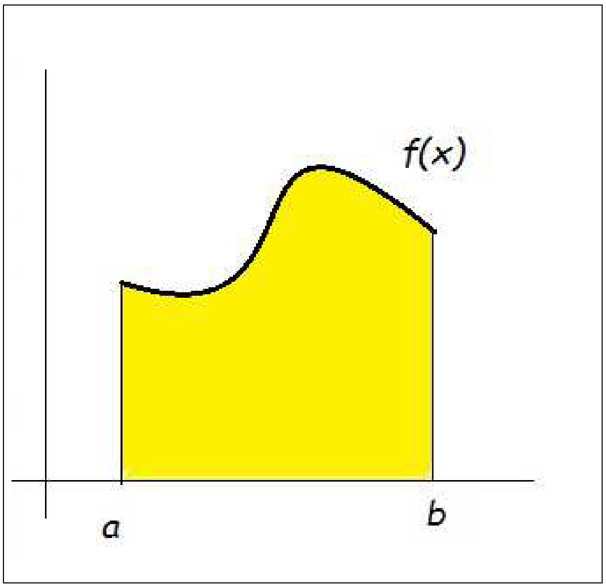
Capítulo 2

Integral de Riemann

2.1. Introducción

Supongamos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y positiva en el intervalo $[a, b]$. Se pretende calcular el área que hay bajo la gráfica de $f(x)$ (zona amarilla figura 2.1)



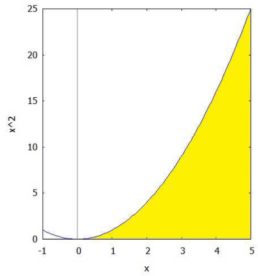
Area bajo la curva $f(x)$

Esta área se representará mediante la notación usual

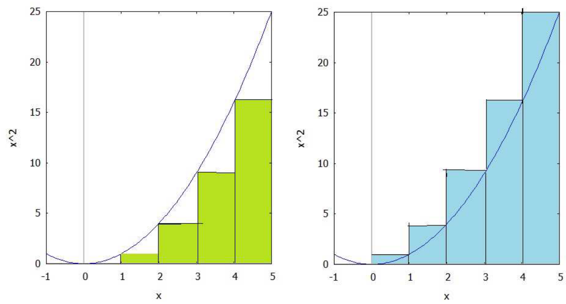
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y recibe el nombre de *integral definida* o *Integral de Riemann.*

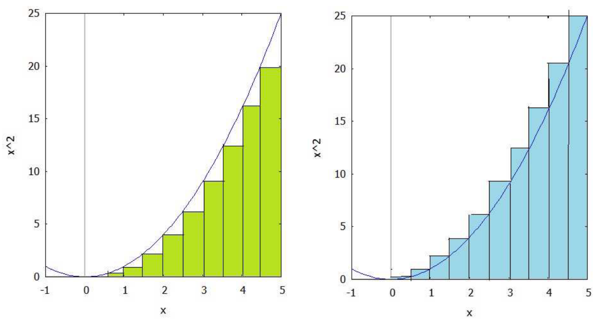
El procedimiento que vamos a hacer para obtener un valor aproximado del valor del área bajo una curva, por ejemplo, la de la gráfica



es construir una serie de rectángulos con base los puntos del intervalo y como alturas los valores de la función en puntos conocidos del intervalo. En la imagen vemos una aproximación como la descrita. En el primer gráfico estamos obteniendo una aproximación por defecto, ya que todos los rectángulos caen bajo la curva, se obtendrá en este caso un valor más pequeño que la verdadera área que hay bajo la curva. En el segundo gráfico estamos obteniendo una aproximación por exceso, ya que los rectángulos cubren completamente el área bajo la curva y obtendremos un valor que es mayor que la verdadera área.



Si aumentamos el número de rectángulos, como en la gráfica siguiente



obtenemos una mejor aproximación. Observemos además que la suma por defecto es mayor que la anterior (deja menos hueco entre la curva y los rectángulos) y la suma por exceso es menor (la zona que sobrepasa la curva es menor).

2.1.1. Sumas inferiores y superiores. Integral en sentido Riemann

Definición 2.1 *Se define* partición *de un intervalo* $[a, b]$*, al conjunto definido como*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

donde

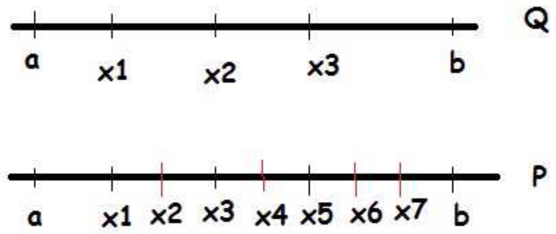
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Definición 2.2 *Se define* norma de la partición $\mathcal{P}$, *y se representará por* $\|\mathcal{P}\|$, *a:*

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{k=1,\ldots n} \{x_k - x_{k-1}\}$$

Definición 2.3 *Dadas dos particiones,* $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$*, del intervalo* $[a, b]$*, se dice que* $\mathcal{P}$ *es* más fina que $\mathcal{Q}$*, si* $\|\mathcal{P}\| < \|\mathcal{Q}\|$ *y si todos los puntos de* $\mathcal{Q}$ *también están en* $\mathcal{P}$*.*

La definición indica que $\mathcal{P}$ divide al intervalo $[a, b]$ en más subintervalos que $\mathcal{Q}$ y además son más pequeños.



Refinamiento.

En la imagen 2.1.1 podemos comprobar cómo la partición $\mathcal{P}$ contiene más puntos y sus subintervalos tienen longitudes menores.

Como la función f es acotada en $[a, b]$, también será acotada en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ que están incluidos en la partición, denotaremos por m_k y M_k a

$$m_k = \min \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \max \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

está claro que los productos $m_k (x_k - x_{k-1})$ y $M_k (x_k - x_{k-1})$ representa las áreas de cada uno de los rectángulos, inferior y superior, que tiene como base el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

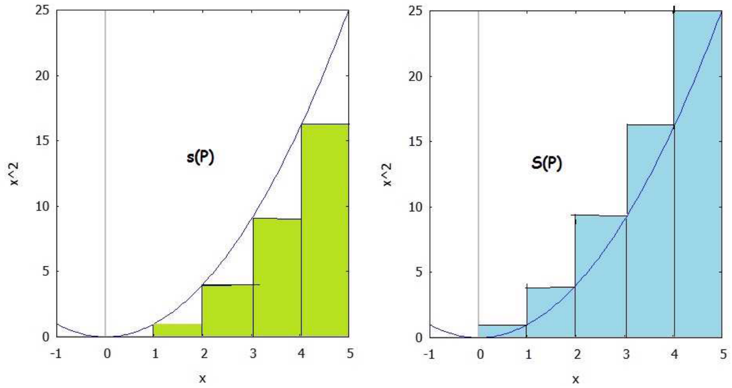
Definición 2.4 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, una función acotada y sea* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$*. Definimos* suma inferior *de* f *asociada a* $\mathcal{P}$ *a*

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

y definimos suma superior *de* f *asociada a* $\mathcal{P}$ *a*

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

Las sumas inferiores y superiores dan una aproximación por defecto y por exceso, respectivamente, del valor real del área bajo la curva.



Proposición 2.1 *Sea* $\dot{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, *con* $f(x)\geq 0$ *y acotada en* $[a,b]$. *Si* A *es el área bajo la curva, entonces, se cumple;*

1.
$$s(P)\leq A\leq S(P)$$

2. *Si* $m=\min\{f(x):x\in[a,b]\}$
$$m(b-a)\leq s(P)$$

3. *Si* $M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$
$$S(P)\leq M(b-a)$$

De la proposición se deduce que

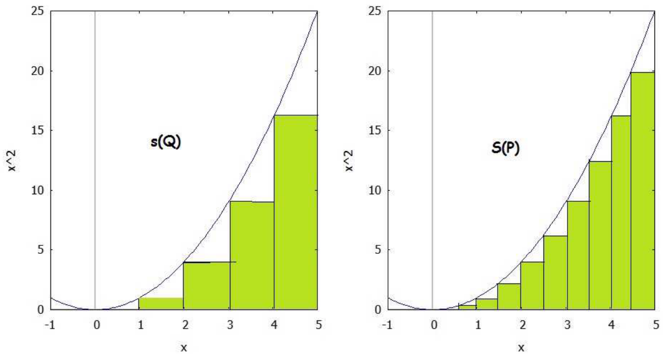
$$m(b-a)\leq s(P)\leq A\leq S(P)\leq M(b-a)$$

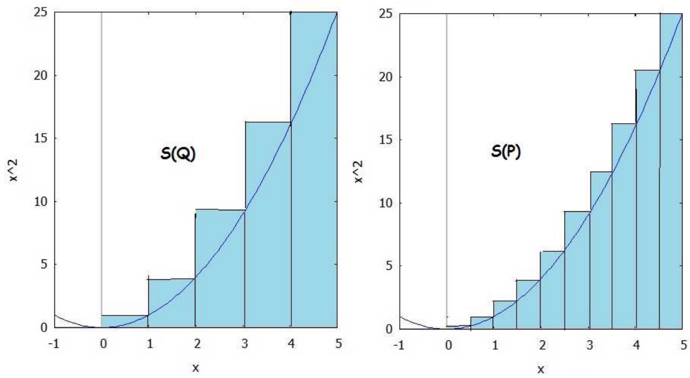
es decir cualquier suma inferior está acotada superiormente por $M(b-a)$ y cualquier suma superior está acotada inferiormente por $m(b-a)$.

Proposición 2.2 *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *con* $f(x)\geq 0$ *y acotada en* $[a,b]$. *Sean* $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$ *dos particiones del intervalo, siendo Sea* $\mathcal{P}$ *más fina que* $\mathcal{Q}$, *entonces, se cumple:*

1. *La suma inferior correspondiente a* $\mathcal{P}$ *es mayor que la suma inferior asociada a* $\mathcal{Q}$*:*
$$s(\mathcal{P})\geq s(\mathcal{Q})$$

2. *La suma superior correspondiente a* $\mathcal{P}$ *es menor que la suma superior asociada a* $\mathcal{Q}$*:*
$$S(\mathcal{P})\leq S(\mathcal{Q})$$





Los resultados anteriores nos dicen que las aproximaciones al área bajo la curva, mediante áreas de rectángulos mejoran al tomar particiones cada vez más finas del intervalo. Si consideramos una sucesión de particiones $\mathcal{P}_k$ cada vez más finas del intervalo , entonces por la proposición anterior tendremos

$$s(\mathcal{P}_1) \leq s(\mathcal{P}_2) \leq \cdots \leq s(\mathcal{P}_M) \leq \cdots$$

$$S(\mathcal{P}_1) \geq S(\mathcal{P}_2) \geq \cdots \geq S(\mathcal{P}_M) \geq \cdots$$

La primera sucesión es creciente y está acotada superiormente por $M(b-a)$, mientras que la segunda es decreciente y está acotada inferiormente por $m(b-a)$, por la teoría de sucesiones de números reales, ambas sucesiones tienen límite y tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2.5 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $f(x)\geq 0$. Si consideramos una sucesión de particiones $\mathcal{P}_k$ cada vez más finas del intervalo con $\|\mathcal{P}_k\|\to 0$, definimos la* integral inferior de f *en $[a,b]$ como*

$$\lim_{\|\mathcal{P}_n\|\to 0} s(\mathcal{P}_n) = \underline{\int_a^b} f$$

y se define la integral superior de f *en $[a,b]$ como*

$$\lim_{\|\mathcal{P}_n\|\to 0} S(\mathcal{P}_n) = \overline{\int_a^b} f$$

Definición 2.6 *Se dice que $\dot{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $f(x)\geq 0$ y acotada en $[a,b]$ es* integrable (en sentido Riemann), *sí y sólo sí,*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

A este valor común se le denomina integral definida *de f $[a,b]$ y se representa por*

$$\int_a^b f \quad o \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2.1 *Probar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ \\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable en el intervalo $[0,1]$.

Solución: Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera del intervalo y calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

Cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene tanto números racionales como irracionales, luego

$$m_k = \text{mín}\,\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \text{máx}\,\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

de modo que

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0\,(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1\,(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a = 1$$

esto ocurre para cualquier partición luego

$$\underline{\int_a^b} f = \text{lím}\, s(\mathcal{P}) = \text{lím}\, 0 = 0$$

$$\overline{\int_a^b} f = \text{lím}\, S(\mathcal{P}) = \text{lím}\, 1 = 1$$

y por tanto la función $f(x)$ no es integrable en sentido Riemann.

Proposición 2.3 *Sea* $\dot{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $f(x) \geq 0$ *y acotada en* $[a,b]$*, entonces*

f *es integrable Riemann en* $[a,b]$ $\iff \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \mathcal{P}$ *partición de* $[a,b]$ *tal que* $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

2.1.2. Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones

Definición 2.7 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, una función acotada e integrable en sentido Riemann en* $[a,b]$ *y sea* $\mathcal{P}$ *una partición del intervalo con*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

Si tomamos $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, *se define la suma de Riemann de* f *en* $[a,b]$ *asociada a* $\mathcal{P}$ *a*

$$S_R(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

De la definición ocurre claramente que

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

y por tanto

$$s(\mathcal{P}) \leq S_R(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P})$$

Está claro que si la función es integrable entonces tomando particiones $\mathcal{P}_n$, cada vez más finas con $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, el límite de $s(\mathcal{P}_n)$ y de $S(\mathcal{P}_n)$ coincidirán, por tanto, si f es integrable el límite de $S_R(\mathcal{P}_n)$ también será el mismo (regla del Sandwich) y podemos poner

$$\lim_{\|\mathcal{P}_n\| \to 0} S_R(\mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La ventaja que da el uso de las series de Riemann es que, si la función es integrable, entonces la partición que tomemos no importa y tampoco importará el punto que tomemos dentro de cada subintervalo en la partición, por tanto, se eligen particiones y puntos intermedios fáciles de manejar. Por comodidad, la partición del intervalo se hará dividiendo el intervalo en n partes iguales

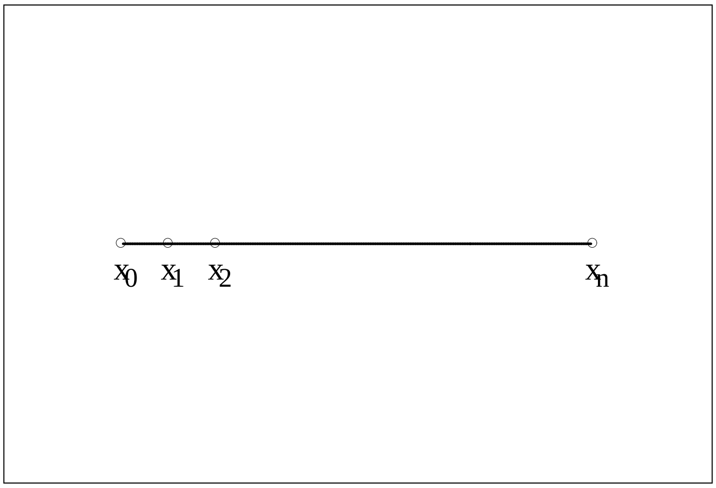
$$\mathcal{P}_n = \left\{a = x_0, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b\right\}$$

es decir

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_k &= x_{k-1} + \frac{b-a}{n};\ k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

notar que en este caso

$$x_k = x_0 + kh;\ k = 1, \ldots, n$$



lo que hace que su norma sea

$$\|\mathcal{P}_n\| = \frac{b-a}{n}$$

puesto que todos los subintervalos tienen la misma longitud. Notar que $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_n\| = 0$. A continuación se toma como punto intermedio en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, alguno de los siguientes puntos

Extremo inferior del intervalo	$\xi_k = x_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$
Extremo superior del intervalo	$\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$
Punto medio del intervalo	$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$

y siempre que f sea integrable en $[a, b]$ podemos poner

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

Ejemplo 2.2 *Probar que $f(x) = x^2$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Dividiremos el intervalo en n partes iguales, es decir,

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

mientras que

$$x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} = \frac{k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

y usaremos el extremo superior del intervalo como punto intermedio, es decir,

$$\xi_k = x_k \Rightarrow \xi_k = \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n$$

de forma que

$$f(\xi_k) = \xi_k^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

y la suma de Riemann sería

$$S_R(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

La suma de los cuadrados de los n primeros numeros naturales viene dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Por tanto

$$S_R(\mathcal{P}) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\right)$$

Si ahora hacemos $n \to \infty$, la partición es cada vez más fina y por tanto, si la función es integrable, este límite debe converger al valor de la integral de Riemann buscada.

$$\lim_{n\to\infty} S_R(P) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+1}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} S_R(P) = \frac{1}{3}$$

y por tanto

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

y que comprobaremos posteriormente con la Regla de Barrow.

Ejemplo 2.3 *Probar que $f(x) = e^x$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Dividiremos el intervalo en n partes iguales, es decir,

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

mientras que

$$x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} = \frac{k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

y usaremos el extremo superior del intervalo como punto intermedio, es decir,

$$\xi_k = x_k \Rightarrow \xi_k = \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n$$

de forma que

$$f(\xi_k) = e^{\xi_k} = e^{\frac{k}{n}}$$

y la suma de Riemann sería

$$S_R(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

La suma es la de una progresión geométrica de razón $e^{\frac{1}{n}}$*,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\left(\frac{e^{\frac{n}{n}}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right)$$

Si ahora hacemos $n \to \infty$*, la partición es cada vez más fina y por tanto si la función es integrable este límite debe converger al valor de la integral de Riemann buscada*

$$\lim_{n\to\infty} S_R(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

por claridad en el cálculo, hacemos el cambio

$$x = \frac{1}{n}$$

de modo que si $n \to \infty$*, entonces* $x \to 0$ *y el límite se puede expresar como*

$$\lim_{n\to\infty} S_R(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x(e-1)}{e^x - 1}$$

que es de la forma $\frac{0}{0}$ *y podemos aplicar L'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(e-1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x + e^x)(e-1)}{e^x} = e - 1$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} S_R(P) = e - 1$$

y por tanto

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1$$

y que comprobaremos posteriormente con la Regla de Barrow.

Ejemplo 2.4 *Calcula los siguientes límites de sucesiones*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdot + \frac{1}{2n+n}\right)$ *c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)$

a) *Dividimos por n^2 el numerador y denominador de la sucesión*

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^3}{n^2}}=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2}{n}$$

que podemos poner en forma de sumatorio como

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

Si tomamos $f(x)=x^2$, el intervalo $[0,1]$ y una partición en n subintervalos equidistantes obtendremos que el sumatorio anterior es la suma de Riemann para esos parámetros, por tanto, debe ocurrir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}$$

b) *Transformamos la sucesión, sacando el valor n, factor común de cada término*

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdot+\frac{1}{2n+n}=\frac{1}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}+\cdot+\frac{1}{n\left(2+\frac{n}{n}\right)}$$

Sacamos ahora el factor común $\frac{1}{n}$ que se encuentra en todos los sumandos

$$\frac{1}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}+\cdot+\frac{1}{n\left(2+\frac{n}{n}\right)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\left(2+\frac{2}{n}\right)}+\cdot+\frac{1}{\left(2+\frac{n}{n}\right)}\right)$$

que podemos poner en forma de sumatorio como

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)}\frac{1}{n}$$

Si tomamos $f(x)=\frac{1}{2+x}$, el intervalo $[0,1]$ y una partición en n subintervalos equidistantes obtendremos que el sumatorio anterior es la suma de Riemann para esos parámetros, por tanto, debe ocurrir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\left[\ln(2+x)\right]_{x=0}^{x=1}=\ln(3)-\ln(2)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

c) *Transformamos la sucesión*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{n^2} &= \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n}\right)\end{aligned}$$

podemos incluir el valor de n de cada sumando, dentro de la raíz, para ello tenemos que elevar al cuadrado

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n^2-1^2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2-n^2}{n^2}}\right)$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n^2-1^2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2-n^2}{n^2}}\right) &= \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1^2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\frac{1^2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{1-\frac{n^2}{n^2}}\right)
\end{aligned}$$

que podemos poner en forma de sumatorio como

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\frac{1}{n}$$

Si tomamos $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, *el intervalo* $[0,1]$ *y una partición en* n *subintervalos equidistantes obtendremos que el sumatorio anterior es la suma de Riemann para esos parámetros, por tanto, debe ocurrir*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

esta integral se calcula mediante el cambio

$$x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t\ dt$$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt=\int\cos^2 t\ dt=\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}$$

y deshaciendo el cambio

$$t=\arcsin x$$

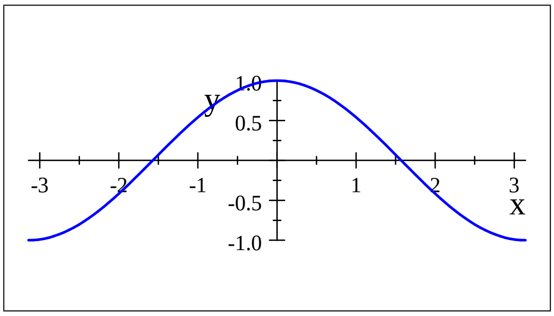
y usando el la fórmula del seno del ángulo doble

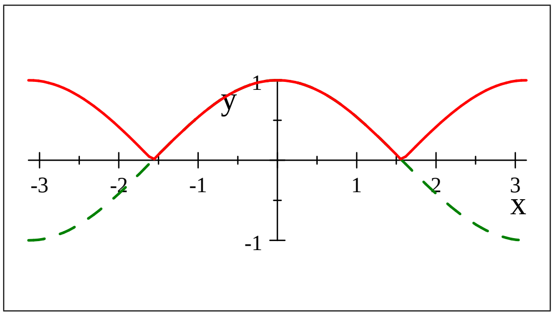
$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2x\sqrt{1-x^2}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx &= \left[\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=1}\\
&= \left(\frac{1}{2}\arcsin 1+\frac{1}{2}1\sqrt{1-1^2}\right)-\left(\frac{1}{2}\arcsin 0+\frac{1}{2}0\sqrt{1-0^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Aunque en el análisis realizado se ha supuesto que $f(x)$ es una función positiva dentro del intervalo, es posible obtener un resultado similar en el caso de que la función tome valores negativos, para ello sólo hay que realizar un cambio de signo en la función en la parte donde es negativa, como en la figura siguiente:





por tanto, en lo sucesivo, no hará falta exigir que la función $f(x)$ sea positiva.

2.2. Propiedades de las funciones integrables

Proposición 2.4 *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, acotada en $[a,b]$, entonces se cumple:*

1. *Si $f\in\mathcal{C}([a,b])\Longrightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.*
2. *Si f es monótona (creciente o decreciente) $\Longrightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.*
3. *Si f es continua en $[a,b]$ salvo una cantidad finita de discontinuidades $\Longrightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.*

Proposición 2.5 *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, integrable Riemann en $[a,b]$, entonces se cumple:*

1. *Si $c\in(a,b)\Longrightarrow f$ es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y además*
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$
.

2. *Si $\alpha\in\mathbb{R}\Longrightarrow\alpha f$ es integrable en $[a,b]$ y*
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Si $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, es otra función integrable Riemann en $[a,b]\Longrightarrow f\pm g$ es integrable en $[a,b]$ y además*
$$\int_a^b (f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

4. *Si $f\geq 0$ en $[a,b]\Longrightarrow$*
$$\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$$

5. *Si $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, es otra función integrable Riemann en $[a,b]$ con $f(x)\leq g(x)$ en $[a,b]\Longrightarrow$*
$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$$

6. $|f(x)|$ *es integrable en* $[a,b]$ *ySi* $f \geq 0$ *en* $[a,b] \Longrightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Observación 2.1 *Si* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, es otra función integrable Riemann en* $[a,b]$*, entonces el producto* $(f \cdot g)(x)$ *también es integrable en* $[a,b]$*, pero en general*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

de hecho se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left(\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)$$

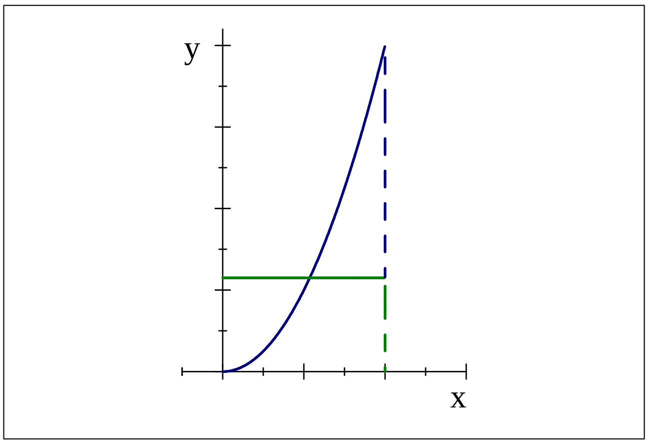
Proposición 2.6 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, integrable en* $[a,b]$*, y sean* m *y* M *los valores mínimos y máximos de* $f(x)$*, respectivamente. Entonces se cumple*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Teorema 2.7 (Teorema de la Media Integral) *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, una función continua en* $[a,b]$*, entonces se cumple:*

$$\exists \xi \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

El teorema indica que el área bajo la curva f puede obtenerse eligiendo un punto adecuado dentro del intervalo.



Ejemplo 2.5 ***Ejercicio 2.1*** *Probar que*

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3} \leq 3$$

Como $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ *es continua en* $(1,2) \Rightarrow \exists \xi \in (1,2)$ *tal que*

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3} = \sqrt{1+\xi^3}\,(2-1) = \sqrt{1+\xi^3}$$

$$\xi \in (1,2) \Rightarrow 1 < \xi < 2 \Rightarrow \xi^3 < 2^3 = 8$$

luego

$$\sqrt{1+\xi^3} \leq \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3.$$

2.3. Función integral. La regla de Barrow.

Definición 2.8 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrable en $[a,b]$, definimos* función integral *asociada a f en $[a,b]$ a la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Es el valor de la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a,x]$.

Teorema 2.8 (Primer teorema fundamental de Cálculo Integral) *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$.*

Teorema 2.9 (Segundo teorema fundamental del Cálculo Integral) *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en $[a,b]$ y se cumple $F'(x) = f(x)$.*

El teorema anterior establece a $F(x)$ como una primitiva de $f(x)$; de ahí que se utilice la misma notación tanto para cálculo de primitivas, como para integrales definidas.

Ejemplo 2.6 *Calcula la derivada de la siguiente función integral usando*

$$F(x) = \int_a^x \cos t^2 \ dt$$

La función $f(x) = \cos\left(t^2\right)$ no tiene primitiva que pueda expresarse sin uso de integrales, es decir, no hay una función expresada mediante funciones elementales cuya derivada sea $f(x)$. Sin embargo como $\cos x^2$ es una función continua en x, entonces $F(x)$ es derivable y

$$F'(x) = f(x) = \cos x^2$$

Proposición 2.10 (Regla de Barrow) *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Rightarrow$*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_{x=a}^{x=b} \equiv [F(x)]_a^b$$

Ejemplo 2.7 *Vamos a calcular la siguiente integral definida*

$$\int_0^1 2x \ dx$$

La función del integrando $f(x) = 2x$ tiene como función primitiva a $F(x) = x^2$, por tanto

$$\int_0^1 2x \ dx = F(1) - F(0) = (1)^2 - (0)^2 = 1$$

Ejemplo 2.8 *Vamos a calcular $\int_0^1 e^x dx$*

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = e - 1$$

como habíamos calculado mediante sumas de Riemann.

Ejemplo 2.9 *Vamos a calcular* $\int_0^1 x^2 dx$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

como habíamos calculado mediante sumas de Riemann.

Proposición 2.11 *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$*, se cumple*

1. $$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

2. $$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposición 2.12 (Regla de la Cadena) *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y sea* $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ *la correspondiente función integral. Si* $h_1, h_2 : [c,d] \to [a,b]$ *son funciones derivables en* $[c,d]$*, si definimos*

$$G(x) = F(h_2(x)) - F(h_1(x)) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\, dt$$

entonces

$$G'(x) = F'(h_2(h))\, h_2'(x) - F'(h_1(h))\, h_1'(x)$$

Ejemplo 2.10 *Vamos a calcular la derivada de la función* $G(x)$ *definida como*

$$G(x) = \int_0^{x^3} \cos\left(t^2\right) dt$$

para ello utilizamos la proposición anterior

$$G'(x) = \cos\left(x^3\right) 3x^2$$

Ejemplo 2.11 *Vamos a calcular la derivada de la función* $G(x)$ *definida como*

$$G(x) = \int_{e^x}^{x^3} \cos\left(t^2\right) dt$$

para ello utilizamos la proposición anterior

$$G'(x) = \cos\left(x^3\right) 3x^2 - \cos\left(e^x\right) e^x.$$

Ejemplo 2.12 *Vamos a calcular la derivada de la función* $G(x)$ *definida como*

$$G(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{\ln(x)}{t^3} dt$$

Notar que en este caso la función $\ln(x)$ *no depende de la variable de integración* t *y por tanto la función* $G(x)$ *se puede expresar como*

$$G(x) = \ln(x) \int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{1}{t^3} dt$$

que es un producto de funciones. Aplicando la derivada de un producto

$$G'(x) = \left(\ln(x)\int_{\operatorname{sen} x}^{x}\frac{1}{t^3}dt\right)' = (\ln(x))'\int_{\operatorname{sen} x}^{x}\frac{1}{t^3}dt + \ln(x)\left(\int_{\operatorname{sen} x}^{x}\frac{1}{t^3}dt\right)'$$

y en la derivada de la integral aplicamos la regla de la cadena para la integración

$$G'(x) = \frac{1}{x}\int_{\operatorname{sen} x}^{x}\frac{1}{t^3}dt + \ln(x)\left(\frac{1}{x^3} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3(x)}\right)$$

finalmente podemos calcular la integral definida teniendo en cuenta que $-\frac{1}{2t^2}$ *es una primitiva de* $\frac{1}{t^3}$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{t=\operatorname{sen} x}^{t=x} + \ln(x)\left(\frac{1}{x^3} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3(x)}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2x}\right) + \ln(x)\left(\frac{1}{x^3} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3(x)}\right) \end{aligned}$$

2.4. Métodos elementales de integración para integrales definidas

Para integrales definidas los métodos de integración por partes y mediante cambio de variable sufre las siguientes modificaciones.

2.4.1. Método de integración por partes

Recordemos que para el cálculo de la primitiva de una función mediante el método de integración por partes obteníamos

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = (u(x)\,v(x)) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Cuando se aplica este método al caso de una integral definida se obtiene el siguiente resultado

Proposición 2.13 *Sea* $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas en* $[a,b]$ *y tales que sus funciones derivadas* u' *y* v' *son integrables en* $[a,b]$*. Se cumple*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)\,v(x)\,dx = (u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Ejemplo 2.13 *Vamos a calcular la siguiente integral definida mediante el método de integración por partes*

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Al ser la función del integrando un producto de un polinomio por la función exponencial, tomaremos como función $u(x)$ *el polinomio, es decir,* $u(x) = x$*, mientras que la función* $v'(x)$ *será la exponencial,* $v'(x) = e^x$*. De este modo tendremos* $u'(x) = 1$ *y* $v(x) = e^x$*, de modo que*

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= x \cdot e^x|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\ &= e - e^x|_{x=0}^{x=1} = e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

2.4.2. Método de integración por cambio de variable

Recordemos que el método de cambio de variable para el cálculo de primitivas consiste en cambiar el integrando usando la regla de la cadena, para obtener una función cuya primitiva. En el caso de integrales definidas obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.14 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y $g : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1([\alpha,\beta])$ y tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Entonces se cumple*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Ejemplo 2.14 *Vamos a calcular la siguiente integral definida mediante el método cambio de variable*

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

La integral es de tipo radical que ya está expresado en la forma canónica, por tanto podemos hacer el cambio de variable

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x = a \operatorname{sen} t \\ dx &= a \cos t\ dt \end{aligned}$$

En este caso

$$g(t) = a \operatorname{sen} t$$

así que

$$g(\alpha) = a \Rightarrow g(\alpha) = 0 \Rightarrow a \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$g(\beta) = b \Rightarrow g(\beta) = a \Rightarrow a \operatorname{sen}\beta = a \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\,(a\cos t)\,dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2t)}{2} dt = a^2 \left. \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= a^2 \left(\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}{4} \right) \right) \\ &= a^2 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15 *Vamos a calcular la siguiente integral definida mediante el método de cambio de variable*

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$$

Podemos hacer el cambio de variable

$$\begin{aligned} x + 1 &= t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx &= 2t\ dt \end{aligned}$$

y por tanto

$$t=\sqrt{x+1}\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow t=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2\\ \\ x=0\Rightarrow t=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1\end{cases}$$

por tanto

$$\int_0^3\sqrt{x+1}dx=\int_1^2\sqrt{t^2}2t\ dt=\int_1^2 2t^2\ dt=\left[\frac{2t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2}=\frac{2}{3}(2)^3-\frac{2}{3}(1)^3=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$$

2.5. Integrales Impropias

Al definir la integral de Riemann o integral definida se ha considerado en todo momento a funciones acotadas en intervalos compactos. En esta sección vamos a dar algunos resultados de integración cuando alguno de estos elementos no está presente, o bien la función no es acotada en el intervalo, o bien el intervalo no es cerrado.

2.5.1. Integrales impropias de primera especie

En este tipo de integrales el intervalo es no acotado.

Definición 2.9 *Sea $f:[a,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a,x]$ con $x\geq a$. Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como $\int_a^\infty f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_a^{+\infty}f=\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice* divergente*.*

Si $F(x)$ es una primitiva de f entonces, si usamos la regla de Barrow, podemos poner

$$\int_a^{+\infty}f=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(a)$$

Ejemplo 2.16 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

para ello calcularemos para cada $x\geq 0$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=x}=-e^{-x}-\left(-e^0\right)=1-e^{-x}$$

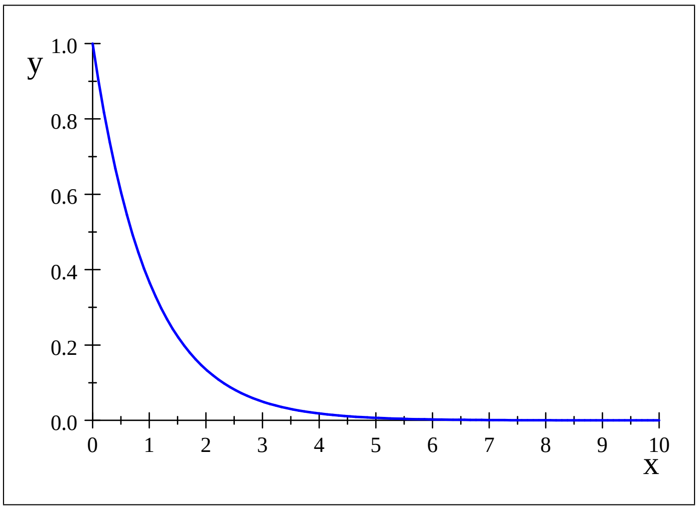
Si calculamos ahora el límite cuando $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1-0,$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$$

Podemos comprobar en la siguiente gráfica cómo la función $f(x)=e^{-x}$ decrecre muy rápidamente hacia 0, lo que hace que el área que se encuentre bajo la curva sea finita, aunque el intervalo sea no acotado:



Ejemplo 2.17 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} dx$$

para ello calcularemos para cada $x \geq 0$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t)|_{t=0}^{t=x} = -\ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

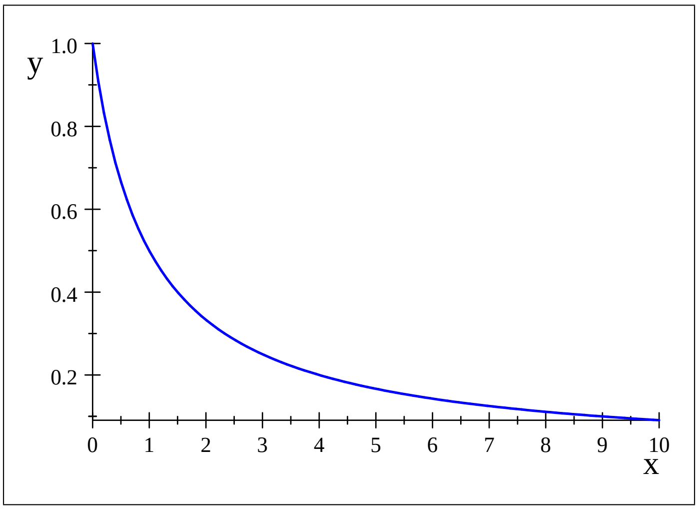
Si calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x) = \infty$$

luego podemos decir que la integral es divergente

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Podemos comprobar en la siguiente gráfica cómo la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ decrecre muy rápidamente hacia 0, lo que hace que el área que se encuentre bajo la curva sea finita, aunque el intervalo sea no acotado:



Ejemplo 2.18 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$$

para ello calcularemos para cada $x \geq 0$ *la integral definida*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{4+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} dt = \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctan 0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

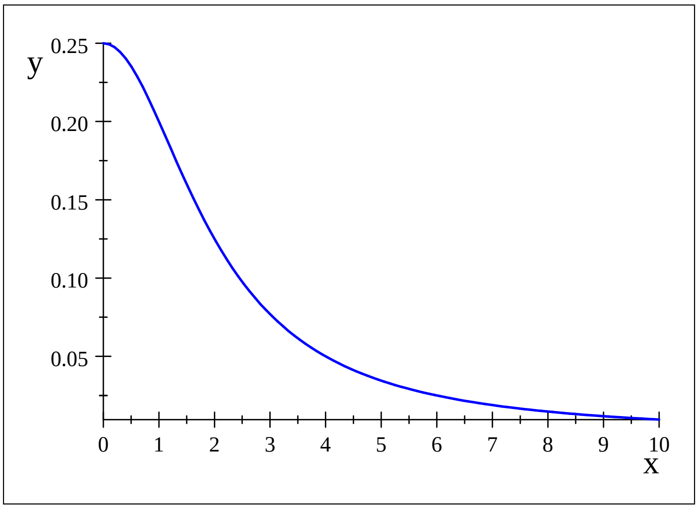
y calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Podemos comprobar en la siguiente gráfica cómo la función $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ *decrecre muy rápidamente hacia* 0*, lo que hace que el área que se encuentre bajo la curva sea finita, aunque el intervalo sea no acotado:*



Ejemplo 2.19 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$$

para ello calcularemos para cada $x \geq 0$ *la integral definida*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{4+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} dt = \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctan 0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

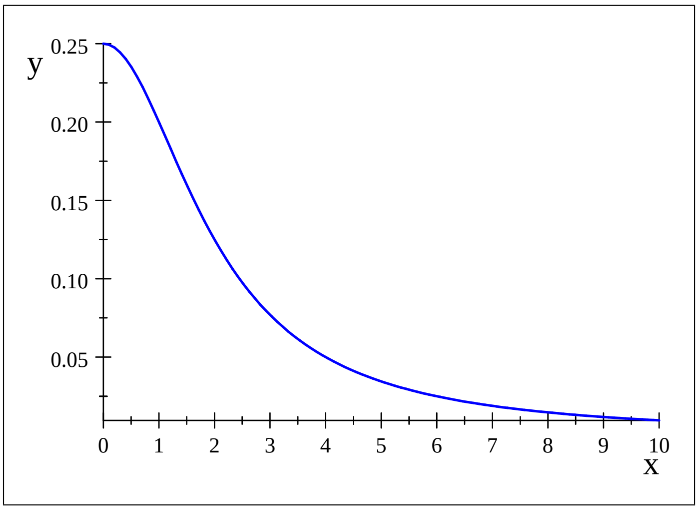
y calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Podemos comprobar en la siguiente gráfica cómo la función $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ *decrecre muy rápidamente hacia* 0*, lo que hace que el área que se encuentre bajo la curva sea finita, aunque el intervalo sea no acotado:*



Ejemplo 2.20 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

Por definición

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \lim_{x \to \infty} \int_1^{x} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^{x} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt$$

buscamos una primitiva haciendo el cambio de variable $t = u^2$*, por tanto* $dt = 2udu$

$$\int \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt = \int \frac{u}{(1+u^2)^2} 2udu = \int \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} du$$

integral que se debe resolver mediante el método de Hermite, puesto que el denominador tiene raíces complejas múltiples.

$$\frac{2u^2}{(1+u^2)^2} = \frac{Au+B}{1+u^2} + H'(u)$$

con

$$H(u) = \frac{Cu+D}{1+u^2} \Rightarrow H'(u) = \frac{C\left(1+u^2\right) - 2u\left(Cu+D\right)}{(1+u^2)^2} = \frac{-Cu^2 - 2Du + C}{(1+u^2)^2}$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{2u^2}{(1+u^2)^2} &= \frac{Au+B}{1+u^2}+\frac{-Cu^2-2Du+C}{(1+u^2)^2} \\
&= \frac{(Au+B)\left(1+u^2\right)-Cu^2-2Du+C}{(1+u^2)^2} \\
&= \frac{Au+Au^3+B+Bu^2-Cu^2-2Du+C}{(1+u^2)^2} \\
&= \frac{Au^3+(B-C)\,u^2+(A-2D)\,u+(B+C)}{(1+u^2)^2}
\end{aligned}
$$

e igualando coeficientes en el numerador

$$
\begin{aligned}
A &= 0 \\
B-C &= 2 \\
A-2D &= 0 \\
B+C &= 0
\end{aligned}
$$

que tiene por solución

$$
\begin{aligned}
A &= D=0 \\
B &= 1 \\
C &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{1+u^2}+\left(\frac{-u}{1+u^2}\right)'
$$

e integrando

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2u^2}{(1+u^2)^2}du &= \int \frac{1}{1+u^2}du+\int\left(\frac{-u}{1+u^2}\right)'du \\
&= \arctan u-\frac{u}{1+u^2}
\end{aligned}
$$

y deshaciendo el cambio

$$
\int \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt=\arctan\sqrt{t}-\frac{\sqrt{t}}{1+t}
$$

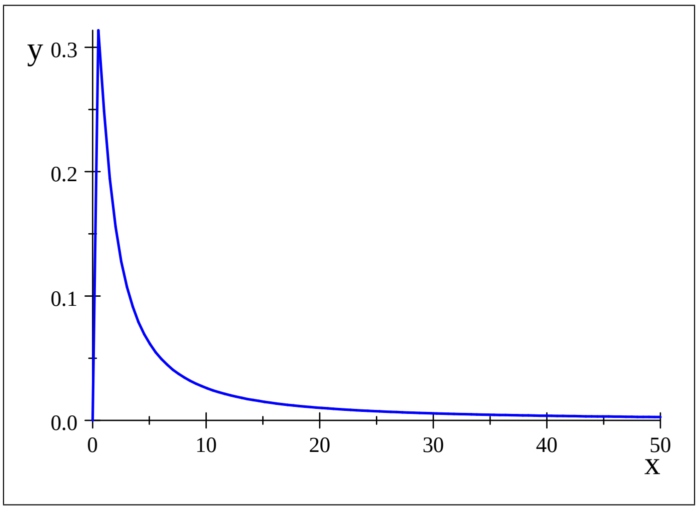
La integral definida

$$
\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt &= \left[\arctan\sqrt{t}-\frac{\sqrt{t}}{1+t}\right]_{t=1}^{t=x}=\left[\arctan\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]-\left[\arctan\sqrt{1}-\frac{1}{1+1}\right] \\
&= \left[\arctan\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]-\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

y tomando límites

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt = \lim_{x\to\infty}\left[\arctan\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]-\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

Podemos comprobar en la siguiente gráfica cómo la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$ *decrece muy rápidamente hacia* 0



Del mismo modo podemos trabajar con integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Definición 2.10 *Sea* $f:\,]-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[x,b]$ *con* $x\le b$. *Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como* $\int_{-\infty}^{b} f$, *como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{-\infty}^{b} f=\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice* divergente.

Como antes, si $F(x)$ *es una primitiva de* f *, y usamos la regla de Barrow, podemos poner*

$$\int_{-\infty}^{b} f=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

Ejemplo 2.21 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{0}\sqrt{e^x}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{x}{2}}dx$$

para ello calcularemos para cada $x\le 0$ *la integral definida*

$$\int_x^0 f(t)\,dt=\int_x^0 e^{\frac{t}{2}}dt=2e^{\frac{t}{2}}\Big|_{t=x}^{t=0}=2e^0-\left(2e^{\frac{x}{2}}\right)=2-2e^{\frac{x}{2}}$$

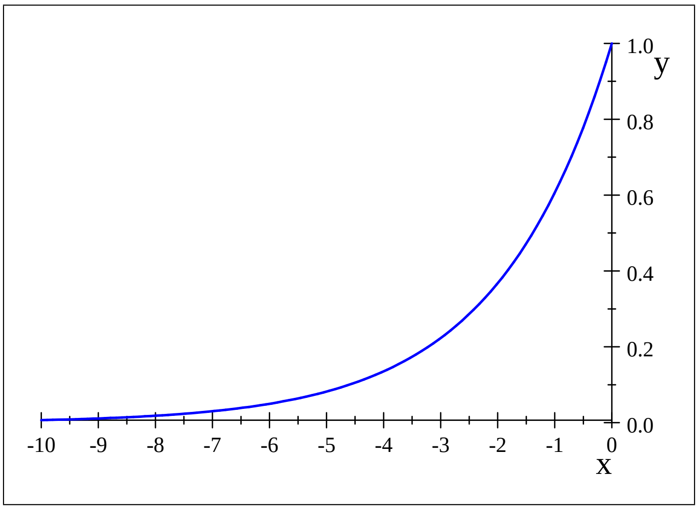
y calculamos ahora el límite cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)\, dt = \lim_{x \to -\infty} 2 - 2e^{\frac{x}{2}} = 2$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-\infty}^0 \sqrt{e^x} dx = 2.$$

Finalmente también podemos definir la integral sobre toda la recta real.



Definición 2.11 *Sea $f :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[x, y]$ con $x \leq y$. Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como $\int_{-\infty}^{\infty} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\, dt + \lim_{y \to \infty} \int_a^y f(t)\, dt$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$. La integral es convergente *si ambos límites son finitos y su valor será la suma de esos dos límites, si alguno de los límites no existe o es infinito, la integral será divergente.*

Hay que observar que el cálculo anterior no es equivalente al cálculo del siguiente límite

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^x f(t)\, dt$$

Este valor se denomina *Valor Principal de* $\int_{-\infty}^{\infty} f$, expresado como $V.P.\left(\int_{-\infty}^{\infty} f\right)$, y coincidirá con el valor de la integral en el caso de ésta sea convergente. Este valor se puede calcular usando la regla de Barrow generalizada de forma que si F es una primitiva de f, entonces

$$V.P.\left(\int_{-\infty}^{\infty} f\right) = \lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

Ejemplo 2.22 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx$$

Tomamos $a = 0$ *y debemos comprobar si las siguientes integrales*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx \ \ y \ \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx$$

son convergentes. Para ello calcularemos para cada $x \in \mathbb{R}$ *las siguientes integrales definidas*

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{e^{-t}+e^{t}}dt$$

Buscamos una primitiva, para ello hacemos el cambio de variable $e^{t} = s \Rightarrow e^{t}dt = ds \Rightarrow dt = \frac{1}{e^{t}}ds = \frac{1}{s}ds$ *además* $e^{-t} = \frac{1}{e^{t}} = \frac{1}{s}$

$$\int \frac{1}{e^{-t}+e^{t}}dt = \int \frac{1}{\frac{1}{s}+s}\frac{1}{s}ds = \int \frac{1}{1+s^{2}}ds = \arctan s$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{e^{-t}+e^{t}}dt = \arctan e^{t}$$

Calcularemos la primera integral usando Barrow

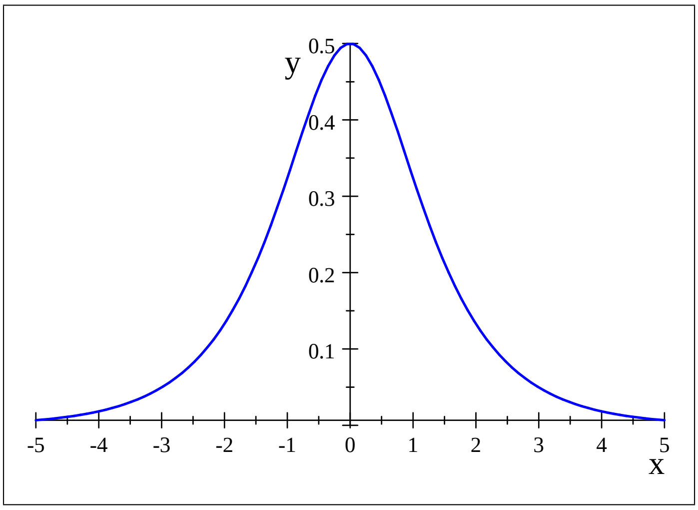
$$\int_{0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} \frac{1}{e^{-t}+e^{t}}dt = \lim_{x\to\infty} \arctan e^{x} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

y ahora la segunda

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} \frac{1}{e^{-t}+e^{t}}dt = \lim_{x\to-\infty} 1 - \arctan e^{x} = \frac{\pi}{4} - 0$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$



Ejemplo 2.23 *Vamos a calcular en función de* $\lambda \in \mathbb{R}$*, con* $\lambda \neq 0$*, la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}dx$$

Tomamos $\lambda = 0$ *y debemos comprobar si las siguientes integrales*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda|x|}dx \ y \ \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda|x|}dx$$

son convergentes. Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & Si\ x \geq 0 \\ -x & Si\ x < 0 \end{cases}$$

las integrales quedan como siguen

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda|x|}dx \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda(-x)}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda|x|}dx \quad \Rightarrow \quad x \geq 0 \Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda(x)}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx$$

Calculamos cada integral

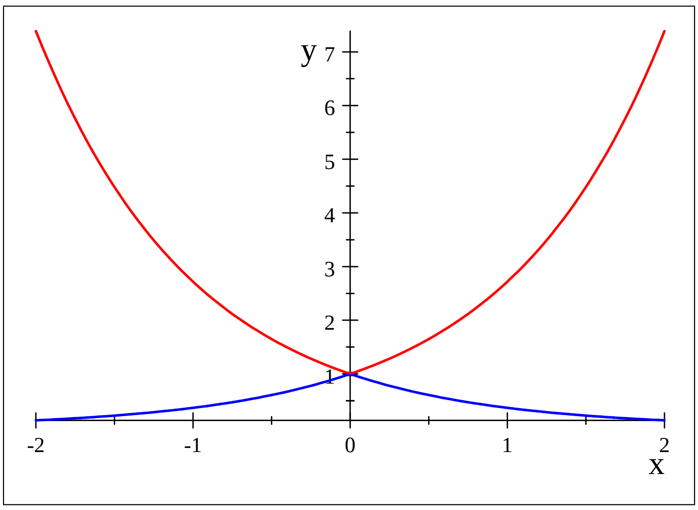
$$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} e^{\lambda t}dt = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right]_{t=x}^{t=0} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{\lambda x}\right)$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} e^{-\lambda t}dt = \lim_{x\to-\infty} \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}\right)$$

Si $\lambda < 0$*, entonces ambos límites son* ∞*, mientras que si* $\lambda > 0$*, entonces ambos límites valen* 0*, por tanto la integral sólo será convergente si* $\lambda > 0$ *y en este caso*

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \\ \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

En la siguiente gráfica vemos un caso para $\lambda > 0$ *(azul) y para* $\lambda < 0$ *(rojo), como podemos comprobar en el caso negativo la gráfica de la función crece de forma indefenida a ambos lados del eje OY lo que implica que el área bajo la curva no puede ser un valor finito.*



Ejemplo 2.24 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx$$

Para ello elegimos $a = 0$ y debemos comprobar si existen las integrales $\int_{-\infty}^{0} x\ dx$ y $\int_{0}^{\infty} x\ dx$. Una primitiva de x es $F(x) = \frac{x^2}{2}$ luego

$$\int_{-\infty}^{0} x\ dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2} = \infty$$

No es necesario calcular el otro límite puesto que este es infinito.

Notar que el valor principal sería

$$V.P. \left(\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} x\ dx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(F(x) - F(-x)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(-x)^2}{2} \right) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

que existe y es finito, sin embargo como hemos visto, la integral es divergente.

Aplicaciones

Como aplicación de las integrales impropias de primera especie tenemos entre otras, la transformada de Laplace o la transformada de coseno, que se definen como

Definición 2.12 (Transformada de Laplace) *Dada $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, se define la* transformada de Laplace *de f como*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

por ejemplo, si $f(t) = e^{\omega t}$ con $\omega > 0$ un valor fijo, entonces para $s > \omega$

$$\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} e^{\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{(\omega - s)t} dt = \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} e^{(\omega - s)t} dt = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^{(\omega - s)t}}{\omega - s} \right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(\omega - s)x}}{\omega - s} - \frac{1}{\omega - s}$$

y como $s > \omega$, entonces $\omega - s < 0$ y por tanto $(\omega - s)x \to -\infty$, cuando $x \to \infty$ y la exponencial converge al 0, quedando

$$\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) = -\frac{1}{\omega - s} = \frac{1}{s - \omega} \text{ para } s > \omega$$

2.5.2. Integrales impropias de segunda especie

En el apartado anterior se han considerado intevalos no acotados y por tanto se tenía que definir la integral en sentido Riemann de forma impropia, en este apartado el intervalo será acotado y será la función que queremos integrar la que tenga problemas en este sentido.

Definición 2.13 *Sea $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada en b, $(\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty)$, pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a, x]$ con $a \leq x < b$. Se define* integral impropia de segunda especie, *y se representa como $\int_a^{b^-} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{a}^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito, siendo éste el valor de la integral, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ es una primitiva de f y usamos la regla de Barrow generalizada, podemos poner

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

Ejemplo 2.25 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia*

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

que es de segunda especie, puesto que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$$

para ello calcularemos para cada $0 \leq x < 2$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt$$

Buscamos una primitiva usando el cambio $x = 2 \operatorname{sen} t$ con $dx = 2 \cos t dt$, de modo que

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}} 2\cos t dt = \int dt = t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$$

y por tanto

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt = \operatorname{arcsen} \frac{t}{2} \bigg|_{t=0}^{t=x} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$$

Si ahora calculamos el límite cuando $x \to 2^-$

$$\lim_{x \to b^-} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x \to 2^-} \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 2.26 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$$

que es impropia de segunda especie puesto que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Para ello calcularemos para cada $-1 \leq x < 0$ la integral definida

$$\int_{-1}^x f(t)\, dt = \int_{-1}^x \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_{t=-1}^{t=x} = \ln |x| - \ln |-1| = \ln |x| - \ln 1 = \ln |x|$$

Si ahora calculamos el límite cuando $x \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x \to 0^-} \ln |x| = -\infty$$

luego podemos decir que la integral es divergente.

Ejemplo 2.27 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$$

que es de segunda especie, puesto que no está acotada en $x = \frac{\pi}{2}$*. Buscamos una primitiva de la función del integrando y está claro que es inmediata, puesto que es de la forma*

$$\int f'(x) f(x)^{\alpha} dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

donde $f(x) = (1-\sin x)$ *y* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *y por tanto* $f'(x) = \cos(x)$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -\int \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -\frac{(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -2\sqrt{1-\sin(x)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx &= \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\left[-2\sqrt{1-\sin(x)} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \left(-2\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \left(\left[-2\sqrt{1-\sin(0)} \right] \right) \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Definición 2.14 *Sea* $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función no acotada en* a*, ,* $(\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty)$*,pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[x,b]$ *con* $a < x \leq b$*. Se define* integral impropia de segunda especie, *y se representa como* $\int_{a^+}^b f$*, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{a^+}^b f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito, siendo este el valor de la integral, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ *es una primitiva de* f *y usamos la regla de Barrow, podemos poner*

$$\int_{a^+}^b f = F(b) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Ejemplo 2.28 *Vamos a calcular la siguiente integral*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

que es de segunda especie, puesto que no está acotada en $x = 0$*, puesto que anula el denominador del integrando. Buscamos una primitiva de la función del integrando, para ello hacemos el cambio de variable* $x = t^2$ *de modo que* $\sqrt{x} = t$ *y* $dx = 2tdt$ *quedando la integral como*

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\ln t^2}{t} 2t\ dt = \int 4 \ln t\ dt$$

y esta última la hacemos por partes, tomando $u = \ln t$ *y* $v' = 4dt$*, es decir* $u' = \frac{1}{t}dt$ *y* $v = 4t$

$$\int 4\ln t\ dt = 4t\ln t - \int 4t\frac{1}{t}dt = 4\left(t\ln t - t\right)$$

Deshacemos el cambio $t = \sqrt{x}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) = \left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right) = F\left(x\right)$$

Si ahora se toman límites cuando $x \to 0^+$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f\left(t\right)dt = F\left(1\right) - \lim_{x\to 0^+} F\left(x\right) = -4 - \lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right)$$

El primer sumando del límite lo podemos calcular por L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = -4.$$

Finalmente también podemos definir integrales impropias de segunda especie cuando la función no está acotada en un punto del interior del intervalo como sigue.

Finalmente también podemos definir integrales impropias de segunda especie cuando la función no está acotada en un punto del interior del intervalo como sigue.

Definición 2.15 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada e integrable* $[a,b]$ *salvo para* $c \in (a,b)$*, es decir, la función es acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[a,x]$ *con* $x < c$ *y en cualquier intervalo de la forma* $[x,b]$ *con* $x \geq c$*. Se define* integral impropia de segunda especie, *y se representa como* $\int_a^b f$*, si existen las dos integrales impropias*

$$\int_a^{c^-} f\left(x\right)dx \ \text{ y } \int_{c^+}^b f\left(x\right)dx$$

siendo el valor de la integral

$$\int_a^b f = \int_a^{c^-} f\left(x\right)dx + \int_{c^+}^b f\left(x\right)dx$$

La integral es divergente *si alguna de las dos integrales no es convergente.*

Notar que, como en el caso de las integrales impropias de primera especie, el cálculo anterior no es equivalente a calcular la integral directmente

$$\int_a^b f\left(x\right)dx$$

que se denomina, como antes, *Valor principal de* $\int_a^b f$*, V.P.* $\left(\int_a^b f\right)$ y que coincidirá con el valor de la integral, siempre que ésta sea convergente.

Ejemplo 2.29 *Probaremos que la integral*

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

es divergente.

Si hacemos el cálculo directamente

$$V.P\left(\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{(x-1)}\Bigg|_{x=0}^{x=3} = -\frac{1}{(3-1)} - \left(-\frac{1}{0-1}\right) = -\frac{1}{2}+1 = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo la función no está acotada en $x=1$ puesto que el denominador se anula en ese punto, así que tenemos que comprobar qué ocurre en los intervalos $[0,1)$ y $(1,3]$, usamos el hecho de que $F(x) = -\frac{1}{(x-1)}$ es una primitiva de $f(x)$ para poner

$$\int_0^{1^-} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} F(x) - F(0) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{(x-1)} + 1 = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \infty$$

que es divergente y por tanto no es necesario calcular la otra parte.

Ejemplo 2.30 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de segunda especie*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_{-1}^{1} x^{-1/3}dx$$

Es de segunda especie puesto que el denominador de la función se anula en $x=0\in(-1,1)$. Para ver si es convergente hay que estudiar qué ocurre en los intervalos $[-1,0)$ y $(0,1]$ Es fácil comprobar que $F(x) = \frac{3}{2}x^{2/3}$ es una primitiva del integrando. El cálculo de la primera integral usando Barrow es

$$\int_{-1}^{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{x\to 0^-} F(x) - F(-1) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

y ahora la segunda

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = F(1) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{3}{2} - \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x^{2/3} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right) = 0,$$

que coincidirá con el cálculo del Valor Principal

$$V.P.\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx\right) = F(1) - F(-1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0,$$

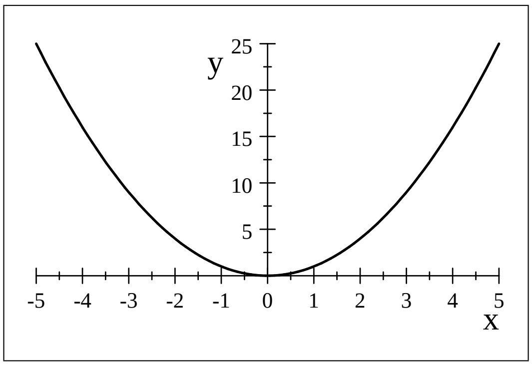
aunque este método no es correcto y debe hacerse de la forma anterior.

2.6. Aplicaciones del cálculo integral

En esta sección se introducen algunas de las aplicaciones del cálculo integral.

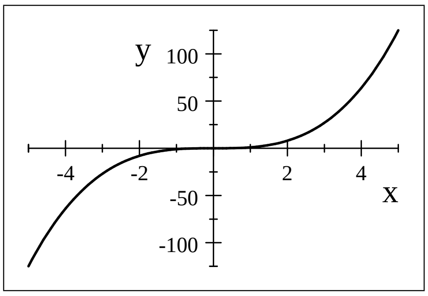
2.6.1. Áreas de recintos planos

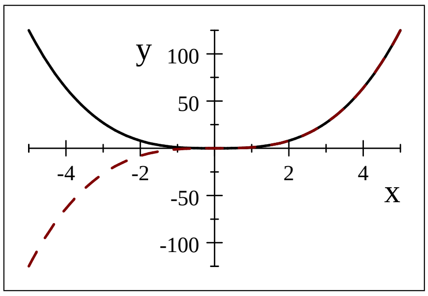
Si $f(x) \geq 0$, entonces se ha comprobado que el área bajo la curva se puede calcular mediante la integral definida



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

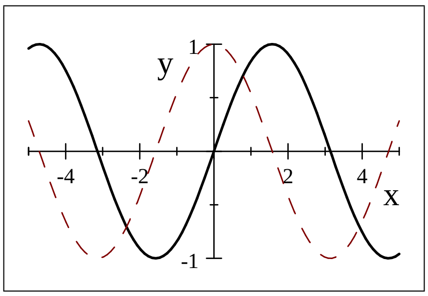
Para el caso general, hay que tener en cuenta que la función puede ser positiva o negativa, por lo tanto para el cálculo del área hay que tener en cuenta el valor absoluto, por tanto





$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

El caso anterior es un caso particular del cálculo de áreas entre dos curvas que se entrecruzan



en este caso la podemos calcular el área entre ellas como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

2.6.2. Volúmenes de revolución

El volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

El volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

2.6.3. Volumen de un sólido por secciones planas

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

Siendo $A(x)$ el área de la sección en el punto x.

2.6.4. Longitud de una arco de curva plana

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

2.6.5. Área de una superficie de revolución