MATEMÁTICAS II
OpBas04: Operaciones Básicas del Tema 1

1. **Calcula en radianes el argumento de** $-1 + i\sqrt{3}$.

   Solución: El número complejo $-1 + i\sqrt{3}$ está situado en el segundo cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

   y sabiendo que

   $$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

   Como estamos en el segundo cuadrante, entonces

   $$\varphi \in \arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \left\{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi\right\} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

2. **Calcula el inverso de** $7 - 4i$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador podemos poner:

   $$z^{-1} = \frac{1}{7 - 4i} = \frac{(7 + 4i)}{(7 - 4i)(7 + 4i)} = \frac{7 + 4i}{7^2 + 4^2} = \frac{7 + 4i}{65} = \frac{7}{65} + \frac{4}{65}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\dfrac{(1 + 2i)}{(2 - 3i)}$

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{(1 + 2i)}{(2 - 3i)}\right| = \frac{|(1 + 2i)|}{|(2 - 3i)|} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{13}\sqrt{65}$$

4. **Calcula** $(1 + 2i)^3$**, expresando el resultado en forma binómica.**

   Solución: Es posible encontrar la solución utilizando la expresión del binomio de Newton

   $$\begin{aligned}
   (1 + 2i)^3 &= \binom{3}{0}(1)^0(2i)^3 + \binom{3}{1}(1)^1(2i)^2 + \binom{3}{2}(1)^2(2i)^1 + \binom{3}{3}(1)^3(2i)^0 \\
   &= (2i)^3 + 3(2i)^2 + 3(2i)^1 + (2i)^0 \\
   &= 8i^3 + 3 \cdot 4i^2 + 3 \cdot 2i + 1 \\
   &= -8i - 12 + 6i + 1 \\
   &= -11 - 2i
   \end{aligned}$$

o como es una potencia pequeña, multiplicando directamente

$$(1+2i)^3 = (1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i) = (-3+4i)\cdot(1+2i) = -11-2i$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$ y expresa el resultado en forma trigonométrica.**

   Solución: Para realizar el cálculo de la raíz, en primer lugar ponemos el número complejo $\sqrt{3}+3i$ en forma polar, para ello calculamos su módulo

$$\left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12}$$

   y su argumento, teniendo en cuenta que está en el primer cuadrante

$$\varphi = \arctan\frac{3}{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

   El número complejo del radicando es en forma polar

$$\left(\sqrt{12}\right)e^{i\pi/3} = \left(12^{1/2}\right)e^{i\pi/3}$$

   Utilizamos ahora la definición de raíz cuarta

$$w_k = \left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i\varphi_k} \quad \text{con } \varphi_k = \frac{\pi/3+2k\pi}{4} \qquad k=0,1,2,3$$

   luego

$$\left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i\varphi_k} = \begin{cases} \left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i\pi/12} & = 12^{1/8}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \quad k=0 \\ \left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i7\pi/12} & = 12^{1/8}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right) \quad k=1 \\ \left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i13\pi/12} & = 12^{1/8}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right) \quad k=2 \\ \left(12^{1/2}\right)^{1/4}e^{i19\pi/12} & = 12^{1/8}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right) \quad k=3 \end{cases}$$

6. **Calcula $\dfrac{(-1+i)}{(3-8i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{-1+i}{3-8i} = \frac{(-1+i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{(-3-8)+i(-8+3)}{3^2+8^2} = \frac{-11-5i}{73} = -\frac{11}{73}-i\frac{5}{73}$$

7. **Expresa $(-2+2i)$ en forma exponencial. Utiliza los argumentos en radianes.**

   Solución: El argumento φ del número $-2+2i$, que se encuentra en el segundo cuadrante y se calcula como

$$\varphi = \pi+\arctan\frac{-2}{2} = \pi+\arctan -1 = \pi-\pi/4 = \frac{3\pi}{4}$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-2+2i = |-2+2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

8. **Calcula $i^{34} - i^{40}$ y expresa el resultado en forma binómica**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

$$i^{34} - i^{40} = i^{4*8+2} - i^{4*10} = i^2 - 1 = -1 - 1 = -2$$

9. **Calcula $\dfrac{(-1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$ en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes.**

   Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma exponencial, teniendo en cuenta que del ejercicio 7

$$(-1+i) = \frac{1}{2}(-2+2i) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

   mientras que del ejercicio 1:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right) = (-1)\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = e^{i\pi} \cdot 2e^{i2\pi/3} = 2e^{i5\pi/3}$$

   y ahora hacemos la división

$$\frac{(-1+i)}{(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}{2e^{i5\pi/3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{i(3\pi/4-5\pi/3)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{11}{12}\pi}$$

10. **Calcula $(7+3i) \cdot (1-5i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

    Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(7+3i) \cdot (1-5i) = 7 - 35i + 3i - 15i^2 = 22 - 32i$$