MATEMÁTICAS II
OpBas02: Operaciones Básicas del Tema 1

1. **Calcula en radianes el argumento que** $\sqrt{3}-i$ **tiene en el intervalo** $[0,2\pi[$

   Solución: El número complejo $\sqrt{3}-i$ está situado en el cuarto cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

   Y sabiendo que

   $$\varphi = -\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

   entonces

   $$\varphi \in -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

   como buscamos el argumento que se encuentra en el $[0,2\pi]$, tomamos $k=0$, para obtener

   $$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in [0,2\pi]$$

2. **Calcula el inverso de** $4+6i$ **en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador podemos poner:

   $$\frac{1}{4+6i} = \frac{(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{4-6i}{4^2+6^2} = \frac{4-6i}{52} = \frac{4}{52} - \frac{6}{52}i = \frac{1}{13} - \frac{3}{26}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\frac{i(2+3i)}{(1+5i)}$.

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{i(2+3i)}{(1+5i)}\right| = \frac{|i|\,|(2+3i)|}{|(1+5i)|} = \frac{1\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2*13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. **Calcula** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$**, expresando el resultado en forma binómica.**

   Solución: Podemos utilizar la expresión en módulo y argumento del número complejo para encontrar el valor de esta potencia. Como estamos en el primer cuadrante

   $$\begin{aligned}\varphi &= \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}\\ \left|1+i\sqrt{3}\right| &= \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\end{aligned}$$

Luego la expresión exponencial este complejo es

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

y elevamos al cubo:

$$\left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = 2^3 e^{3i\pi/3} = 2^3 e^{i\pi} = 8\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -8$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{-1}$ y escribe el resultado en forma binómica**

   Solución: En forma exponencial el número complejo -1 puede ponerse como

   $$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

   y las raíces en forma polar, trigonométrica y binómica son

   $$\begin{aligned}
   w_1 &= \sqrt[4]{1}e^{i\frac{\pi+0\cdot 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{1}e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.\\
   w_2 &= \sqrt[4]{1}e^{i\frac{\pi+1\cdot 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{1}e^{i3\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.\\
   w_3 &= \sqrt[4]{1}e^{i\frac{\pi+2\cdot 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{1}e^{i5\pi/4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.\\
   w_4 &= \sqrt[4]{1}e^{i\frac{\pi+3\cdot 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{1}e^{i7\pi/4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.
   \end{aligned}$$

6. **Calcula $\dfrac{3+8i}{1+i}$ en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

   $$\frac{3+8i}{1+i} = \frac{(3+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{11+5i}{2} = \frac{11}{2} + i\frac{5}{2}$$

7. **Expresa $-2-2i$ en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes**

   Solución: El argumento φ del número $-2-2i$, que se encuentra en el tercer cuadrante, se calcula como

   $$\varphi = \arctan\frac{-2}{-2} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

   $$-2-2i = |-2-2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

8. **Expresa $\dfrac{(3i^{30} - i^{19})}{(2i^{34} - i^{40})}$ en forma binómica.**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

   $$\frac{(3i^{30} - i^{19})}{(2i^{34} - i^{40})} = \frac{3i^{4*7+2} - i^{4*4+3}}{2i^{4*8+2} - i^{4*10}} = \frac{3i^2 - i^3}{2i^2 - 1} = \frac{-3+i}{-2-1} = \frac{-3+i}{-3} = \frac{-3}{-3} - \frac{i}{3} = 1 - i\frac{1}{3}$$

9. **Calcula** $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)}$ **en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma exponencial

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right) &= 2e^{i\pi/3} \\ (1+i) &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}\end{aligned}$$

y ahora hacemos la división

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) e^{i(\pi/3-\pi/4)} = \left(\sqrt{2}\right) e^{i\pi/12}$$

10. **Calcula** $(2+3i)\cdot(2-5i)$

Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(2+3i)\cdot(2-5i) = 4-10i+6i-15i^2 = 19-4i$$