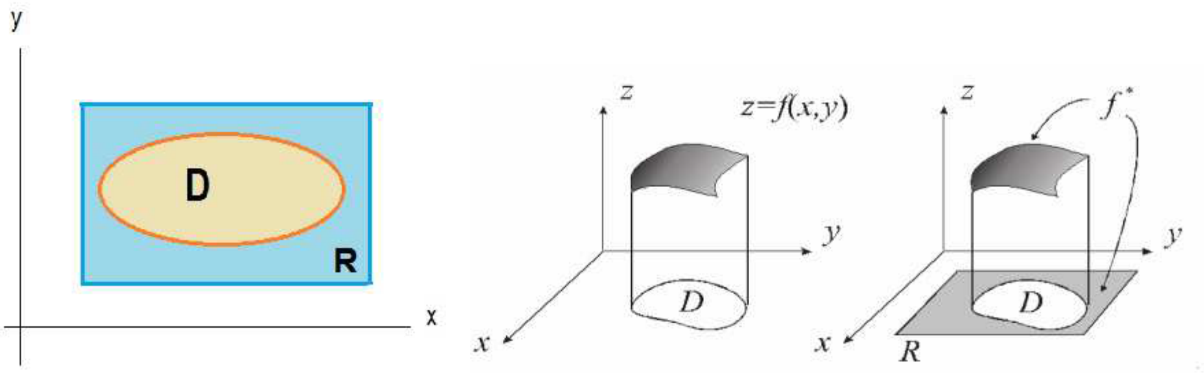


El procedimiento es construir un rectángulo $\mathcal{R}$ que contenga al conjunto D y definir una función $f^*(x, y)$ definida como

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

y se define la integral de f sobre D como la integral de f^* sobre el rectángulo $\mathcal{R}$:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{R}} f^*(x,y)\,dxdy$$

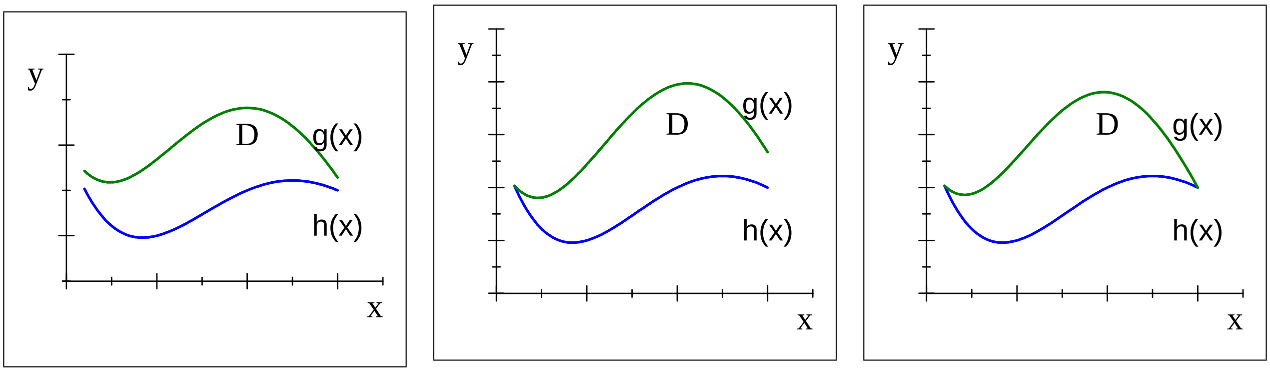


Teorema 6.9 (Teorema de Fubini en dominios regulares) *Sea $h, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas con $h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, sea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\right\}$. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función acotada y continua en D, entonces f es integrable en D y se cumple*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right)$$

©SPH

La afirmación de este teorema es válida para regiones de las formas indicadas en las siguientes gráficas

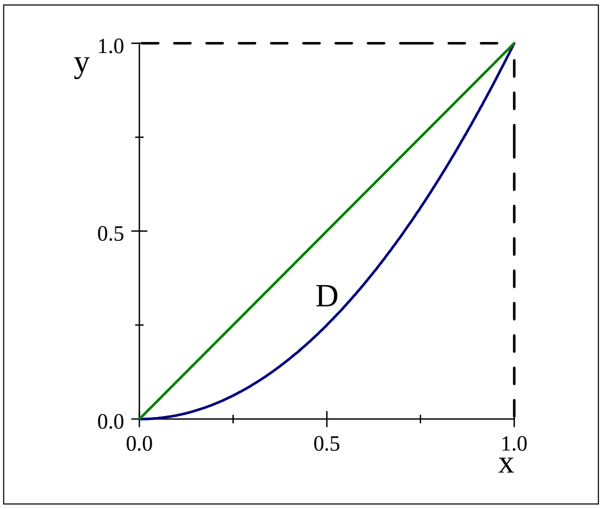


Para hallar los límites de integración primero observamos la variación de la variable x ($a \leq x \leq b$) y para cada valor de x, la ordenada y variará entre $h(x)$ y $g(x)$.

Ejemplo 6.5 *Vamos a calcular* $\iint_D xydxdy$, *siendo* D *la región del cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$ *comprendida entre la recta* $y = x$ *y la curva* $y = x^2$. *La región* D *está definida como*

$$D = \left\{ \left(x, y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq x \right) \right\}$$

está representada en la siguiente figura



Está claro que la variable x *varía entre* 0 *y* 1, *mientras que para cada valor de* x *fijo, la coordenada* y *varía entre* $h(x) = x^2$ *y* $g(x) = x$, *luego pondremos, usando la notación correspondiente*

$$\begin{aligned} \iint_D xydxdy &= \int_0^1 dx \int_{h(x)}^{g(x)} (xy)\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (xy)\, dy = \int_0^1 dx \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right] dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

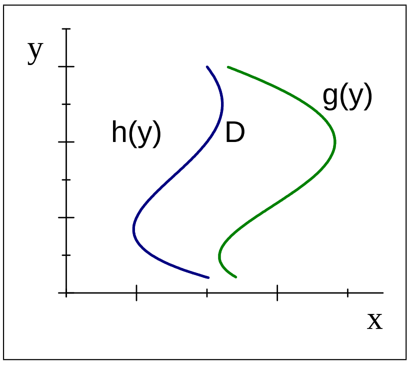
Del mismo modo, podemos considerar dominios de la forma

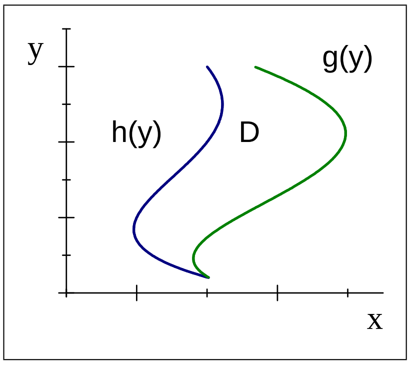
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(y) \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d \right\},$$

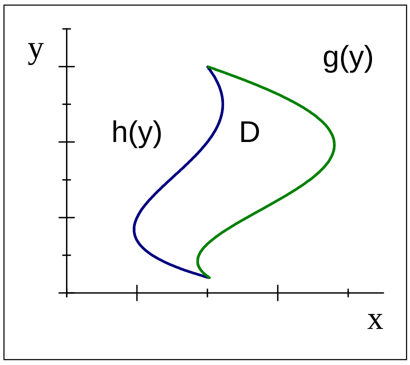
de forma que si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función acotada y continua en D, entonces f es integrable en D y se cumple

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx \right)$$

Como antes, esta afirmación es válida para regiones de las formas indicadas en las siguientes gráficas







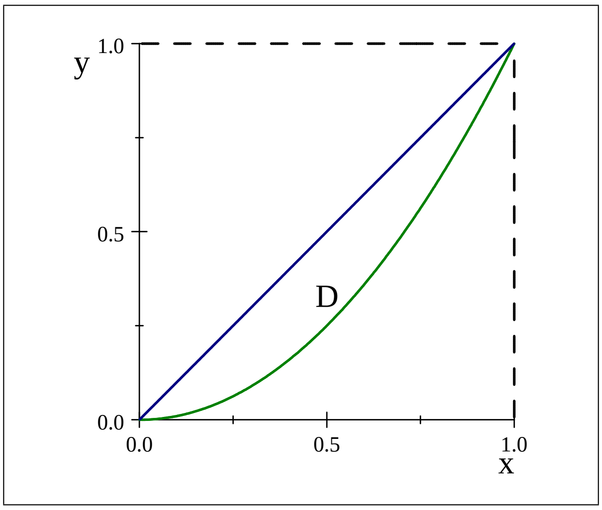
En este caso, para hallar los límites de integración primero observamos la variación de la variable y $(c \leq x \leq d)$ y para cada valor de y, la coordenada x variará entre $h(y)$ y $g(y)$.

En la práctica se fija una variable y se hace variar la otra según convenga. Podemos comprobar, como en el ejemplo anterior, es indiferente la variable elegida.

Ejemplo 6.6 *Vamos a calcular* $\iint_D xydxdy$*, siendo* D *la región del cuadrado* $[0,1]\times[0,1]$ *comprendida entre la recta* $y = x$ *y la curva* $y = x^2$*. Utilizando las relaciones entre* x *e* y*,podemos definir* D *en este caso como*

$$D = \{(x, y \in \mathbb{R} \mid y \leq x \leq \sqrt{y}; 0 \leq y \leq 1)\}$$

La región D *está representada en la siguiente figura*

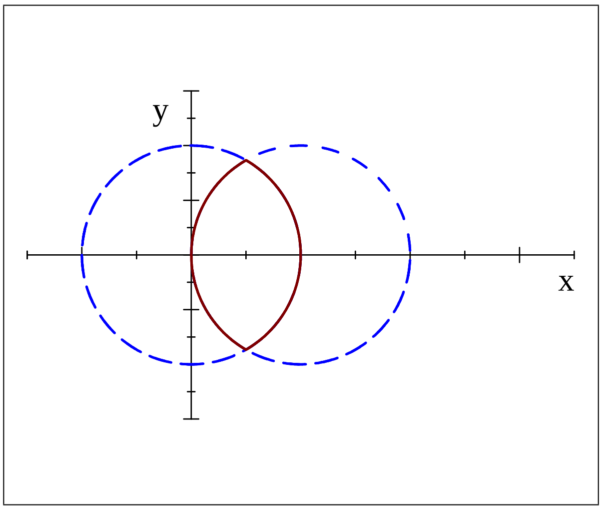


y la integral doble sería, como antes

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} xydx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2}\right] dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{8}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Ejemplo 6.7 *Vamos a calcular* $\iint_D xydxdy$*, siendo* D *la región definida por la intersección de los dos círculos* $x^2 + y^2 \leq 1$ *y* $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$*. En la gráfica siguiente está representada la región* D

©SPH

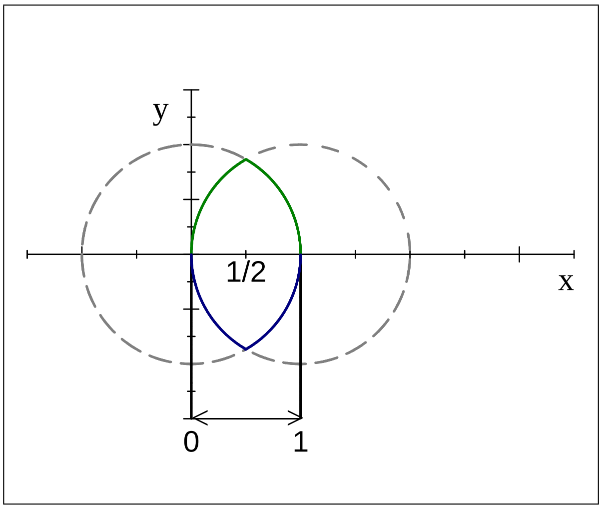


Los puntos de corte de las dos circunferencias se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

dando por solución los puntos $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Si, por ejemplo, hacemos que el valor de la x *sea el que varíe entre* 0 *y* 1 *tal y como se indica en la figura.*



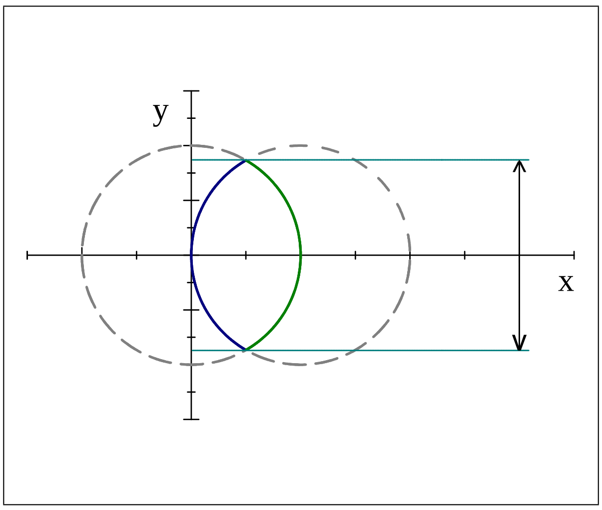
vemos que las funciones que están por encima (verde) y por debajo (azul) dependen del valor de x. *Así, para* $0\leq x\leq \frac{1}{2}$, *la curva que está por encima es* $g_1(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$, *mientras que la que está por debajo es* $h_1(x)=-\sqrt{1-(x-1)^2}$. *Para el intervalo* $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$, *la curva que está por encima es* $g_2(x)=\sqrt{1-x^2}$ *y la que está por debajo sería* $h_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$, *de esta forma podríamos poner*

$$\int\int_D xydxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\left(\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}(xy)\,dy\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(xy)\,dy\right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \left(\left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} \right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \left(\left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 0dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0dx = 0\end{aligned}$$

También es posible fijar la variable y que recorrerá el intervalo $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$*, en este caso la circunferencia que hay a la izquierda (azul) es la definida como* $h(y) = 1 - \sqrt{1-y^2}$ *(se obtiene al despejar de la circunferencia* $(x-1)^2 + y^2 = 1$*), mientras que la que está a la derecha (verde) es la definida por* $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ *(se obtiene al despejar de la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$*),*



©SPH

la integral se puede expresar como

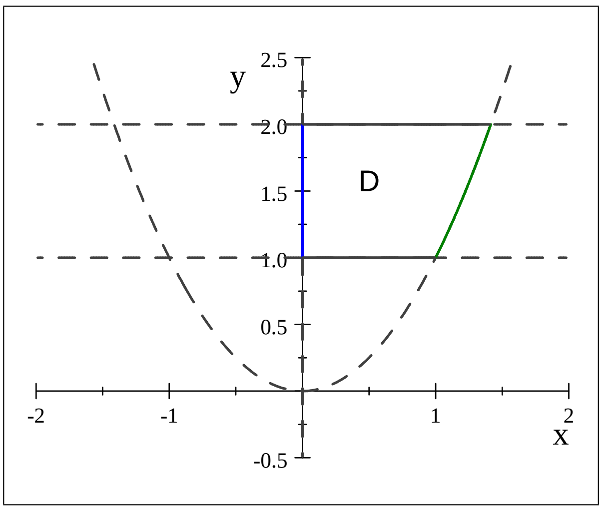
$$\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (xy)\, dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy \left[\frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}{2}y - \left[\frac{\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)^2}{2}y\right]\right] \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1-y^2}{2}y - \frac{1+\left(1-y^2\right)-2\sqrt{1-y^2}}{2}y\right) dy \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1-y^2-1-\left(1-y^2\right)+2\sqrt{1-y^2}}{2}\right) ydy \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{-1+2\sqrt{1-y^2}}{2}\right) ydy \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{1}{2}y + y\sqrt{1-y^2}\right) dy = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{1}{2}y + y\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) dy \\
&= \left[-\frac{y^2}{4} - \frac{\left(1-y^2\right)^{3/2}}{3}\right]_{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{y=\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.8 *Calcula*

$$\int\int_D xe^{-\frac{x^2}{y}} dxdy$$

donde D es la porción del plano delimitada por $x = 0$, $y = x^2$, $y = 1$, $y = 2$.

Representamos el conjunto D



En este caso lo más sencillo es variar la y entre los valores 1 y 2, y después variar la x entre $x = 0$

(azul) y la parábola $y = x^2$ en verde, es decir, $x = \sqrt{y}$, luego

$$\begin{aligned}
\iint_D xe^{-\frac{x^2}{y}} dxdy &= \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-\frac{x^2}{y}} dx = \int_1^2 \left[-\frac{y}{2} e^{-\frac{x^2}{y}} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \\
&= \int_1^2 \left[-\frac{y}{2} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{y}} - \left(-\frac{y}{2} e^{-\frac{0^2}{y}} \right) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_1^2 -\frac{y}{2} e^{-1} + \frac{y}{2} dy = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right) \int_1^2 y dy \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right) \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right) \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

6.3.1. Integrales triples

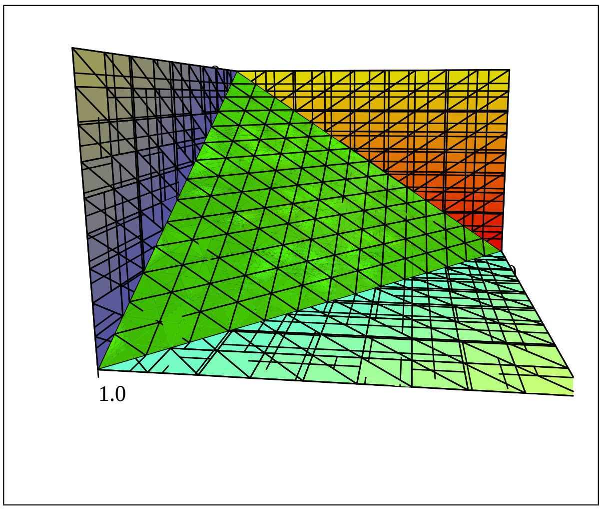
El teorema de Fubini en dominios más generales puede extenderse con relativa facilidad a integrales triples, donde dichos dominios pueden expresarse como

$$V = \{(x, y, z) \in R \mid a \leq x \leq b; h(x) \leq y \leq g(x); u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$$

o los correspondientes conjuntos en cada uno de los ejes. De esta forma

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dxdydz = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

Ejemplo 6.9 *Consideremos la pirámide limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$. Vamos a estudiar cómo podemos definir este conjunto que vemos representado en la siguiente figura*



Está claro que $0 \leq x \leq 1$. Si tomamos $z = 0$, entonces debe cumplirse $x + y = 1$ y como $x \in [0, 1]$ debe ocurrir que $y = 1 - x \in [0, 1]$, luego debe cumplirse

$$0 \leq y \leq 1 - x$$

para otro valor de z debe cumplirse

$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

©SPH

Luego el dominio V puede definirse como

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

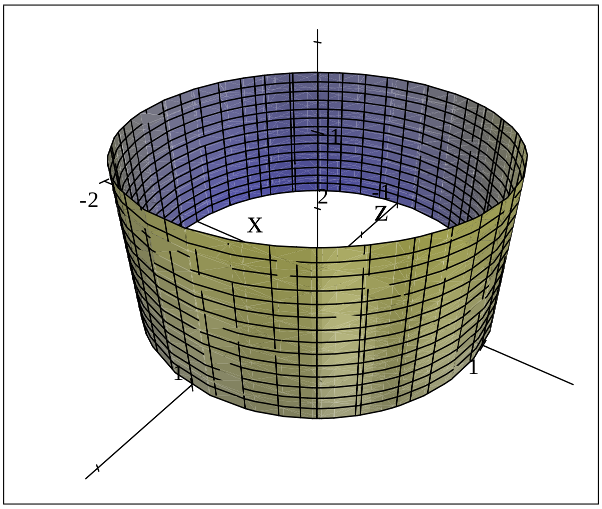
Así por ejemplo si queremos calcular

$$\begin{aligned}
\iiint_V z dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\
&= \int_0^1 dx \left[-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-(1-x))^3}{6} - \left(-\frac{(1-x-0)^3}{6}\right)\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{24}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10 *Calcula*

$$\iiint_V z dx dy dz$$

siendo V el tronco de cilindro $x^2 + y^2 = 1$



limitado por los planos $z = 0$ y $z = 1$. En este caso está claro que la variable z es la que usaremos en último lugar con

$$0 \leq z \leq 1$$

Para las variables x e y es indiferente ya que hay simetría en las mismas, usaremos que $-1 \leq y \leq 1$ y por tanto mediante la ecuación del cilindro pondremos que $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ y la integral *triple se puede poner como*

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,dxdydz &= \int_0^1 dz\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,dx = \\ &= \int_0^1 dz\int_{-1}^1 [zx]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}\,dy \\ &= \int_0^1 dz\int_{-1}^1 2z\sqrt{1-y^2}dy\end{aligned}$$

el valor $2z$ *no depende de* y*, así que lo pasamos a la última integral*

$$\int_0^1 dz\int_{-1}^1 2z\sqrt{1-y^2}dy = 2\int_0^1 z\,dz\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}dy$$

y la integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}dy$$

se hace con el cambio de variable

$$y = \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = \cos t\,dt \Longrightarrow \begin{cases} y=-1 \Longrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ y = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \left(\frac{\pi/2}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right) - \left(-\frac{\pi/2}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(-2\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

y

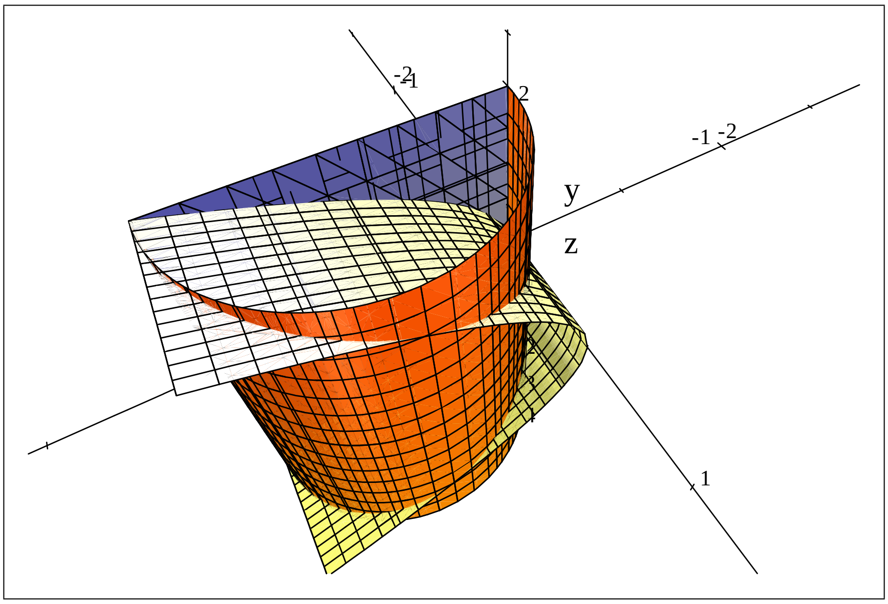
$$\iiint_V z\,dxdydz = 2\int_0^1 \frac{\pi}{2}z\,dz = 2\left[\frac{\pi}{2}\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 6.11 *Calcula*

$$\iiint_V x^2yz^3\,dxdydz$$

siendo V *el sólido limitado por el plano* $y=0$ *y las superficies* $S_1 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ *(cilindro) y* $S_2 : z^2 = 4x$ *(paraboloide)*

©SPH



La ecuación del cilindro determina que las coordenadas x e y deben estar en el rectángulo $[0,1]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, obviamente si fijamos el valor de x, entonces y está determinado por esta ecuación. Es decir si $0\le x\le 1$, entonces

$$-\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\le y\le\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

pero como está limitado por el plano $y=0$, suponemos $y\ge 0$ y la relación sería

$$0\le y\le\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

junto con la ecuación $z^2=4x$, el conjunto está definido como

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1;0\le y\le\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2};-2x\le z\le 2x\right\}$$

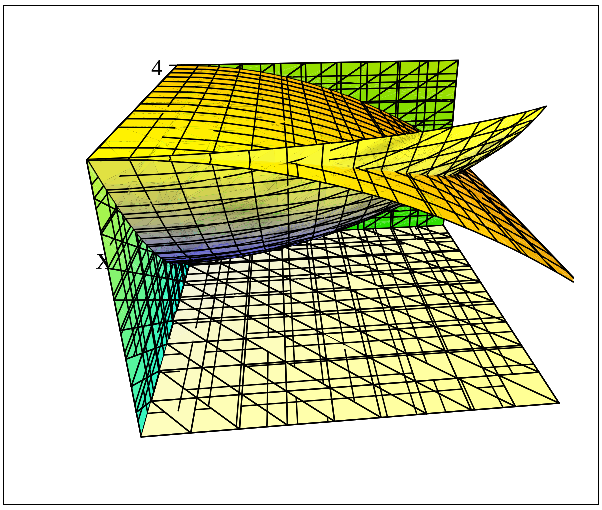
y la integral sería

$$\begin{aligned}
\iiint_V x^2yz^3\,dxdydz &= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} dy\int_{-2x}^{2x} x^2yz^3dz\\
&= \int_0^1 x^2dx\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} ydy\int_{-2x}^{2x} z^3dz\\
&= \int_0^1 x^2dx\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} y\left[\frac{z^4}{4}\right]_{-2x}^{2x}dy\\
&= \int_0^1 x^2dx\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} y\cdot 0dy=0
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.12 *Calcula*

$$\iiint_V dxdydz$$

Siendo V el sólido limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$, y el cilindro parabólico: $z = 4 - y^2$, dentro del primer octante. Representamos el conjunto:



Veamos la intersección del cilintro y el paraboloide

$$0 = \left(2x^2 + y^2\right) - \left(4 - y^2\right) = 2x^2 + 2x^2 - 4 \Longleftrightarrow 2 = x^2 + y^2$$

por tanto está claro que podemos poner

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

mientras que para la y

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$$

y para la z, tenemos que ver si el paraboloide va por encima del cilindro o viceversa, para ello planteamos la desigualdad

$$\left(2x^2 + y^2\right) \leq \left(4 - y^2\right) \Longleftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 4 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$$

que es correcto siempre que $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}y - \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$, que es precisamente la región que hemos determinado. También se puede comprobar en la gráfica. Por tanto, podemos poner

$$2x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - y^2$$

Calculamos el valor de la integral

$$\iiint_V dxdydz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz$$

Integramos en z

$$\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz = [z]_{z=2x^2+y^2}^{z=4-y^2} = \left(4 - y^2\right) - \left(2x^2 + y^2\right) = 4 - 2x^2 - 2y^2$$

©SPH

de este modo

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4-2x^2-2y^2 dy$$

Integramos en y

$$\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(4-2x^2-2y^2\right) dy = \left[4y - 2x^2 y - \frac{2y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}\left(2x^2-4\right).$$

De forma que

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4-2x^2-2y^2 dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}\left(2x^2-4\right)\right) dx$$

Y finalmente integramos en x*. Para ello hacemos el cambio de variable*

$$x^2 = 2\operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \\ dx = \sqrt{2}\cos t dt \end{cases}$$

mientras que los extremos de integración

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \Rightarrow \operatorname{sen} t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2 \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \Rightarrow \operatorname{sen} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}\left(2x^2-4\right)\right) dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2 t}\left(4\operatorname{sen}^2 t - 4\right)\sqrt{2}\cos t\right) dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{4}{3}\sqrt{2}\cos t\left(4\operatorname{sen}^2 t - 4\right)\sqrt{2}\cos t dt \\
&= -\frac{32}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\left(\operatorname{sen}^2 t - 1\right) dt \\
&= -\frac{32}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \; dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt\right) \\
&= -\frac{32}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{4} \; dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt\right)
\end{aligned}$$

Y usando las fórmulas del ángulo doble

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{4} \; dt &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t \; dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} \; dt = \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1-\cos 4t \; dt \\
&= \frac{1}{8}\left[t - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

©SPH

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

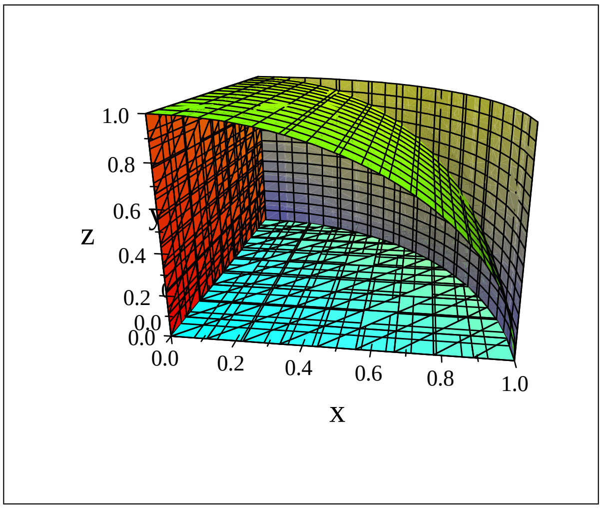
y sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}\,(2x^2-4)\right) dx &= -\frac{32}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{4}\; dt - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt\right) \\ &= -\frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 6.13 *Calcula*

$$\iiint_V dxdydz$$

siendo V el sólido limitado por los cilindro $x^2+y^2=1$ y $x^2+z^2=1$, en el primer octante.



De la ecuación del primer cilíndro tenemos, por estar en el primer octante

$$0 \le x \le 1$$

y por tanto

$$0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

De la ecuación del segundo cilíndro tenemos, por estar en el primer cuadrante

$$0 \le z \le \sqrt{1-x^2}$$

y la integral sería

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz$$

Integramos primero respecto de z

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = [z]_{z=0}^{z=y} = \sqrt{1-x^2}$$

de forma que

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

Integramos la segunda respecto de y

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = [y]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

de forma que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 \left(1-x^2\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

6.4. Cambio de variable en la integral doble

Recordemos la definición de cambio de variable que se vio en temas anteriores para el caso $n = 2$.

Definición 6.10 *Se dice que la aplicación $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, es un cambio de variable si cumple:*

1. *φ es inyectiva.*
2. *$\varphi \in \mathcal{C}^1(A)$.*
3. *La matriz Jacobiana de φ es no singular, es decir*

$$\det\left(J\varphi(u,v)\right) \neq 0, \ \forall (u,v) \in A$$

Ejemplo 6.14 *Por ejemplo, podemos definir la aplicación*

$$\varphi : A = (0,1) \times (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

como

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Veamos que φ es un cambio de variable.

1. *¿φ es inyectiva?: Supongamos que tenemos dos valores (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2) tales que*

$$\varphi(r_1,\theta_1) = \varphi(r_2,\theta_2)$$

es decir

$$(r_1\cos\theta_1, r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = (r_2\cos\theta_2, r_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 \\ r_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = r_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \end{cases}$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$\begin{cases} r_1^2\cos^2\theta_1 = r_2^2\cos^2\theta_2 \\ r_1^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_1 = r_2^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow r_1^2 = r_2^2$$

pero como $r_1, r_2 \geq 0$

$$r_1 = r_2$$

por tanto si

$$r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

pero $\theta_1, \theta_2 \in [0,\pi]$, por tanto

$$\theta_1 = \theta_2$$

2. *¿φ es de clase $\mathcal{C}^1(A)$?: Sí, de hecho es de clase $\mathcal{C}^\infty(A)$.*

3. *¿$|J\varphi(r,\theta)| \neq 0$?*

$$\det(J\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r \neq 0$$

Observación 6.1 *Normalmente los cambios de variable se representan como*

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$$

y la matriz Jacobiana como

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.10 (Cambio de variable en integral doble) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ y $D = \varphi(A)$, siendo $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, un cambio de variable. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable. Si denotamos por*

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u,v) \\ y &= \varphi_2(u,v) \end{aligned}$$

entonces la función

$$(f \circ \varphi) \cdot |\det(J\varphi)|$$

es integrable en A y además se cumple la fórmula del cambio de variable

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_A (f\circ\varphi)(u,v)\cdot|\det(J\varphi(u,v))|\ dudv$$

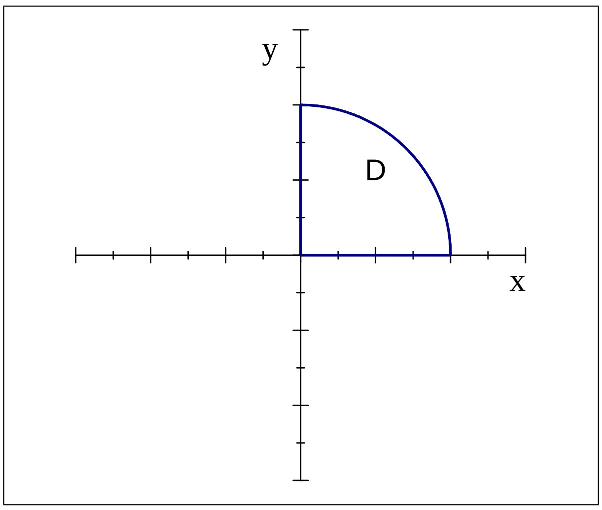
Ejemplo 6.15 *Calcula*

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

donde

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, x,y>0\right\}$$

descrito en la gráfica



usamos el cambio de coordenadas a polares

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

con

$$\det(J\varphi) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = r \Rightarrow |\det(J\varphi)| = r$$

luego, por el teorema anterior usando que

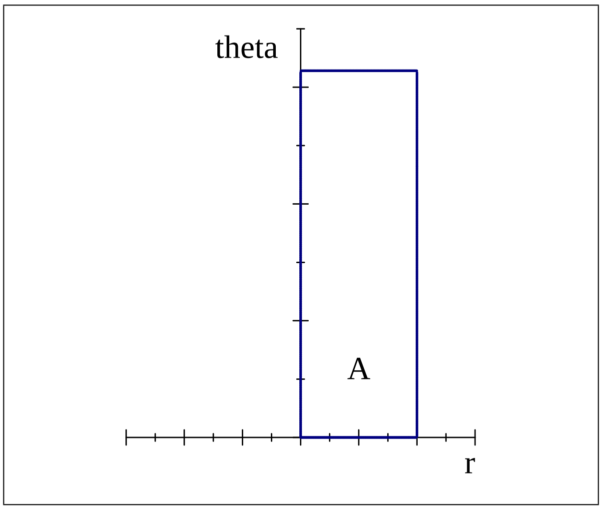
$$x^2 + y^2 = r^2$$

tendremos

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_A e^{-r^2} r dr d\theta$$

siendo

$$A = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$



luego

$$\iint_A e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r e^{-r^2} dr$$

e integrando primero respecto de r

$$\int_0^1 r e^{-r^2} dr = \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

y por tanto

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r e^{-r^2} dr = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

Ejemplo 6.16 *Calcula*

$$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} dxdy$$

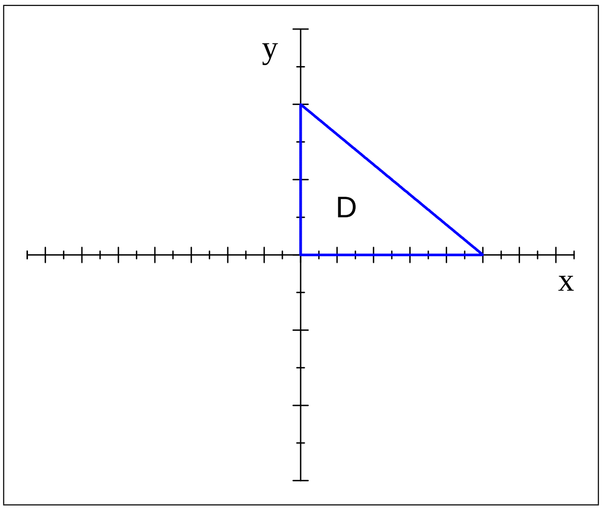
donde D es el triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$, realizando antes el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} \\ y &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

El conjunto D está definido como

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x + y \leq 1\right\}$$

que podemos representar gráficamente



Podemos comprobar que el cambio de variable indicado es válido

1. *Inyectividad*

$$\left(\frac{u_1+v_1}{2}, \frac{u_1-v_1}{2}\right) = \left(\frac{u_2+v_2}{2}, \frac{u_2-v_2}{2}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{u_2+v_2}{2} \Longleftrightarrow u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \\ \frac{u_1-v_1}{2} = \frac{u_2-v_2}{2} \Longleftrightarrow u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \end{cases}$$

   Sumando

$$2u_1 = 2u_2 \Rightarrow u_1 = u_2$$

   y restando

$$2v_1 = 2v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

2. *Obviamente es de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.*

3. *Y finalmente la matriz Jacobiana*

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

   tiene determinante no nulo.

Vamos a describir ahora el conjunto $A = \varphi(D)$ *con las nuevas coordenadas. Usando la definición de* D

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \Rightarrow 0 \leq \frac{u+v}{2} \Rightarrow 0 \leq u+v \Rightarrow -u \leq v \\ 0 &\leq y \Rightarrow 0 \leq \frac{u-v}{2} \Rightarrow 0 \leq u-v \Rightarrow v \leq u \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$-u \leq v \leq u$$

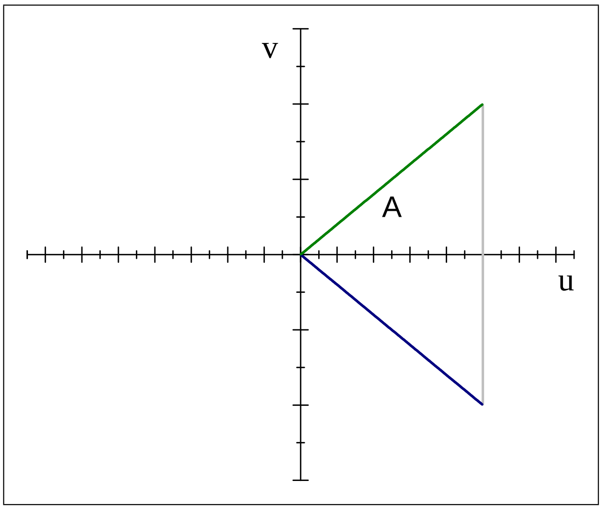
como además

$$0 \leq x+y \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \left(\frac{u+v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}\right) < 1 \Longrightarrow 0 \leq u \leq 1$$

y el conjunto A *estará definido como*

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, -u \leq v \leq u\right\}$$

que podemos representar gráficamente



Usando el teorema del cambio de variable

$$\iint_D e^{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)} dxdy = \iint_A e^{\left(\dfrac{x(u,v)-y(u,v)}{x(u,v)+y(u,v)}\right)} \left| \cdot \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| dudv,$$

donde

$$\frac{x(u,v)-y(u,v)}{x(u,v)+y(u,v)} = \frac{\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}}{\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}} = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{u}{2}} = \frac{v}{u}$$

por tanto

$$\iint_D e^{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)} dxdy = \iint_A e^{\dfrac{v}{u}} \frac{1}{2}\, dudv$$

y que podemos integrar facilmente aplicando el teorema de Fubini

$$\iint_A e^{\dfrac{v}{u}} \frac{1}{2} dudv = \int_0^1 du \int_{-u}^{u} e^{\dfrac{v}{u}} \frac{1}{2} dv$$

integrando primero respecto de v

$$\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \frac{1}{2} dv = \left[\frac{ue}{2}^{\frac{v}{u}} \right]_{v=-u}^{v=u} = \frac{ue}{2} - \frac{ue^{-1}}{2} = u \left(\frac{e - e^{-1}}{2} \right) = u \operatorname{Sh}(1)$$

y después respecto de u

$$\int_{0}^{1} du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \frac{1}{2} dv = \int_{0}^{1} (u \operatorname{Sh}(1))\, du = \left[\frac{u^2}{2} \operatorname{Sh}(1) \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{\operatorname{Sh}(1)}{2}$$

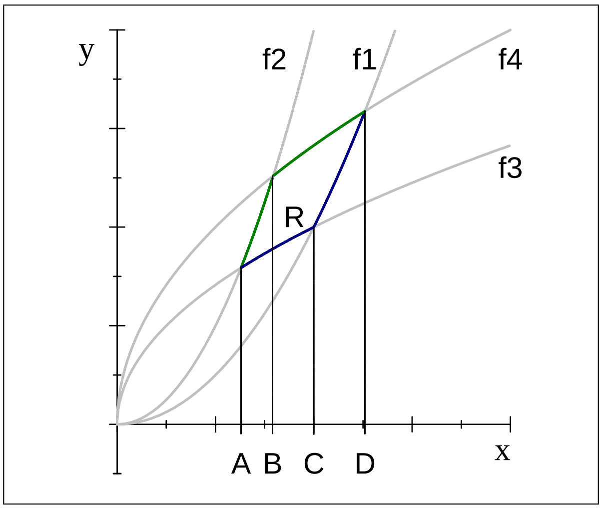
Ejemplo 6.17 *Calcula*

$$\iint_R dxdy$$

donde R *es la región del plano limitada por las gráficas* $f_1 : y = x^2, f_2 : y = 2x^2; f_3 : x = y^2, f_4 : x = \frac{y^2}{2}$. *Realiza la integral en coordenadas cartesianas y mediante el cambio de variable*

$$u = \frac{x^2}{y} \qquad y \qquad v = \frac{y^2}{x}$$

A continuación realizamos la representación del conjunto R



Podemos buscar los puntos de corte A, B, C *y* D*, descartando el origen que es común a todos*

$$\left\{ \begin{array}{c} x = y^2 \\ y = 2x^2 \end{array} \right. \Rightarrow x = y^2 = \left(2x^2\right)^2 = 4x^4 \Leftrightarrow x\left(4x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 2^{-2/3} \end{array} \right. \Leftrightarrow A = \left(2^{-2/3}, 2^{-1/3}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{y^2}{2} \\ y = 2x^2 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} = \frac{\left(2x^2\right)^2}{2} = 2x^4 \Leftrightarrow x\left(2x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 2^{-1/3} \end{array} \right. \Leftrightarrow B = \left(2^{-1/3}, 2^{1/3}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = y^2 \\ y = x^2 \end{array} \right. \Rightarrow x = y^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4 \Leftrightarrow x\left(x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow C = (1, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{y^2}{2} \\ y = x^2 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} = \frac{\left(x^2\right)^2}{2} = \frac{x^4}{2} \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 2^{1/3} \end{array} \right. \Leftrightarrow D = \left(2^{1/3}, 2^{2/3}\right)$$

Para usar el teorema de Fubini tenemos que tener en cuenta que la función que va por encima (verde) y por debajo (azul) depende del rango de valores de la x, viendo la gráfica podemos distinguir

$$\begin{aligned}
\iint_R dxdy &= \underbrace{\int_{2^{-2/3}}^{2^{-1/3}} dx \int_{f_3}^{f_2} dy}_{A\le x\le B} + \underbrace{\int_{2^{-1/3}}^{1} dx \int_{f_3}^{f_4} dy}_{B\le x\le C} + \underbrace{\int_{1}^{2^{1/3}} dx \int_{f_1}^{f_4} dy}_{C\le x\le D} \\
&= \int_{2^{-2/3}}^{2^{-1/3}} dx \int_{\sqrt{x}}^{2x^2} dy + \int_{2^{-1/3}}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} dy + \int_{1}^{2^{1/3}} dx \int_{x^2}^{\sqrt{2x}} dy \\
&= \int_{2^{-2/3}}^{2^{-1/3}} \left(2x^2 - \sqrt{x}\right) dx + \int_{2^{-1/3}}^{1} \left(\sqrt{2x} - \sqrt{x}\right) dx + \int_{1}^{2^{1/3}} \left(\sqrt{2x} - x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_{x=2^{-2/3}}^{x=2^{-1/3}} + \left[\frac{2^{3/2}x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_{x=2^{-1/3}}^{x=1} + \left[\frac{2^{3/2}x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2^{1/3}} \\
&= \frac{3-\sqrt{2^3}}{6} + \frac{3\sqrt{2}-4}{3} + \frac{3-\sqrt{2^3}}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Vamos a calcular la integral usando el cambio de variable indicado. Para encontrar el Jacobiano de este cambio de variable $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ usaremos el teorema de la función inversa, calculando primero el Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ y teniendo en cuenta que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0$$

por tanto

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)} = \frac{1}{3}$$

Usando el cambio, las nuevas variables cumplirán las siguientes igualdades

$$u = \frac{x^2}{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ y = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

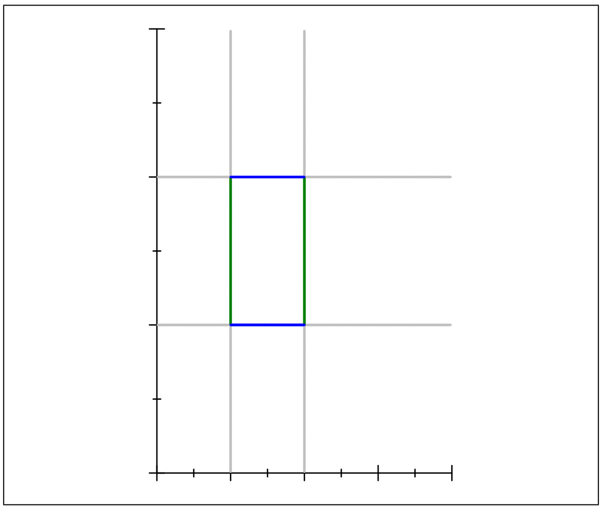
$$v = \frac{y^2}{x} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y^2}{x} = \frac{y^2}{y^2} = 1 \\ x = \frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y^2}{x} = \frac{y^2}{y^2/2} = 2 \end{cases}$$

y el nuevo conjunto estará definido por

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le u \le 1, 1 \le v \le 2\right\}$$

que como vemos en la siguiente gráfica es bastante más sencillo que el conjunto D original

©SPH



y usando el teorema de Fubini la integral sería

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \iint_A \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| dudv = \iint_A \frac{1}{3} dudv = \int_{1/2}^{1} du \int_1^2 \frac{1}{3} dv \\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3}(2-1)\, du = \frac{1}{3}(2-1)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

bastante más sencillo que con el sistema de coordenadas anterior.

6.4.1. Cambio de coordenadas polares

El cambio de coordenadas más habitual en integrales dobles es el cambio a coordenadas polares que ya hemos visto, y se utiliza especialmente cuando el dominio D es algún sector circular o la función del integrando es simétrica respecto al origen. Como sabemos este cambio viene dado por

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

de forma que el Jacobiano sería

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J)| = r$$

siendo el cambio en la integral dado por

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int d\theta \int_{D'} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot r\cdot dr$$

En la mayor parte de los casos se usará r como primera variable, de forma que la integral sería

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot r\cdot dr$$

Ejemplo 6.18 *Calcula*

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy$$

siendo D el conjunto limitado por la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1,$$

con paso a coordenadas polares. En coordenadas rectangulares el conjunto D estaría descrito por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

de forma que

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dy$$

La integral, aunque simple, es bastante laboriosa, sin embargo, si hacemos el cambio a polares, el dominio vendría expresado pot

$$A = \varphi(D) = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

La integral se transforma en

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy = \iint_D \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} dxdy = \iint_A \sqrt{4 - r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left(4 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

que respecto de r es inmediata

$$\int_0^1 r \left(4 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} dr = \left[-\frac{\left(4 - r^2\right)^{3/2}}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{(4-1)^{3/2}}{3} + \frac{(4-0)^{3/2}}{3} = \frac{8}{3} - \sqrt{3}$$

e integrando ahora respecto de θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left(4 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} - \sqrt{3}\right) d\theta = 2\pi \left(\frac{8}{3} - \sqrt{3}\right)$$

Para el caso de un dominio definido mediante circunferencias de tipo general centradas en un punto (α, β) y radio r de ecuación

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

se realizaría el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \alpha + r \cos\theta \\ y &= \beta + r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

mientras que el Jacobiano sería el mismo.

Si el recinto está definido mediante elipses de centro (α, β) y semiejes a y b, el cambio vendría dado por

$$\begin{aligned} x &= \alpha + ar \cos\theta \\ y &= \beta + br \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

siendo el jacobiano

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar \operatorname{sen}\theta \\ b\cos\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right)\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar \operatorname{sen}\theta \\ b\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta \end{pmatrix}\right| = \left|abr\cos^2\theta + abr \operatorname{sen}^2\theta\right| = a\,b\,r \end{aligned}$$

©SPH

Ejemplo 6.19 *Calcula*

$$\iint_D dxdy$$

siendo D *el conjunto limitado por la circunferencia*

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

con centro $(1, 0)$ *y radio* 1. *El cambio a coordenadas polares sería*

$$\begin{aligned} x - 1 &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Con este cambio, el dominio será

$$A = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

y la integral

$$\iint_D dxdy = \iint_A |\det J(r,\theta)|\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^1 d\theta = \pi.$$

Ejemplo 6.20 *Calcula*

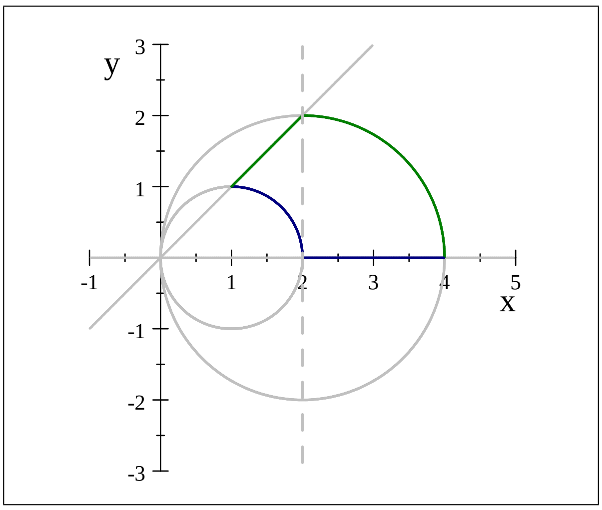
$$\iint_D dxdy$$

siendo D *el conjunto limitado por la circunferencia*

$$x^2 + y^2 = 2x, \qquad y \qquad x^2 + y^2 = 4x$$

y las rectas $y = x$, $y = 0$.

El conjunto está definido en la siguiente gráfica



©SPH

donde se puede comprobar que hay dos regiones: la primera con $1 \leq x \leq 2$, en el que la curva $y = x$ está por encima (verde), mientras que la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$, está por debajo (en azul y en este caso $y = \sqrt{2x - x^2}$). Y otra región con $2 \leq x \leq 4$, en el que la curva que va por encima es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4x$ (en este caso $y = \sqrt{4x - x^2}$) y la curva $y = 0$, va por debajo. La integral sobre D sería

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_1^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} dydx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dydx \\
&= \int_1^2 [y]_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=x} dx + \int_2^4 [y]_{y=0}^{y=\sqrt{4x-x^2}} dx \\
&= \int_1^2 \left(x - \sqrt{2x - x^2}\right) dx + \int_2^4 \left(\sqrt{4x - x^2}\right) dx \\
&= \int_1^2 xdx - \int_1^2 \sqrt{2x - x^2}dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2}dx
\end{aligned}$$

Calculamos cada integral por separado. La primera integral es directa

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Para la segunda y teniendo en cuenta que $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, hacemos el cambio $(x - 1) = \operatorname{sen} t$ con $dx = \cos t dt$ y $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$, mientras que los extremos de integración se obtienen para $t = 0$ (cuando $x = 1$) y $t = \frac{\pi}{2}$ (cuando $x = 2$)

$$\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

y para la tercera es similar, teniendo en cuenta que $4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$, hacemos el cambio $(x - 2) = 2 \operatorname{sen} t$ con $dx = 2 \cos t dt$ y $4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4 - 4 \operatorname{sen}^2 t = 4 \cos^2 t$, mientras que los extremos de integración se obtienen para $t = 0$ (cuando $x = 2$) y $t = \frac{\pi}{2}$ (cuando $x = 4$)

$$\int_2^4 \sqrt{4x - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 t}\,(2\cos t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = 4\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi$$

y la integral sería

$$\iint_D dxdy = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi + 6}{4} = \frac{3}{4}(\pi + 2)$$

Si se hace el cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

entonces podemos comprobar que el ángulo θ debe cumplir

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

mientras que para el radio, que depende de θ, se cumple

$$2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta$$

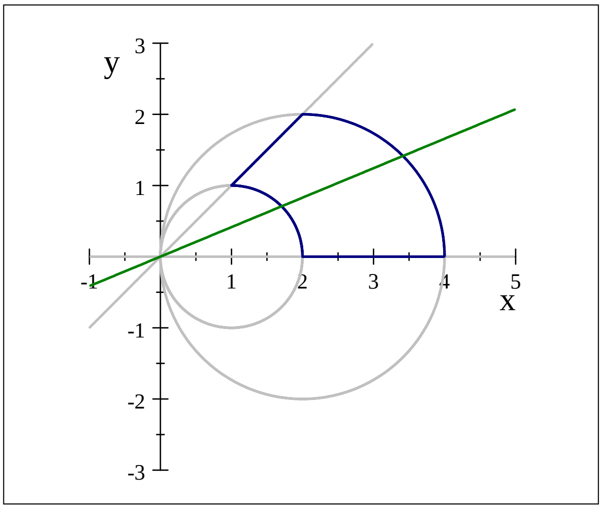
©SPH

y el dominio con estas nuevas variables viene definido por

$$A = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\cos\theta \leq r \leq 4\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

y la integral

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \iint_A |\det J(r,\theta)|\, drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=2\cos\theta}^{r=4\cos\theta} d\theta = \\
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left[16\cos^2\theta - 4\cos^2\theta \right] d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3(1+\cos 2\theta)\, d\theta = 3\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \\
&= 3\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{3\pi+6}{4}.
\end{aligned}$$



6.5. Cambio de variable para integrales triples

Como en el caso de dos variables, es posible realizar cambios de variable en integrales triples.

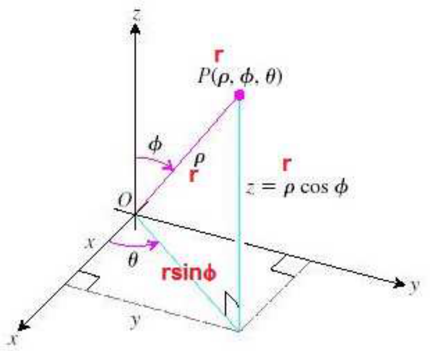
Definición 6.11 *Se dice que la aplicación $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es un cambio de variable si cumple:*

1. *φ es inyectiva.*
2. *$\varphi \in \mathcal{C}^1(A)$.*
3. *La matriz Jacobiana de φ es no singular, es decir*

$$\det(J\varphi(u,v,w)) \neq 0, \; \forall (u,v,w) \in A$$

Observación 6.2 *Normalmente los cambios de variable se representan como*

$$\begin{aligned}
x &= x(u,v,w) \\
y &= y(u,v,w) \\
z &= z(u,v,w)
\end{aligned}$$



y la matriz Jacobiana como

$$\frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial yz}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Teorema 6.11 (Cambio de variable en integral triple) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ y $V = \varphi(A)$, siendo $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, un cambio de variable. Sea $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable. Si denotamos por*

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1 (u,v,w) \\ y &= \varphi_2 (u,v,w) \\ z &= \varphi_3 (u,v,w) \end{aligned}$$

entonces la función

$$(f \circ \varphi) \cdot |\det (J\varphi)|$$

es integrable en A y además se cumple la fórmula del cambio de variable

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_A (f \circ \varphi)(u,v,w) \left|\det (J\varphi (u,v,w))\right| dudvdw$$

6.5.1. Cambio a coordenadas esféricas

Uno de los cambios de coordenadas más habituales en integrales triples es el cambio a coordenadas esférica que viene dado por el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}$$

y se emplea habitualmente caundo en la frontera del dominio V intervienen superficies esféricas y cónicas del eje OZ.de forma que el Jacobiano sería

$$J = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} \Rightarrow |\det (J)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

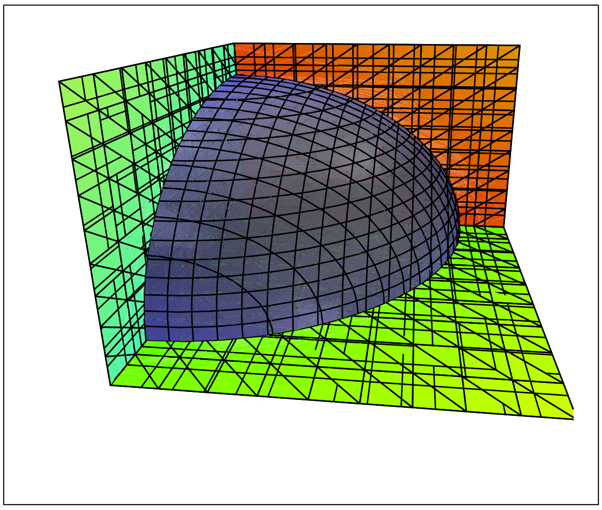
y el cambio en la integral viene dado por

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_A f(r\operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi) \cdot r^2 \operatorname{sen}\phi \cdot drd\theta d\phi$$

Ejemplo 6.21 *Calcula*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

siendo V el volumen de la parte de las esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, contenido en el primer octante. La representación gráfica del conjunto sería



El conjunto en coordenadas esféricas esta definido como

$$A = \left\{ (r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

por tanto

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_A r\left(r^2 \operatorname{sen}\phi\right) drd\theta d\phi = \iiint_A r^3 \operatorname{sen}\phi drd\theta d\phi$$

y usando el teorema de Fubini

$$\iiint_A r^3 \operatorname{sen}\phi drd\theta d\phi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi d\phi \int_0^1 r^3 dr$$

Integramos en r

$$\int_0^1 r^3 dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{4}$$

de forma que

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi d\phi \int_0^1 r^3 dr = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \operatorname{sen}\phi d\phi$$

si ahora integramos respecto a ϕ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \operatorname{sen}\phi d\phi = \left[-\frac{1}{4}\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{1}{4}$$

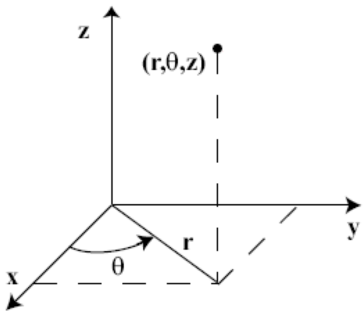
de forma que

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \operatorname{sen}\phi d\phi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

por tanto

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{\pi}{8}.$$

©SPH



6.5.2. Cambio a coordenadas cilíndricas

Otro de los cambios de coordenadas más habituales en integrales triples es el cambio a coordenadas cilíndircas que viene dado por el cambio

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z & = & z \end{array}$$

y se emplean frecuentemente cuando volúmenes cuyas fronteras están determinadas por volúmenes de revolución de eje OZ.de forma que el Jacobiano sería

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow|\det(J)|=r$$

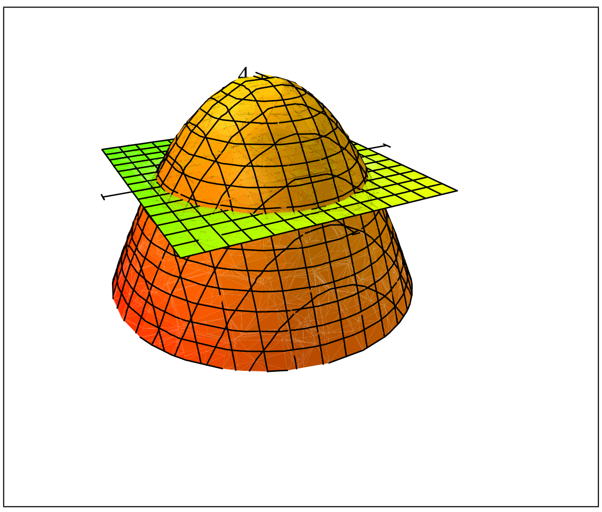
y el cambio en la integral viene dado por

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_A f(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,z)\cdot r\cdot drd\theta dz$$

Ejemplo 6.22 *Calcula*

$$\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

siendo V el volumen limitado por las curvas $z=0$ y $z=4-x^2-y^2$. En la siguiente gráfica vemos una representación del conjunto, siendo la parte del paraboloide que está por encima del plano $z=0$.



©SPH

El conjunto en coordenadas cartesianas estaría definido por:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4; \ -\sqrt{4-z} \le x \le \sqrt{4-z}; -\sqrt{4-z-x^2} \le y \le \sqrt{4-z-x^2} \right\}$$

mientras que el conjunto en coordenadas cilíndricas estaría definido como

$$A = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \theta \le 2\pi; \ 0 \le z \le 4; \ 0 \le r \le \sqrt{4-z} \right\}$$

por tanto

$$\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy\, dz = \iiint_A \frac{z}{r} r\, dr\, d\theta\, d\phi = \iiint_A z\ dr\, dz\, d\theta$$

y usando el teorema de Fubini

$$\iiint_A z\ dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{4-z}} z\ dr$$

Integramos en r

$$\int_0^{\sqrt{4-z}} z\ dr = [zr]_{r=0}^{r=\sqrt{4-z}} = z\sqrt{4-z}$$

de forma que

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{4-z}} z\ dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 z\sqrt{4-z} dz$$

Para realizar la integral respecto de z, hacemos cambio

$$4 - z = t^2 \Rightarrow z = 4 - t^2 \ y \ dz = -2t dt$$

la integral queda

$$-2\int \left(4-t^2\right) t^2 dt = 2\int \left(t^4 - 4t^2\right) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{8}{3}t^3 = \frac{2}{5}(4-z)^{5/2} - \frac{8}{3}(4-z)^{3/2}$$

por tanto

$$\int_0^4 z\sqrt{4-z} dz = \left[\frac{2}{5}(4-z)^{5/2} - \frac{8}{3}(4-z)^{3/2}\right]_{z=0}^{z=4} = -\left(\frac{2}{5}4^{5/2} - \frac{8}{3}4^{3/2}\right) = -\left(\frac{2^6}{5} - \frac{2^6}{3}\right) = \frac{128}{15}$$

si ahora integramos respecto a θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 z\sqrt{4-z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{128}{15} d\theta = \frac{256\pi}{15}$$

por tanto

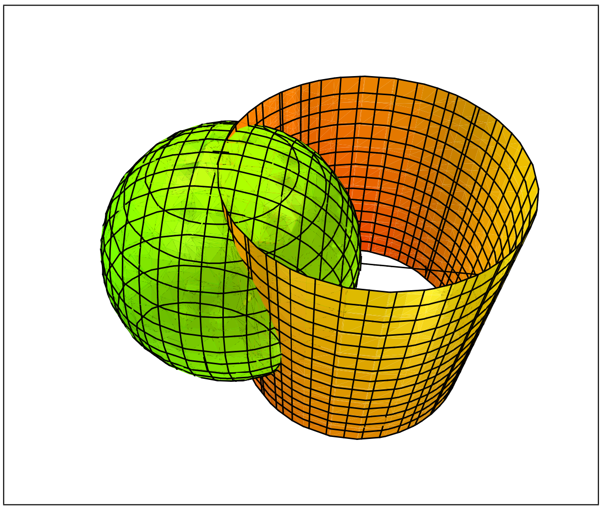
$$\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy\, dz = \frac{256\pi}{15}.$$

Ejemplo 6.23 *Calcula*

$$\iiint_V dx\, dy\, dz$$

siendo V el volumen limitado por la región del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ que es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En la siguiente gráfica vemos una representación del conjunto,

©SPH



La ecuación del cilindro se puede poner como

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

La esfera en cartesianas sería

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2-z^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

mientras que el cilindro, también en cartesianas, sería

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1; 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2}; -1 \le z \le 1\right\}$$

La intersección entre E y C es

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1; 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2-z^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

donde para los intervalos de cada variable se ha tomado el mayor de los extremos inferiores como extremo inferior y al menor de los extremos superiores como extremo superior

$$\min\left\{1+\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right\} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\max\left\{1-\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\right\} = 1-\sqrt{1-x^2}$$

en cartesianas implicaría calcular la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

En coordenadas cilíndricas

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le R\cos\theta \le 1; 1-\sqrt{1-R^2\cos^2\theta} \le R\,\mathrm{sen}\,\theta \le \sqrt{1-R^2\cos^2\theta}; -\sqrt{1-R^2} \le z \le \sqrt{1-R\right.$$

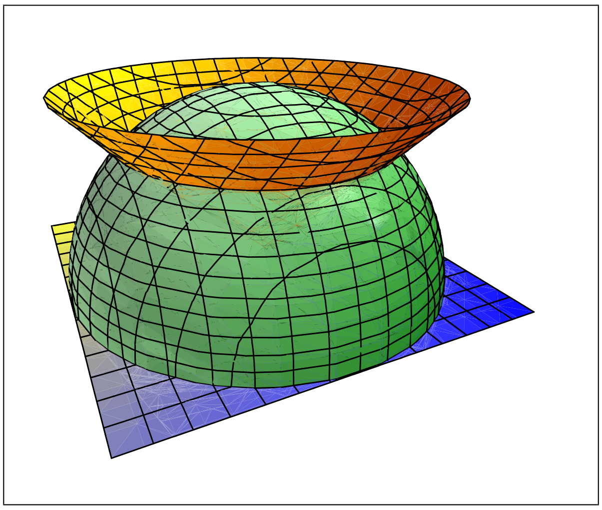
Ejemplo 6.24 *Calcula*

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

siendo V la región definida como

$$V\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z^2; \quad x^2+y^2+z^2 \le 1; \quad z \ge 0\right\}$$

En la siguiente gráfica vemos una representación del conjunto,



Calculamos la intersección de las dos superficies

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=z^2 \\ \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z^2=1 \Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

como $z \geq 0$, tenemos que usar $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y el corte entre las dos superficies es el círculo

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

Está claro que la variable z cumple

$$0 \leq z \leq 1$$

Si ocurre $0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces estamos dentro de la porción de paraboloide que hay dentro de la esfera, es decir se cumple $x^2+y^2 \leq z^2$, por tanto podemos tomar

$$-z \leq x \leq z$$

mientras que para y se debe cumplir

$$-\sqrt{z^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2-x^2}$$

La integral en este conjunto es

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_{-z}^{z} dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} z dy$$

Si ocurre $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1$, entonces estaremos en la esfera que cae dentro del paraboloide, es decir se cumple, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, por tanto podemos tomar

$$-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$$

mientras que para y se debe cumplir

$$-\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}$$

y la integral en este caso es

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} zdy$$

No obstante si utilizamos coordenadas cilíndricas, entonces, se simplifican bastante los resultados. En el primer conjunto, en el paraboloide dentro de la esfera, se cumple $x^2 + y^2 \leq z^2$*, en coordenadas cilíndricas equivale a* $0 \leq r \leq z$ *y tendremos*

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq z \end{aligned}$$

y la integral sería

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_0^z zrdr$$

$$\int_0^z zrdr = \left[z\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=z} = \frac{z^3}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_0^z zrdr = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{z^3}{2}dz = \left[\frac{z^4}{8}\right]_{z=0}^{z=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{32}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_0^z zrdr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{32}d\theta = \frac{\pi}{16}$$

mientras que en el segundo conjunto, en la esfera dentro del paraboloide, se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ *y en coordenadas cilíndricas equivale a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq z \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

siendo la integral

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} zrdr$$

$$\int_0^{\sqrt{1-z^2}} zrdr = \left[z\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} = \frac{z\left(1-z^2\right)}{2} = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} zrdr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2}dz = \left[\frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{8}\right]_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{z=1} = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right] - \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{32}\right] = \frac{1}{8} - \frac{3}{32} = \frac{1}{32}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz \int_0^z zrdr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{32}d\theta = \frac{\pi}{16}$$

©SPH

6.6. Aplicaciones de la integral múltiple

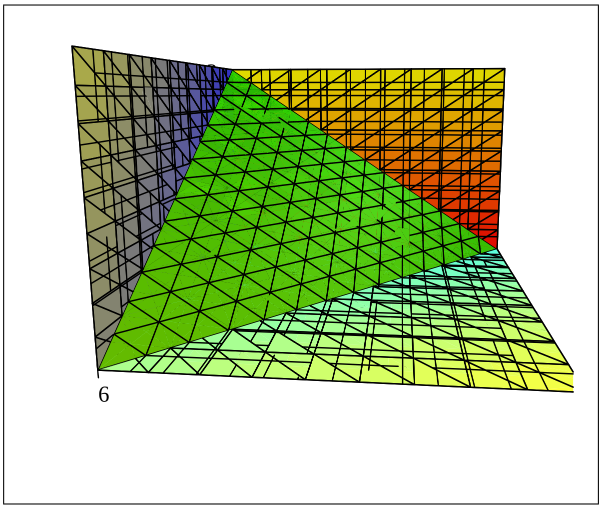
6.6.1. Integral doble

Cálculo del volumen bajo una superficie

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, acotada y positiva en D, el volumen limitado por esa superficie y el plano OXY viene dado por la integral doble

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

Ejercicio 6.1 *Obtén el volumen de la piramide limitada por los planos coordenados y el plano* $x + 2y + 3z = 6$. *(Solución: 6)*



La piramide corta en los ejes coordenados con los puntos $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ *y* $(0, 0, 2)$. *Fijamos el valor* x, *está claro que* $0 \leq x \leq 6$. *Si tomamos* $z = 0$, *entonces debe cumplirse* $x + 2y = 6$ *y como* $x \in [0, 6]$ *debe ocurrir que* $y = \frac{1}{2}(6 - x) \in [0, 3]$, *luego debe cumplirse*

$$0 \leq y \leq \frac{1}{2}(6 - x)$$

y para z *debe cumplirse*

$$0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$$

Luego el dominio V *puede definirse como*

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(6 - x); 0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - x - 2y) \right\}$$

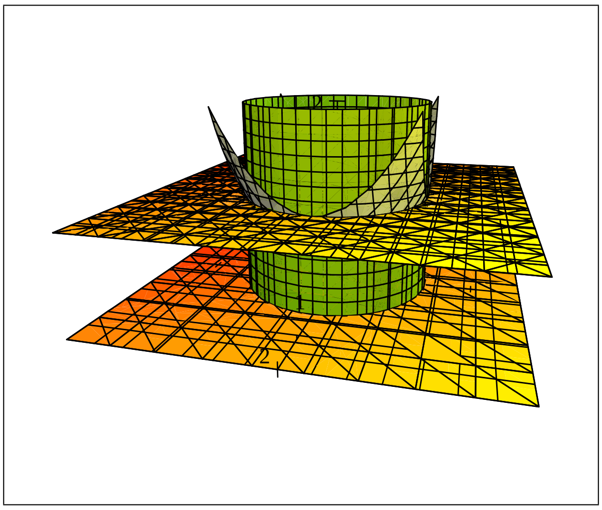
©SPH

Para calcular el volumen debemos calcular la integral triple sobre el conjunto

$$\begin{aligned}
\iiint_V dxdydz &= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} dy \int_0^{\frac{1}{3}(6-x-2y)} dz = \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} dy \, [z]_{z=0}^{z=\frac{1}{3}(6-x-2y)} \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} \frac{1}{3}(6-x-2y)\, dy \\
&= \int_0^6 dx \left[\frac{1}{3}\left(6y - xy - y^2\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}(6-x)} \\
&= \int_0^6 \left(\frac{1}{3}\left(6\left(\frac{1}{2}(6-x)\right) - x\left(\frac{1}{2}(6-x)\right) - \left(\frac{1}{2}(6-x)\right)^2\right)\right) dx \\
&= \int_0^6 \frac{1}{12}(x-6)^2\, dx = \left[\frac{(x-6)^3}{36}\right]_{x=0}^{x=6} = \left[\frac{(6-6)^3}{36}\right] - \left[\frac{(0-6)^3}{36}\right] = \frac{6^3}{6^2} = 6.
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.2 *Halla el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2+y^2$, el cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano OXY. (Solución: $\frac{\pi}{2}$).*

El conjunto está representado en la siguiente figura



Se pide

$$\iiint_D dxdydz$$

La intersección entre el paraboloide y el cilindro es

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ \\ x^2+y^2 = z \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1$$

mientras que el plano OXY tiene de ecuación $z = 0$, por tanto podemos poner $0 \leq z \leq 1$. Una vez que se fija el valor de z, entonces dClaramente la variable donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

©SPH

Ejercicio 6.3 *Halla el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = xy$, el plano OXY y los cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. (Solución: $\frac{3\pi}{4}$)*

Cálculo del área de recintos planos

Para una región plana D comprendida entre dos curvas, se cumple

$$\text{Área}(D) = \iint_D dxdy$$

Cálculo del volumen de un cuerpo

Para hallar el volumen se utiliza la integral triple

$$\text{Volumen}\,(V) = \iiint_V dxdydz$$

©SPH