# Capítulo 5

# Aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables

En este capítulo vamos a extender al caso multivariable los resultados visto en el cálculo diferencial de una variable sobre polinomio de Taylor y extremos de funciones.

Recordemos que para el caso de una variable: Si $f \in \mathcal{C}^m(I)$ y $x_0 \in I$; entonces podíamos construir el polinomio de Taylor de orden $m$ como

$$T_m f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m,$$

junto con el resto en la forma de Taylor

$$T_m f(x; x_0) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m)}(\xi)(x - x_0)^{m+1}.$$

Para el caso de $n$ variables tenemos una expresión parecida.

## 5.1. Polinomio de Taylor para funciones de varias variables

### 5.1.1. Polinomio de Taylor de orden 1: el plano tangente.

**Definición 5.1** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $A$ abierto. Supongamos que $f$ tiene derivadas parciales hasta el orden 1 en $A$ y sea $\vec{a} \in A$, definimos el polinomio de Taylor de orden 1 en $\vec{a}$, o centrado en $\vec{a}$, a la función definida por*

$$T_1 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})(x_i - a_i) = f(\overrightarrow{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a})(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})(x_n - a_n),$$

*Usando la definición de gradiente de $f$ podemos poner*

$$T_1 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}).$$

*Como caso particular para una función de dos variables el polinomio de Taylor para $f(x, y)$ en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sería*

$$T_1 f((x, y), (a, b)) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Esta expresión es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$, que se denomina *plano tangente* a $f(x,y)$ en el punto $(a,b)$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = f(a,b) + \nabla f(a,b)\cdot(x-a, y-b)$$

**Ejemplo 5.1** *Calcula el plano tangente a la función* $f(x,y) = 14 - x^2 - y^2$ *en los puntos* $(1,2)$ *y* $(0,0)$.

*Necesitaremos las derivadas parciales de* $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

*Y para el punto* $(1,2)$ *tendremos*

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 14 - 1 - 4 = 9 \\ \nabla f(1,2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right) = (-2,-4) \end{aligned}$$

*luego el plano tangente vendría dado por*

$$\begin{aligned} z &= T_1 f(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1, y-2) = 9 + (-2,-4)\cdot(x-1,y-2) = \\ &= 9 - 2(x-1) - 4(y-2) \\ &= 19 - 4y - 2x \end{aligned}$$

*La ecuación del plano tangente sería en forma implícita*

$$2x + 4y + z = 19$$

*En la gráfica 5.1 podemos comprobar gráficamente como el plano es tangente a la superficie definida por* $f(x,y)$

*Para el punto* $(0,0)$ *se procede de la misma forma, evaluando cada función en ese punto:*

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 14 \\ \nabla f(0,0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = (0,0) \end{aligned}$$

*y el plano tangente vendría dado por*

$$T_2 f(x,y) = 14 \Rightarrow z = 14.$$

*que es un plano constante y que podemos ver en la gráfica 5.2*

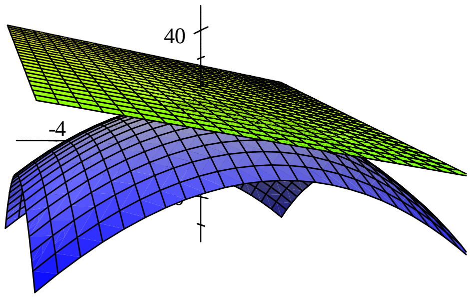



Figura 5.1: Plano tangente a la función $f(x, y) = 14 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 2)$

### 5.1.2. Polinomio de Taylor de orden 2

**Definición 5.2** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $A$ abierto. Supongamos que $f$ tiene derivadas parciales hasta el orden 2 en $A$ y sea $\vec{a} \in A$, definimos el polinomio de Taylor de orden 2 en $\vec{a}$ o centrado en $\vec{a}$, a la función definida por*

$$T_2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

*que usando las expresiones del Gradiente y del Hessiano de $f$ en el punto $\vec{a}$ se puede expresar como*

$$T_2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \nabla f(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) + \frac{1}{2!}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})^T Hf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$$

*donde*

$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})^T Hf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

*Claramente, el polinomio de Taylor de orden 2 se obtiene a partir del polinomio de Taylor de orden 1 al que le añadimos el término correspondiente a las segundas derivadas*

$$T_2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = T_1 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) + \frac{1}{2!}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})^T Hf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$$

Por clarificar la expresión dada, veremos como queda para una función de 2 variables, es decir, para $n = 2$

$$T_2 f((x, y), (a, b)) = f(a, b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x - a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y - a)$$

$$+ \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x - a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}(x - a)(y - b) + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y - b)^2\right)$$

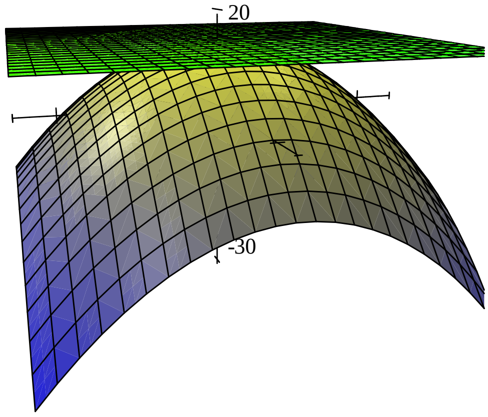



Figura 5.2: Plano tangente a la función $f(x,y) = 14 - x^2 - y^2$ en el punto $(0,0)$

Si las derivadas parciales segundas son continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_y \partial x}(a,b)$$

y por tanto

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a)$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$

o bien en forma matricial quedaría como

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \nabla f(a,b)\cdot(x-a,y-b) + \frac{1}{2}(x-a,y-b)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 5.2** *Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en* $(0,0)$ *para* $f(x,y) = \left(x^2 - 3x\right)e^{y^2}$. *Necesitamos las derivadas parciales primeras y segundas*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-3)\,e^{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y(2x-3)\,e^{y^2} \end{cases} \\[6ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(x^2-3x\right)e^{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y(2x-3)\,e^{y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(2\left(x^2-3x\right) + 4y^2\left(x^2-3x\right)\right)e^{y^2} \end{cases} \end{cases}$$

*Notar que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, *de forma que*

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left( (2x-3)\, e^{y^2}, 2y\left(x^2-3x\right) e^{y^2} \right) \\
Hf(x,y) &= \begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 2y(2x-3)\, e^{y^2} \\ 2y(2x-3)\, e^{y^2} & \left(2\left(x^2-3x\right)+4y^2\left(x^2-3x\right)\right) e^{y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*Evaluamos todas las funciones en el punto* $(0,0)$

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
\nabla f(0,0) &= (-3,0) \\
Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*Con estos valores, el polinomio de Taylor de orden* 2 *buscado será*

$$\begin{aligned}
T_2 f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0) + \frac{1}{2}(x-0, y-0)\, Hf(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
&= (-3,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= -3x + x^2
\end{aligned}$$

*En la grafica 5.3 podemos ver cómo cerca del punto* $(0,0)$ *ambas funciones son my parecidas*

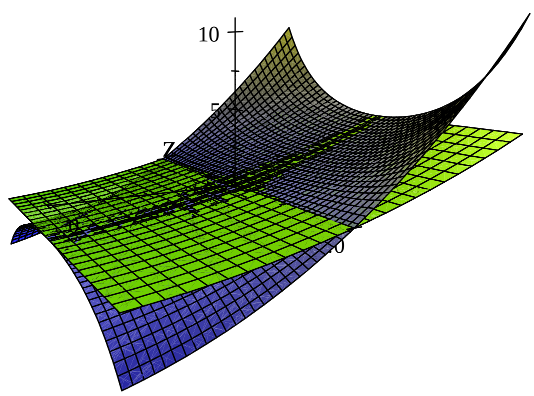



Figura 5.3: Polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = \left(x^2-3x\right) e^{y^2}$ en el punto $(0,0)$.

**Ejemplo 5.3** *Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en* $(1,1,0)$ *para la función* $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - ze^x$. *La expresión del polinomio de orden 2 en* $(1,1,0)$ *sería*

$$T_2 f(x,y,z) = f(1,1,0) + \nabla f(1,1,0)\cdot(x-1,y-1,z) + \frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\,Hf(1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

*Calculamos las derivadas parciales primeras y segundas*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y} - ze^x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -ze^x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -e^x \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2x}{y^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -e^x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -e^x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

*De forma que*

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{y} - ze^x, -\frac{x}{y^2}, -e^x\right)$$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -ze^x & -\frac{1}{y^2} & -e^x \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & 0 \\ -e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*y evaluamos todas las funciones en el punto* $(1,1,0)$'

$$f(1,1,0) = 1$$

$$\nabla f(1,1,0) = (1,-1,-e)$$

$$Hf(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Sustituimos estos valores en la expresión del polinomio de Taylor de segundo orden para obtener*

$$\begin{aligned}
T_2 f(x,y,z) &= f(1,1,0) + \nabla f(1,1,0)(x-1,y-1,z) + \frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\,Hf(1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \\
&= 1 + (1,-1,-e)(x-1,y-1,z) + \frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \\
&= 1 + ((x-1)-(y-1)-ez) + \frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix} 1-y-ze \\ -x+2y-1 \\ e(1-x) \end{pmatrix} \\
&= 1 + x - y - ez + \left(x - y + ze - xy + y^2 - xze\right) \\
&= 1 + 2x - 2y - xy + y^2 - xze.
\end{aligned}$$

### 5.1.3. Polinomio de Taylor de orden $n$

Los polinomios vistos en el apartado anterior son casos particulares del caso general del polinomio de Taylor de orden $n$, que viene dado por la siguiente definición.

**Definición 5.3** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $A$ abierto. Supongamos que $f$ tiene derivadas parciales hasta el orden $n$ en $A$ y sea $\vec{a} \in A$. Sea $\vec{a} \in A$, definimos el polinomio de Taylor de orden $n$ en $\vec{a}$, o centrado en $\vec{a}$, a la función definida por*

$$\begin{aligned}
T_n f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) &= f(\overrightarrow{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{m!}\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(\overrightarrow{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2})\cdots(x_{i_m} - a_{i_m}).
\end{aligned}$$

*Se trata de una función polinomial de grado $n$ y por su construcción está claro que*

$$T_n f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = T_{n-1} f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) + \frac{1}{m!}\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(\overrightarrow{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2})\cdots(x_{i_m} - a_{i_m})$$

Veremos un ejemplo práctico para calcular un polinomio de Taylor de orden $n = 3$.

**Ejemplo 5.4** *Halla el polinomio de Taylor de grado tres para la función $f(x,y) = x^y$ en un entorno del punto $(a,b) = (1,1)$. Usa este desarrollo para calcular de forma aproximada el valor de $1{,}1^{1{,}02}$.*

*Necesitaremos las derivadas parciales primeras, segundas y terceras.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x) \end{cases} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y (\ln x)^2 \end{cases} \end{cases}$$

*Notar que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ *para las derivadas cruzadas de orden* 2 *y también ocurrirá lo mismo para todas las derivadas terceras*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = x^{y-2}\left(2y + y^2 \ln x - y\ln x - 1\right) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = x^{y-1}(2 + y\ln x)\ln x \end{aligned}$$

*mientras que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= y(y-1)(y-2)x^{y-3} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= x^y (\ln x)^3 \end{aligned}$$

*Si ahora evaluamos todas las funciones en el punto* $(1,1)$*, tendremos*

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \\ \nabla f(1,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (1,0) \end{aligned}$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*y para las terceras derivadas*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(1,1) = 1 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,1) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,1) = 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) &= 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1) &= 0
\end{aligned}$$

*Sustuimos estos valores en la expresión del polinomio de Taylor de orden 3*

$$T_3 f(x,y) = f(1,1) + \left(\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1)\right) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}(x-1)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y}(x-1)(y-1) + \tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}(y-1)^2\right)$$

$$+\tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}(x-1)^3 + 3\tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2 \partial y}(x-1)^2(y-1) + 3\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y^2}(x-1)(y-1)^2 + \tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}(y-1)^3\right)$$

*Y usando los valores obtenidos*

$$T_3 f(x,y) = 1 + (1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-1)) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot 1\cdot(x-1)(y-1) + 0\cdot(y-1)^2\right)$$

$$+\tfrac{1}{3!}\left(0\cdot(x-1)^3 + 3\cdot 1\cdot(x-1)^2(y-1) + 3\cdot 0\cdot(x-1)(y-1)^2 + 0\cdot(y-1)^3\right)$$

*obteniéndose el valor del polinomio*

$$\begin{aligned}
T_3 f(x,y) &= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) \\
&= \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

*que como vemos es de grado* 3.

*Ahora podemos calcular el valor* $1{,}1^{1{,}02}$. *Para ello tenemos que el polinomio se ha obtenido en el punto* $(1,1)$

$$1{,}1^{1{,}02} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1{,}1 \\ y = 1{,}02 \end{array}\right. \Rightarrow T(1{,}1, 1{,}02) = \frac{1}{2} + 1{,}1 - \frac{1}{2}(1{,}02) + \frac{1}{2}(1{,}1)^2(1{,}02) - \frac{1}{2}(1{,}1)^2 = 1{,}1021$$

## 5.2. Máximos y mínimos de funciones de varias variables

En esta sección se introducen técnicas básicas para resolver problemas elementales de optimización matemática. Optimizar una función es encontrar los valores máximos y mínimos que toma dentro de un determinado conjunto. Según el conjunto en el que se buscarán los máximos y mínimos de la función distinguiremos problemas de optimización sin restricciones, problemas de optimización con restricciones de igualdad y problemas de optimización sobre compactos.

**Definición 5.4** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de $n$ variables, sea $\overrightarrow{a} \in A$.*

1. *Diremos que $f$ tiene un* mínimo relativo o local en $\overrightarrow{a} \iff \exists\varepsilon > 0 : f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x}), \forall\overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a},\varepsilon) \cap A \iff \exists\varepsilon > 0; \forall\overrightarrow{x} \in A$ *con* $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x})$.

2. *Diremos que $f$ tiene un* máximo relativo o local en $\overrightarrow{a} \iff \exists\varepsilon > 0 : f(\overrightarrow{a}) \geq f(\overrightarrow{x}), \forall\overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a},\varepsilon) \cap A \iff \exists\varepsilon > 0; \forall\overrightarrow{x} \in A$ *con* $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x})$.

3. *Diremos que $f$ tiene un* mínimo absoluto o global en $\overrightarrow{a} \iff f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x}), \forall\overrightarrow{x} \in A$.

4. *Diremos que $f$ tiene un* máximo absoluto o global en $\overrightarrow{a} \iff f(\overrightarrow{a}) \geq f(\overrightarrow{x}), \forall\overrightarrow{x} \in A$.

Un punto que es máximo o mínimo de una función se dice que es un *extremo* de la función, y puede ser local o global.

¿Cómo podemos calcular estos extremos? Si la función tiene, por ejemplo, un mínimo, debería suceder que en cualquier dirección en la que nos moviéramos a partir de ese punto la función debería aumentar su valor, al menos localmente.

### 5.2.1. Problemas sin restricciones

Buscamos condiciones para encontrar los extremos locales de una función sobre todo su dominio que supondremos un conjunto abierto, aunque en caso contrario, siempre podemos considerar su interior.

**Teorema 5.1 (Condición necesaria de primer orden)** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f$ diferenciable en $\overrightarrow{a} \in A$. Si la función $f$ tiene un extremo relativo en $\overrightarrow{a}$, entonces debe ocurrir*

$$df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = 0; \forall\overrightarrow{x} \in A$$

*Se deduce directamente que si $f \in \mathcal{C}^1(A)$, entonces como $df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x})$ y la condición necesaria es equivalente a:*

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = 0$$

**Definición 5.5** *Un punto $\overrightarrow{a} \in A$ que cumple la condición necesaria de primer orden se denomina* punto crítico.

La ecuación anterior es una ecuación vectorial y equivale a que cada derivada parcial de $f$ se anule en el punto $\overrightarrow{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = 0, \forall k = 1, \ldots, n$$

Las soluciones de este sistema son los posibles candidatos para ser extremo (máximo o mínimo).

Por último, indicar que el teorema es una condición necesaria, en el sentido de que un punto que no la cumpla, no puede ser extremo; pero por otra parte que un punto cumpla la condición no significa que sea extremo, exactamente como pasaba en el caso de las funciones de una variable.

**Definición 5.6** *Un punto crítico de una función $f$ que no es un extremo se denomina* punto de silla *y verifica que respecto a una determinada dirección es un mínimo relativo y con respecto a otra, es un máximo relativo. ¿Te suena la imagen de la figura 5.4?*

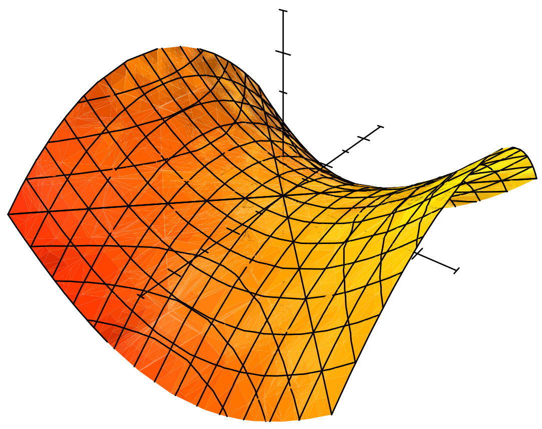


Figura 5.4: Punto de silla. Mientras que en la dirección del eje $OX$ hay un máximo en el origen, en la dirección del eje $OY$ se trata de un mínimo.

**Ejemplo 5.5** *Vamos a calcular los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2,$$

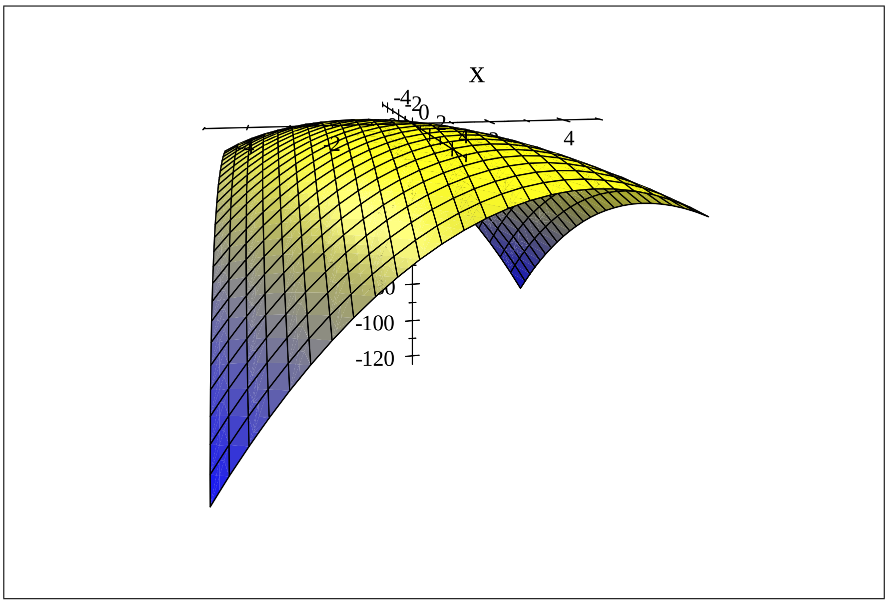
*para ello plantearemos el sistema* $\nabla f(x,y) = 0$*, es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longrightarrow -2x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow 2x - 4y = 0$$

*En este caso es un sistema lineal que tiene por solución única el punto* $(0,0)$*, luego este es el único punto crítico.*

$$-x^2 + 2xy - 2y^2$$



*Notar que la función $f$ se puede expresar como*

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 = -\left((x-y)^2 + y^2\right)$$

*luego siempre se cumple $f(x,y) \leq 0$, el máximo se alcanza en aquellos puntos donde se cumpla $f(x,y) = 0$, es decir,*

$$-\left((x-y)^2 + y^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y = 0 \\ \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0$$

*es decir, el máximo se alcanza en el punto $(0,0)$ que como vemos es el único punto crítico de $f(x,y)$.*

**Ejemplo 5.6** *Vamos a calcular los puntos críticos de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 2z + 2yz - 3$$

*Para ello, planteamos el sistema $\nabla f(x,y,z) = 0$, es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2x - 2z = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2y + 2z = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 8z - 2x + 2 + 2y = 0$$

*Cuya solución se obtiene fácilmente, ya que de la primera ecuación $x = z$ y de la segunda $y = -z$. Estas igualdades llevadas a la última ecuación la transforman en*

$$8z - 2z + 2 - 2z = 0 \Rightarrow 4z = -2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

*y por tanto*

$$x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

*El único punto crítico es*

$$\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ya hemos comentado, que como pasaba en una variable, esta condición es necesaria, pero no suficiente. Sin embargo este resultado nos ayuda para calcular los extremos relativos puesto que nos da los candidatos a ser extremo. Necesitamos una condición suficiente para decidir si un punto crítico dado es un extremo y también como en el caso de una variable, tenemos que recurrir a las segundas derivadas.

**Teorema 5.2 (Condiciones suficientes de segundo orden)** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ y $\overrightarrow{a} \in A$ un punto crítico de $f$. Sea la sucesión de menores principales asociados al Hessiano de $f$, es decir, sea*

$$\Delta_1 f(\overrightarrow{a}), \Delta_2 f(\overrightarrow{a}), \ldots, \Delta_n f(\overrightarrow{a})$$

*siendo*

$$\Delta_k f(\overrightarrow{a}) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\overrightarrow{a}) \end{array} \right|$$

*entonces:*

1. *Si* $\Delta_k f(\overrightarrow{a}) > 0$, $\forall k \Rightarrow \overrightarrow{a}$ *es un mínimo relativo estricto.*
2. *Si* $(-1)^k \Delta_k f(\overrightarrow{a}) > 0$, $\forall k \Rightarrow \overrightarrow{a}$ *es un máximo relativo estricto.*
3. *Si* $\Delta_k f(\overrightarrow{a}) \neq 0$, $\forall k$, *pero no se cumple ninguna de las dos opciones anteriores* $\Rightarrow \overrightarrow{a}$ *es un punto de silla.*
4. *En otro caso, no podemos afirmar nada sobre la naturaleza del punto crítico* $\overrightarrow{a}$.

**Ejemplo 5.7** *Vamos a determinar los extremos relativos de*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

*Primero calculamos sus puntos críticos*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2x - y + 1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2y - x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2z - 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = 1$$

*Sólo tiene un punto crítico*

$$\overrightarrow{a} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

*Calculamos ahora el Hessiano*

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*que evaluamos en el punto* $\overrightarrow{a}$ *(no cambia porque es constante)*

$$Hf\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Los menores principales son*

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 f(a) & = & 2 \\ \Delta_2 f(a) & = & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \\ \Delta_3 f(a) & = & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \end{array}$$

*Luego en el punto* $\overrightarrow{a}$ *la función* $f(x,y,z)$ *tiene un mínimo relativo estricto.*

**Proposición 5.3 (Condiciones suficientes para el caso $n = 2$)** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ *y* $(a,b) \in A$ *un punto crítico de* $f$. *Se* $Hf(a,b)$ *el hessiano evaluado en dicho punto crítico, entonces:*

1. *Si* $|Hf(a,b)| > 0$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b)$ *es un mínimo relativo estricto.*

2. *Si* $|Hf(a,b)| > 0$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)$ *es un máximo relativo estricto.*

3. *Si* $|Hf(a,b)| < 0 \Rightarrow$ *En* $(a,b)$ *no hay extremo, es un punto de silla.*

4. *Si* $|Hf(a,b)| = 0 \Rightarrow$ *No podemos asegurar nada de la naturaleza de* $(a,b)$.

**Ejemplo 5.8** *Habíamos obtenido como único punto crítico de la función*

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2,$$

*que era el punto* $(a,b) = (0,0)$. *Si ahora usamos el Hessiano*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*por lo que*

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(0,0) &= -2 < 0 \\ \Delta_2 f(0,0) &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

*Luego el punto* $(0,0)$ *es un máximo relativo, tal y como se había deducido de forma alternativa.*

**Ejemplo 5.9** *Habíamos obtenido como único punto crítico de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 2z + 2yz - 3,$$

*el punto* $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. *El Hessiano se obtiene fácilmente a partir del gradiente ya calculado*

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

*por lo que*

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(0,0) &= 2 > 0 \\ \Delta_2 f(0,0) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ \Delta_3 f(0,0) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 8 - 8 = 16 > 0 \end{aligned}$$

*Como todos los menores principales son positivos el punto* $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *es un mínimo relativo estricto.*

### 5.2.2. Problemas con restricciones de igualdad

En esta sección vamos a resolver problemas con la siguiente estructura

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f\left(\overrightarrow{x}\right) \\ \text{Sujeto a} & h\left(\overrightarrow{x}\right)=0 \end{array}$$

donde $f,h : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, buscamos los extremos (máximos o mínimos) de la función $f\left(\overrightarrow{x}\right)$, entre todos los puntos que cumplen la conidicón $h\left(\overrightarrow{x}\right)=0$, en este caso se denominan *extremos condicionados.*

Supongamos que $\vec{a} \in A$ es un extremo que cumple $h\left(\vec{a}\right)=0$ y consideremos una curva $\sigma\left(t\right)$ en $\mathbb{R}^n$ definida como

$$\begin{array}{llll} \sigma & : [-\varepsilon,\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \rightsquigarrow & \sigma\left(t\right)=\left(x_1\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right)\right) \end{array}$$

de forma que se cumpla:

1. $\sigma\left(0\right)=\overrightarrow{a}$.
2. $\sigma\left(t\right)$ cumple la restricción del problema, es decir, $h\left(\sigma\left(t\right)\right)=0$, $\forall t$.

Consideremos ahora la función compuesta $\left(f\circ\sigma\right)\left(t\right)=f\left(\sigma\left(t\right)\right)=f\left(x_1\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right)\right)\in\mathbb{R}$.

Obviamente si $\overrightarrow{a}$ es un mínimo de $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ con $h_i\left(\overrightarrow{x}\right)=0$ entonces, en particular, también lo es sobre la curva $\sigma\left(t\right)$, es decir $f\left(\sigma\left(t\right)\right)$ tiene un mínimo en $t_0=0$ y por tanto si definimos $g\left(t\right)=f\left(\sigma\left(t\right)\right)$, entonces debe ocurrir $g'\left(0\right)=0$. Usando el teorema de la función compuesta

$$\left[f\left(\sigma\left(t\right)\right)\right]'=\nabla f\left(\sigma\left(t\right)\right)\cdot\sigma'\left(t\right)=\frac{\partial f\left(\sigma\left(t\right)\right)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial f\left(\sigma\left(t\right)\right)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

y evaluando en $t_0=0$

$$\nabla f\left(\sigma\left(0\right)\right)\cdot\sigma'\left(0\right)=0\Rightarrow\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\sigma'\left(0\right)=0$$

lo que indica que esos dos vectores son perpendiculares.

Recordemos además que $h\left(\sigma\left(t\right)\right)=0$; $\forall t$, luego usando de nuevo la regla de la cadena y derivando respecto de $t$

$$\left[h\left(\sigma\left(t\right)\right)\right]'=\frac{\partial h\left(\sigma\left(t\right)\right)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial h\left(\sigma\left(t\right)\right)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}=0$$

e igualando en $t_0=0$

$$\frac{\partial h\left(a\right)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial h\left(a\right)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}=0\Rightarrow\nabla h\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\sigma'\left(0\right)=0$$

luego estos dos vectores también son perpendiculares entre sí, lo que implica que $\nabla h\left(\overrightarrow{a}\right)$ y $\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)$ están en el mismo subespacio vectorial, es decir, son linealmente dependientes y por tanto, debe existir $\lambda\in\mathbb{R}$, que cumple

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)+\lambda\nabla h\left(\overrightarrow{a}\right)=0.$$

Este razonamiento se puede realizar de forma análoga cuando el número de restricciones es mayor que 1, y conduce al siguiente resultado.

**Teorema 5.4 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange)** *Sea $f : A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^1\left(A\right)$. Si $\overrightarrow{a}\in A$ es un extremo local de $f\left(x\right)$ condicionado por las restricciones (ligaduras)*

$$h_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0\quad i=1,\ldots,m<n$$

*siendo* $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *con* $h_i \in \mathcal{C}^1(A); i = 1, \ldots, m \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, *llamados* multiplicadores de Lagrange, *tales que* $\overrightarrow{a}$ *es un punto crítico de la llamada* función Lagrangiana *definida por*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, \ldots, x_n)$$

*es decir, se cumple*

$$\nabla L(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla_x L(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \\ \nabla_\lambda L(\overrightarrow{a}) = h_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

*donde* $\nabla_x$ *y* $\nabla_\lambda$ *representa las derivadas de* $L$ *respecto de las componentes de* $\overrightarrow{x}$ *y* $\overrightarrow{\lambda}$ *respectivamente.*

**Observación 5.1** *Como en los resultados precedentes, el teorema nos da las condiciones necesarias para que un punto* $\overrightarrow{a}$ *sea un extremo de una función codicionado a unas restricciones, pero no son suficiente, su cumplimiento no garantiza que el punto sea realmente un extremo condicionado.*

**Observación 5.2** *Tanto los valores de los multiplicadores* $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *como los de* $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *son desconocidos y se obtienen al resolver el sistema de* $n+m$ *ecuaciones que proporciona la condición estacionaria*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\overrightarrow{a}) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) = 0 \end{cases} \\ \nabla_\lambda L(\overrightarrow{a}) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow h_1(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow h_m(\overrightarrow{a}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.10** *Calcula la mínima distancia de* $P = (1, 2)$ *a* $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 + 2)^2 = 1\right\}$.

**Solución:** Tenemos que resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & d(P, (x, y)) \\ \text{Sujeto a} & (x, y) \in \Omega \end{array}$$

o en ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ \text{Sujeto a} & x^2 + (y+2)^2 = 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ \text{Sujeto a} & x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Vemos la representación gráfica del problema en la figura 5.5.Se trata de un problema de Lagrange que procedemos a resolver utilizando los multiplicadores de Lagrange, construimos el Lagrangiano, incorporando a la función del problema la restricción $x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0$, usando un multplicador de Lagrange, $\lambda$

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \lambda\left(x^2 + (y+2)^2 - 1\right)$$

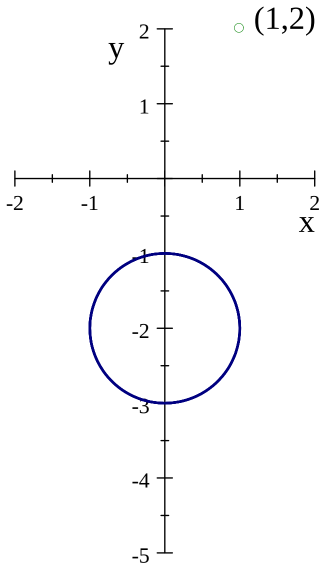



Figura 5.5: Representación gráfica de la distancia del punto $(1,2)$ a la circunferencia $x^2+(y+2)^2=1$.

y buscamos los puntos críticos de $L\,(x,y,\lambda)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}+2\lambda\,(y+2)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+(y+2)^2-1=0 \qquad (3)$$

Despejamos $\lambda$ de la ecuación (1)

$$\lambda=\frac{1-x}{2x\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

y también de la ecuación (2)

$$\lambda=\frac{2-y}{2\,(y+2)\,\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

e igualando

$$\frac{1-x}{2x\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\frac{2-y}{2\,(y+2)\,\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

simplificando el 2 y la raíz cuadrada

$$\frac{1-x}{x}=\frac{2-y}{y+2}$$

de modo que

$$(1-x)\,(y+2)=(2-y)\,x\Leftrightarrow y+2-xy-2x=2x-yx\Leftrightarrow y+2=4x$$

y sustituyendo en (3)

$$x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (4x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 17x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{17},$$

y tendremos por tanto dos puntos

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow y = 4x - 2 = 4\frac{1}{\sqrt{17}} - 2 = \frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)$$

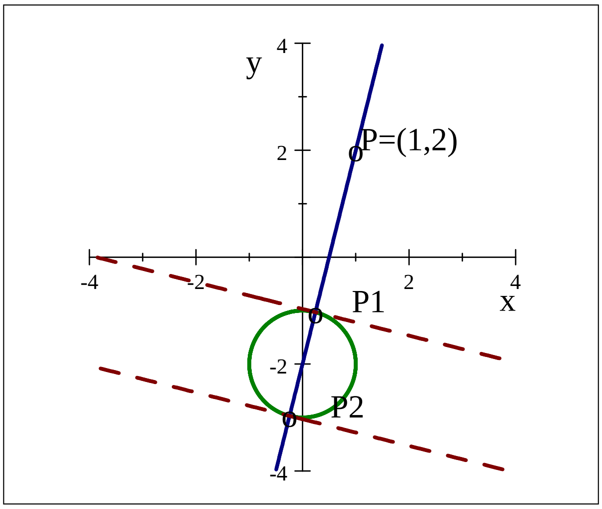
y

$$x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow y = 4x - 2 = -4\frac{1}{\sqrt{17}} - 2 = \frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}} \Rightarrow P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)$$

y el valor de la distancia de estos puntos a $\Omega$

$$\begin{aligned} d\left(P_1, \Omega\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - 1\right)^2 + \left(\frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}} - 2\right)^2} = \sqrt{18 - 2\sqrt{17}} \\ d\left(P_2, \Omega\right) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}} - 2\right)^2} = \sqrt{18 + 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

$P_1$ es un mínimo, mientras $P_2$ será máximo, podemos verlos en la gráfica siguiente:




Notar que en los puntos $P1$ y $P2$, las rectas tangentes a la circunferencia son perpendiculares a la recta que unes esos puntos con el punto $P$.

**Ejemplo 5.11** *Halla los puntos extremos que alcanza la función $f(x, y) = x + y^2$, cuando $(x, y)$ está situado sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Para ello vamos a construir el Lagrangiano*

$$L(x, y, \lambda) = x + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

*y buscamos sus puntos críticos*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \quad 1 + 2\lambda x = 0 \quad \textit{(1)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow \quad 2y + 2\lambda y = 0 \quad \textit{(2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad \textit{(3)} \end{cases}$$

*En (2) sacamos el factor común* $2y$

$$2y\,(1+\lambda)=0$$

*que nos da como soluciones* $y=0$ *o* $1+\lambda=0$*. En el caso de que* $y=0$*, entonces de (3)*

$$x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$$

*Y tendremos dos puntos* $P_1=(5,0)$ *y* $P_2=(-5,0)$*.*

*En el caso en el que* $\lambda=-1$*, entonces sustituyendo en (1)*

$$1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

*y sustituyendo este valor en (3)*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-25=0\Rightarrow y^2=25-\frac{1}{4}=\frac{99}{4}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{99}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$$

*y tendremos otros dos puntos* $P_3=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)$ *y* $P_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)$*. Evaluamos la función en todos los puntos encontrados*

$$\begin{aligned}
f\,(P_1) &= f\,(5,0)=5\\
f\,(P_2) &= f\,(-5,0)=-5\\
f\,(P_3) &= f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)=\frac{1}{2}+\frac{99}{4}=\frac{101}{4}\\
f\,(P_4) &= f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)=\frac{1}{2}+\frac{99}{4}=\frac{101}{4}
\end{aligned}$$

*Lo que nos da un mínimo en* $P_2$ *y dos máximos con el mismo valor en* $P_3$ *y* $P_4$*. Lo podemos ver en la figura 5.6, las isolíneas* $f\,(x,y)=k$*, crecen de izquierda a derecha, de forma que la que tiene el valor más pequeño (en verde) es la última que toca a la circunferencia, tomando un valor más pequeño (línea discontinua en gris) ya no hay intersección. El máximo (en marrón) se obtiene en* $P_3$ *y* $P_4$ *(de forma simétrica), de modo que una valor mayor (línea discontinua en rojo) deja de intersectar con la circunferencia.*

### 5.2.3. Extremos de funciones sobre conjuntos compactos

Sabemos por el teorema de Weierstrass que si $f:K\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, es una función continua y $K$ es un conjunto compacto, entonces la función $f$ tiene al menos un máximo y un mínimo absoluto sobre el conjunto $K$. El problema es que el teorema no especifica cómo encontrar esos valores. No obstante, como $K$ es conjunto compacto, entonces es la unión de su interior y su frontera, es decir

$$K=\delta K\cup\overset{\circ}{K}$$

y podemos dividir el problema de buscar los extremos de $f$ en $K$ en dos subproblemas: el primero consiste en buscar los extremos de $f$ en el interior $\overset{\circ}{K}$; en este caso las restricciones no influyen en el cálculo de los extremos relativos y es un problema sin restricciones; obviamente los puntos obtenidos con esta consideración deben comprobarse posteriormente para saber si están o no dentro del conjunto

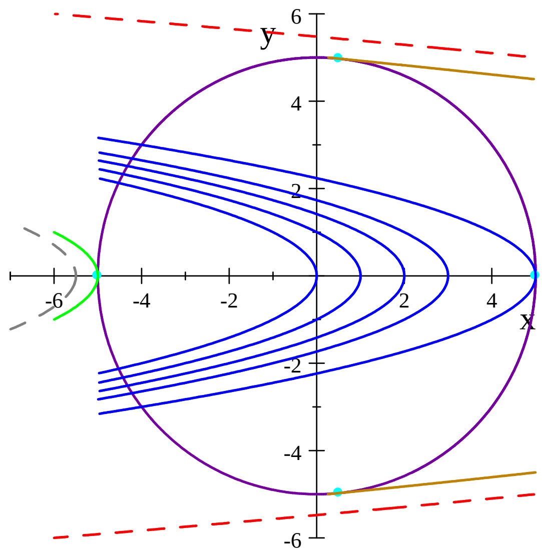



Figura 5.6: Curvas de nivel. El mínimo se alcanza en $P_2 = (-5, 0)$ (isolínea verde), mientras que el máximo se alcanza de forma simétrica en los puntos $P_3$ y $P_4$ (isolínea marrón).

$K$. El segundo problema consiste en buscar los extremos en la frontera, en este caso se tendrían que cumplir las restricciones y sería un problema de Lagrange o problema con restricciones de igualdad. En resumen

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Problema: Optimizar } f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ K = \delta K \cup \overset{\circ}{K} \\ K \text{ compacto}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{c}\left\{\text{Subproblema 1: Optimizar } f : \overset{\circ}{K} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\right\} \\ \\ \left\{\begin{array}{c}\text{Subproblema 2: Optimizar } f : \delta K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ h_i(x) = 0\end{array}\right\}\end{array}$$

**Ejemplo 5.12** *Vamos a buscar los extremos absolutos de la función* $f(x, y) = x^2 + xy - x + y^2$ *dentro del conjunto* $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq 0\right\}$. *Los primero que hay que notar es que el conjunto* $K$ *es compacto, porque es cerrado, ya que contiene a los puntos de la frontera, representados mediante las igualdades y además es acotado, puesto que es la mitad de una circunferencia como podemos ver en la gráfica 5.7.Como se ha indicado, para resolver el problema lo dividimos en dos subproblemas. En el primero buscaremos los extremos en el interior del conjunto y en el segundo sobre la frontera.*

*El interior del conjunto sería*

$$\overset{\circ}{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1;\ y > 0\right\}$$

*en este caso las restricciones sólo se tienen en cuenta para eliminar aquellos puntos críticos de* $f(x, y)$ *que no estén dentro del conjunto, es decir, aquellos que no cumplan las restricciones que lo definen. Los puntos críticos de* $f(x, y)$ *se obtienen resolviendo la ecuación*

$$\nabla f(x, y) = 0$$

*es decir*

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 1 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + 2y = 0\end{array}\right.$$

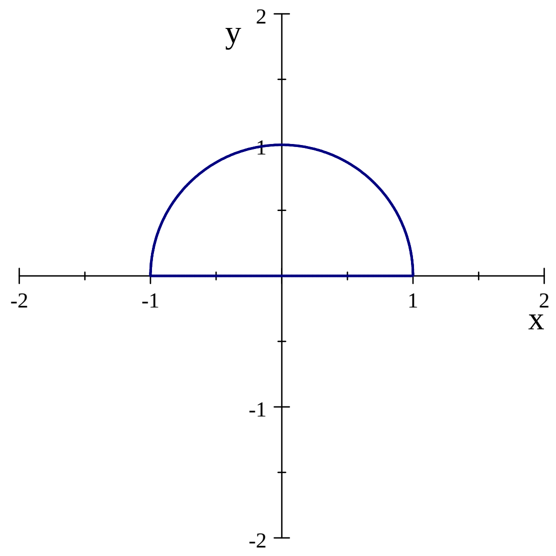



Figura 5.7: Conjunto compacto

*sistema lineal que tiene como una única solución*

$$P_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

*sin embargo,* $y_0 = -\frac{1}{3} < 0$*, por tanto esta solución no está en el interior de* $K$ *y se descarta.*

*La frontera del conjunto está definida por las igualdades que en este caso está formada por dos curvas: la semicircunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* $1$ *contenida en el semiplano superior (*$x^2+y^2-1 = 0$ *con* $y \geq 0$*) y el segmento que une el punto* $(-1,0)$ *con el* $(1,0)$ *situado sobre el eje* $OX$ *(*$y = 0$*). Tendremos que resolver dos subproblemas*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + xy - x + y^2 \\ & y = 0 \end{array} \right.$$

*y*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 + xy - x + y^2 \\ & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

*Ambos problemas son de Lagrange. El primero es muy sencillo y se resuelve directamente puesto que al ser* $y = 0$*, el problema queda*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2 - x \\ & x \in [-1, 1] \end{array}$$

*que es un problema de optimización en una variable que resolvemos de forma usual, buscando los puntos críticos de la función que están dentro del intervalo y comparando los valores que toma la función en estos puntos y en los extremos del intervalo. Los puntos críticos son*

$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$$

*que está en el intervalo. Tomamos los extremos del intervalo y ahora comparamos los valores de la* *función en todos esos puntos*

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - (-1) = 2 \\ f(1) &= (1)^2 - (1) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

*El mayor valor se alcanza en* $x_1 = -1$ *y el menor en* $x_2 = \frac{1}{2}$*, luego en la semirrecta tendremos un máximo en el* $x_1$ *y un mínimo en el punto* $x_2$*, ambos con coordenada y nula, lo que nos da 2 puntos en el plano*

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 0) \\ P_2 &= \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

*El segundo problema se resuelve utilizando los multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta la restricción. Construimos el Lagrangiano*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + xy - x + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

*y buscamos sus puntos críticos*

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \quad 2x + y - 1 + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1+\lambda) + y = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow \quad x + 2y + 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y(1+\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

*Despejando* $\lambda$ *de la primera y segunda ecuaciones y suponiendo* $x \neq 0$

$$2\lambda x = 1 - y - 2x \Rightarrow \lambda = \frac{1 - y - 2x}{2x}$$

*En el caso de que* $x = 0$*, entonces la primera ecuación nos da* $y = 1$ *y tenemos el punto* $P_3 = (0, 1)$*, que cumple la tercera ecuación, adicionalmente y sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, obtenemos* $\lambda = -1$*. En resumen tenemos un primer punto solución*

$$P_3 = (0, 1)\,; \ \lambda = -1$$

*Suponiendo ahora* $y \neq 0$*, de la segunda ecuación obtenemos*

$$x + 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2\lambda y = -x - 2y \Rightarrow \lambda = \frac{-x - 2y}{2y}$$

*En el caso de que* $y = 0$*, y usando esa misma ecuación obtenemos el valor* $x = 0$*, sin embargo, el punto* $(0, 0)$ *no cumple la tercera ecuación y descartamos este caso.*

*Queda ver qué ocurre cuando* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$*, igualando los valores de* $\lambda$

$$\frac{1 - y - 2x}{2x} = \frac{-x - 2y}{2y} \Longleftrightarrow 2y(1 - y - 2x) = 2x(-x - 2y) \Longleftrightarrow 2y - 2y^2 - 4xy = -2x^2 - 4xy \Longleftrightarrow 2y - 2y^2 = -2x^2$$

*de donde se obtiene la relación*

$$x^2 = y^2 - y$$

*y sustituyendo en la tercera ecuación*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(y^2 - y\right) + y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0,$$

*ecuación de segundo grado que tiene por solución*

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

*la solución negativa no sirve puesto que* $y \geq 0$*. El valor positivo ya lo hemos obtenido anteriormente ya que* $x$ *debe ser* $0$*. Por tanto, para esta parte de la frontera sólo tenemos un punto: el* $P_3 = (0,1)$*.*

*Evaluamos la función en este punto y lo comparamos con los que hemos obtenido en el apartado anterior*

$$f(0,1) = 1$$

*y deducimos que los extremos globales (o absolutos) son* $P_1(-1,0)$ *es un máximo y* $P_2 = \left(\frac{1}{2},0\right)$ *un mínimo. En la siguiente gráfica vemos en color magenta el conjunto* $K$ *(la semicircunferencia y el segmento). Podemos comprobar que la curva verde que determina la curva de nivel correspondiente al mínimo es tangente al conjunto* $K$ *en el punto* $P_1 = \left(\frac{1}{2},0\right)$*, de forma que si el valor es menor, ya no habrá intersección (curva interior en negro). La curva roja corresponde a la curva de nivel de mayor valor, correspondiente al punto* $P_2 = (-1,0)$*, un valor mayor ya no cortaría a la curva (curva exterior en negro).* $\ell$

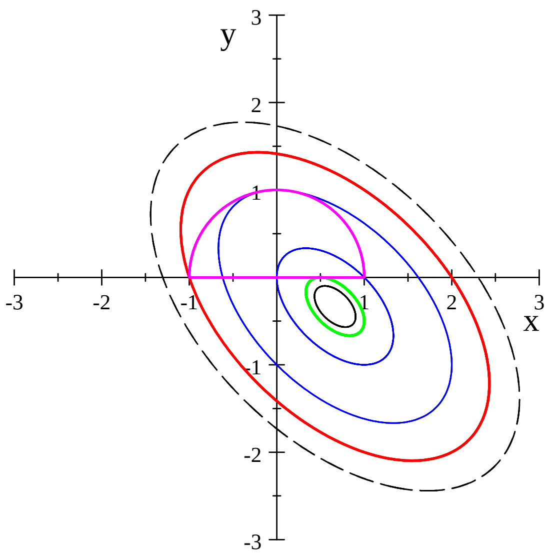



Figura 5.8: Representación gráfica

**Ejemplo 5.13** *Vamos a buscar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = xy^2$ *dentro del conjunto* $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\right\}$*. Los primero que hay que notar es que el conjunto* $K$ *es compacto, porque es cerrado, ya que contiene a los puntos de la frontera, representados mediante las igualdades y además es acotado, puesto que es la parte de la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* $1$

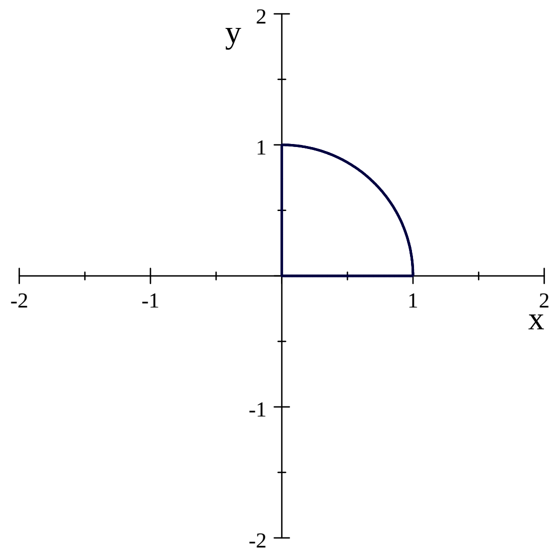



Figura 5.9: Conjunto compacto

*que está en el primer cuadrante como podemos ver en la gráfica siguiente:Como en el ejemplo anterior, dividimos el problema en dos partes: buscaremos los extremos en el interior del conjunto y sobre la frontera.*

*El interior del conjunto viene dado por*

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1; x > 0; y > 0\right\}$$

*en este caso las restricciones sólo se tendrán en cuenta para eliminar aquellos puntos críticos de $f(x, y)$ que no cumplan esta restricción. Los puntos críticos de $f(x, y)$ se obtienen resolviendo la ecuación*

$$\nabla f(x, y) = 0$$

*es decir*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y^2 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow 2xy = 0 \end{array} \right.$$

*que tiene por solución los puntos de la forma*

$$P_0 = (x, 0)$$

*pero como $y = 0$, esta solución no estará en el interior de $K$ y no hay candidatos a extremos que cumplan estas condiciones*

*La frontera del conjunto está definida por las igualdades y en este caso habría tres partes en la frontera: podemos considerar puntos sobre la semicircunferencia $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$ , puntos sobre el eje $OX$ $(y = 0)$ y puntos sobre el eje $OY$ $(x = 0)$. Por tanto, tendremos tres subproblemas*

$$\textit{Problema 1} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy^2 \\ & y = 0 \end{array} \right. ,$$

$$\textit{Problema 2} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy^2 \\ & x = 0 \end{array} \right.$$

$$\textit{Problema 3}\left\{\begin{array}{ll}\textit{Optimizar} & xy^2 \\ & x^2+y^2-1=0\end{array}\right.$$

*Los primeros son muy sencillos, en ambos la función toma el valor* 0*; como tenemos que manternos dentro del conjunto* $K$*, tendremos puntos de la forma*

$$P_x = (x, 0) \;\; con\; x \in [0, 1]$$

*y también de la forma*

$$P_x = (0, y) \;\; con\; y \in [0, 1]$$

*en todos ellos la función es igual a* 0

$$f(P_x) = f(P_y) = 0.$$

*El tercer problema se resuelve utilizando los multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta la restricción que define la circunferencia. Construimos el Lagrangiano*

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

*y buscamos sus puntos críticos*

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll}\frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & y^2 + 2\lambda x = 0 & \Rightarrow & y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & 2xy + 2\lambda y = 0 & \Rightarrow & 2y(x + \lambda) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow & x^2 + y^2 - 1 = 0 & \Rightarrow & \end{array}\right.$$

*De la segunda ecuación tenemos dos opciones*

$$y = 0 \;\; o \;\; x = -\lambda$$

*Para el valor* $y = 0$ *y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos el valor* $x = 1$*, y tendríamos el punto* $(1, 0)$*, aunque este punto es de la forma* $P_y$ *que ya se han considerado en el apartado anterior. Para este punto se obtiene* $\lambda = 0$*.*

*Para el caso* $\lambda = -x$*, de la primera ecuación obtenemos*

$$y^2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow y^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

*y usando la tercera ecuación*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

*descartamos la solución negativa puesto que estaría fuera del conjunto y nos quedamos con la positiva* $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$*. Para este valor de* $x$*, calculamos los posibles valores de* $y$

$$y^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

*de nuevo descartamos la solución negativa para quedarnos con un único punto*

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

*Para los puntos obtenidos en todos los apartados evaluamos la función*

$$\begin{aligned} f(P_x) &= f(P_y) = 0 \\ f(P_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

*que serían mínimos (habría infinitos) y máximo respectivamente. Vemos en la gráfica 5.10 las curvas de nivel de la función* $xy^2$*. La curva en verde representa la curva de nivel mínimo y corresponde con los puntos de los ejes coordenados, mientras que la curva en rojo representa el valor máximo obtenido.*

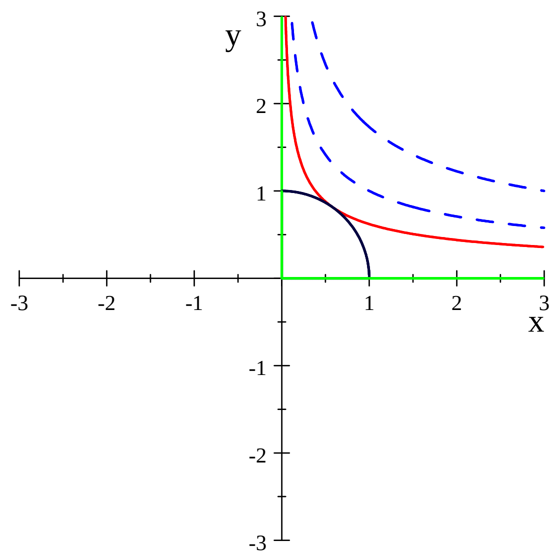



Figura 5.10: Solución gráfica

**Ejemplo 5.14** *Resuelve el problema*

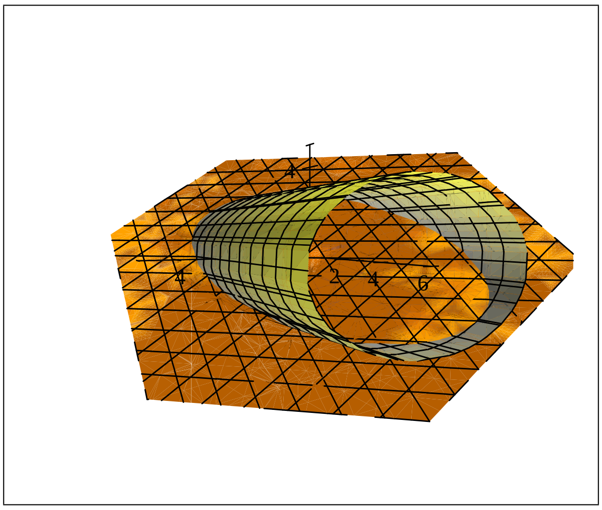
$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & y \\ \textit{Sujeto a} & x^2+y^2=9 \\ & x+y+z=1 \end{array}$$

*El conjunto es una elipse en el espacio que se obtiene de la intersección de un cilindro sobre el eje* $OY$ *de centro* $(0,0,0)$ *y radio* $r=3$*, y un plano tal y como se puede apreciar en la siguiente gráfica En primer lugar expresamos el problema en forma estándar, pasando todos los términos al miembro de la izquierda e igualando a cero*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & y \\ \textit{Sujeto a} & x^2+y^2-9=0 \\ & x+y+z-1=0 \end{array}$$

*Y ahora utilizamos los multiplicadores de Lagrange para resolverlo. Como hay dos restricciones, necesitaremos dos multiplicadores que llamamos* $\lambda$ *y* $\mu$

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = y + \lambda\left(x^2+z^2-9\right) + \mu(x+y+z-1)$$



*Buscamos los puntos críticos de* $L(x, y, z, \lambda, \mu)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x + \mu = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 + \mu = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda z + \mu = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 - 9 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0 \qquad (5)$$

*De la ecuación (2) obtenemos* $\mu = -1$ *y restando las ecuaciones (1) y (3)*

$$(2\lambda x + \mu) - (2\lambda z + \mu) = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda(x - z) = 0$$

*que tiene como soluciones* $\lambda = 0$ *y* $x = z$*. Sin embargo si* $\lambda$ *fuera* $0$*, al sustituir en la ecuación (1) nos daría* $\mu = 0$*, lo que es imposible puesto que* $\mu$ *es* $-1$*, así que debe suceder* $x = z$*. Esta igualdad se utiliza en la ecuación (4)*

$$x^2 + z^2 - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

*y para estos valores de* $x$ *y* $z$ *usamos la ecuación (5) para obtener el valor de* $y$

$$x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x - z \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_1 = 1 - 2\frac{3}{\sqrt{2}} = 1 - 3\sqrt{2} \\ x_2 = z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_2 = 1 - 2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

*Aunque no sea necesario el valor de $\lambda$ se obtiene de la ecuación (1), o de la (3)*

$$2\lambda x+\mu=0\Rightarrow\lambda=-\frac{\mu}{2x}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{3}{\sqrt{2}},\mu=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{-1}{2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ x_2=-\frac{3}{\sqrt{2}},\mu=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{-1}{2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

*En resumen, tenemos dos puntos*

$$P_1=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},1-3\sqrt{2},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\ \textit{con}\ \lambda=\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \mu=-1\Rightarrow f\left(P_1\right)=1-3\sqrt{2}$$

$$P_1=\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},1+3\sqrt{2},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\ \textit{con}\ \lambda=-\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \mu=-1\Rightarrow f\left(P_1\right)=1+3\sqrt{2}$$

*Luego $P_1$ es el mínimo y $P_2$ es el máximo.*