MATEMÁTICAS II
OpBas01: Operaciones Básicas del Tema 1

1. **Calcula el módulo de $\frac{4-i}{4+i}$.**

   Solución: Por las propiedades del módulo

$$\left|\frac{4-i}{4+i}\right| = \frac{|4-i|}{|4+i|} = \frac{\sqrt{16+1}}{\sqrt{16+1}} = 1.$$

2. **Calcula en radianes el argumento de $-3-3i$.**

   Solución: El número complejo $-3-3i$ está situado en el tercer cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

$$\varphi = \arctan\frac{-3}{-3} + \pi = \arctan 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

   La respuesta correcta sería

$$\arg(-3-3i) = \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. **Escribe $1-i$ en forma exponencial.**

   Solución: El argumento φ del número $1-i$ se calcula al igual que en el caso anterior , teniendo en cuenta que está situado en el cuarto cuadrante, como:

$$\varphi = \arctan\frac{-1}{1} \in -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

   Tomando, por ejemplo $k=0$, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$1-i = |1-i|e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

4. **Escribe $2e^{4\pi i}$ en forma binómica.**

   Solución: Basta considerar que

$$2e^{4\pi i} = 2[\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)] = 2[1+i0] = 2.$$

5. **Escribe $\dfrac{1}{2-2i}$ en forma binómica.**

   Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de $2-2i$ y obtenemos

$$\frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}.$$

6. **Escribe $(-i)^{1500}$ en forma binómica.**

   Solución: Como $1500 = 4\cdot 375$, tenemos que

$$(-i)^{1500} = ((-i)^4)^{375} = 1^{375} = 1.$$

7. **Calcula $(2+2\sqrt{3}i)^{23}$.**

Solución: El número $2+2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} = \pi/3$, al estar en el primer cuadrante. Entonces

$$\begin{aligned}
(2+2\sqrt{3}i)^{23} &= (4e^{i\pi/3})^{23} = 4^{23}e^{i23\pi/3} = 4^{23}e^{i5\pi/3} \\
&= 4^{23}(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)) \\
&= 4^{23}(\cos(2\pi-\pi/3) + i\sin(2\pi-\pi/3)) \\
&= 4^{23}(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) \\
&= 4^{23}(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) \\
& \quad 4^{23}(1/2 - i\sqrt{3}/2).
\end{aligned}$$

8. **Calcula $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.**

Solución: El número $-2+2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|-2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \arctan -\sqrt{3} = 2\pi/3$, al estar en el segundo cuadrante. Entonces los argumentos de las raíces cuartas de $-2+2\sqrt{3}i$ son

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{2\pi/3 + 0\cdot 2\pi}{4} = 2\pi/12 = \pi/6. \\
\varphi_2 &= \frac{2\pi/3 + 1\cdot 2\pi}{4} = 8\pi/12 = 2\pi/3. \\
\varphi_3 &= \frac{2\pi/3 + 2\cdot 2\pi}{4} = 14\pi/12 = 7\pi/6. \\
\varphi_4 &= \frac{2\pi/3 + 3\cdot 2\pi}{4} = 20\pi/12 = 5\pi/3.
\end{aligned}$$

y las raíces en forma polar, trigonométrica y binómica son

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt[4]{4}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)] = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
r_2 &= \sqrt[4]{4}e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \\
r_3 &= \sqrt[4]{4}e^{i7\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)] = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
r_4 &= \sqrt[4]{4}e^{i5\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

9. **Calcula $(5+7i)\cdot(-2+i)$.**

Solución: Multiplicamos directamente

$$(5+7i)\cdot(-2+i) = -10-7+i(5-14) = -17-9i.$$

10. **Calcula $\dfrac{5-2i}{-1+4i}$ en forma binómica.**

Solución: Multiplicamos denominador y numerador por el conjugado del denominador $-1-4i$ y obtenemos

$$\frac{5-2i}{-1+4i} = \frac{(5-2i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-13-18i}{17} = -\frac{13}{17} - i\frac{18}{17}.$$