MATEMÁTICAS II
OpBas03: Operaciones Básicas del Tema 1

1. **Calcula en radianes el argumento de** $1 - i\sqrt{3}$.

   Solución: El número complejo $1 - i\sqrt{3}$ está situado en el cuarto cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

   Y sabiendo que

   $$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

   y que

   $$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

   entonces

   $$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

   La respuesta correcta sería

   $$\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. **Calcula el inverso de** $6 + 4i$ **en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador podemos poner:

   $$z^{-1} = \frac{1}{6+4i} = \frac{(6-4i)}{(6+4i)(6-4i)} = \frac{6-4i}{6^2+4^2} = \frac{6-4i}{52} = \frac{6}{52} - \frac{4}{52}i = \frac{3}{26} - \frac{1}{13}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\dfrac{(1+5i)}{i(2+3i)}$.

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{(1+5i)}{i(2+3i)}\right| = \frac{|(1+5i)|}{|i|\,|(2+3i)|} = \frac{\sqrt{1^2+5^2}}{1\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2*13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}$$

4. **Calcula** $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$, **expresando el resultado en forma binómica.**

Solución: Podemos utilizar la expresión en módulo y argumento del número complejo para encontrar el valor de esta potencia. Como estamos en el primer cuadrante

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \\ \left|\sqrt{3}+i\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2\end{aligned}$$

Luego la expresión exponencial de este complejo es

$$2e^{i\pi/6}$$

Si utilizamos las propiedades de las potencias enteras de números complejos, al elevar al cubo

$$\left(2e^{i\pi/6}\right)^3 = 2^3 e^{i3\pi/6} = 2^3 e^{i\pi/2} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{1}$ y escribe el resultado en forma binómica**

   Solución: En forma polar, el número complejo 1 puede ponerse como

$$1_0$$

   luego las raíces cuartas 1 serán

$$1^{1/4}e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)} = \begin{cases} 1^{1/4}e^{i\cdot 0} & = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0 = 1 \quad k=0 \\ 1^{1/4}e^{i\pi/2} & = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i \quad k=1 \\ 1^{1/4}e^{i\pi} & = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 \quad k=2 \\ 1^{1/4}e^{i3\pi/2} & = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i \quad k=3 \end{cases}$$

6. **Calcula $\dfrac{(1+i)}{(3+8i)}$ en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{1+i}{3+8i} = \frac{(1+i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \frac{(3+8)+i(-8+3)}{3^2+8^2} = \frac{11-5i}{73} = \frac{11}{73} - i\frac{5}{73}$$

7. **Expresa $2+2i$ en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes**

   Solución: El argumento φ del número $2+2i$, que se encuentra en el primer cuadrante, se calcula como

$$\varphi = \arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 = \pi/4$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$2+2i = |2+2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

8. **Expresa** $\dfrac{(2i^{34}-i^{40})}{(3i^{30}-i^{19})}$ **en forma binómica.**

Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

$$\frac{(2i^{34}-i^{40})}{(3i^{30}-i^{19})}=\frac{2i^{4*8+2}-i^{4*10}}{3i^{4*7+2}-i^{4*4+3}}=\frac{2i^2-1}{3i^2-i^3}=\frac{-2-1}{-3+i}=\frac{-3}{-3+i}=\frac{9}{10}+i\frac{3}{10}$$

9. **Calcula** $\dfrac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})}$ **en forma modulo-argumental, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma exponencial, teniendo en cuenta que del ejercicio 7

$$(1+i)=\frac{1}{2}(2+2i)=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

mientras que del ejercicio 1:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)=\overline{\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\overline{2e^{-i\pi/3}}=2e^{i\pi/3}$$

y ahora hacemos la división

$$\frac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i(\pi/4-\pi/3)}=\left(\sqrt{2}\right)e^{-i\pi/12}$$

10. **Calcula** $(2+5i)\cdot(2-4i)$

Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(2+5i)\cdot(2-4i)=4-8i+10i-20i^2=24+2i$$