Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 7 - Soluciones comentadas
Diagonalización de Matrices
Autovalores y autovectores

1. Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   $a)$ Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.

   $b)$ Para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\alpha\overrightarrow{u}$ es un vector propio asociado al mismo valor propio λ.

   $c)$ $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores linealmente independientes.

   $d)$ Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.

   $e)$ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ es un vector propio de A.

   $f)$ Si $n \in \mathbb{N}$, entonces λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

   $g)$ Si A,C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

   $h)$ Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n–ésima, siendo $n \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$ y $N_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x+y=0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

5. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0; x-z=0\}$, $N_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x=0, y+z=0\}$ y $N_{\lambda_3} = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y=0, 2x+y=0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

6. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Consideremos el tensor[1] $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Si consideramos el sistema de referencia[2] habitual en Física $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, es decir la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces T está representado por la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es decir, $T_1 = M_{B \to B}(T)$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de referencia dado por los vectores $B' = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (3, 2)\}$, entonces el tensor T viene representado por la matriz

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de las matrices T_1 y T_2 son iguales y que los autovectores también son los mismos, sin embargo, las coordenadas de éstos últimos dependen del sistema de referencia que estemos usando. No podía ser de otra forma: los autovalores son independientes del sistema de referencia. Y los autovectores también, pero en el sentido de que dependen solamente del tensor aunque sus coordenadas cambien según la matriz que usemos para representar el tensor.

8. **Tensor de inercia de un sólido rígido**. En Mecánica del Sólido Rígido, el llamado *tensor de inercia* en un punto es una aplicación lineal que, como todas, se representa por medio de una matriz (en este caso simétrica) que denotaremos por T_i. Las llamadas *direcciones principales de inercia* se corresponden con los autovectores de T_i mientras que los *momentos principales de inercia* son los autovalores. Supongamos que el tensor de inercia en coordenadas cartesianas de un sólido bidimensional viene dado por

$$T_i = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula los momentos principales y las direcciones principales de inercia de I.

Interpretación geométrica: Consideremos la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Dibuja, con MAXIMA, dicha elipse. Comprueba que, con la ayuda de la matriz T_i anterior, la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma

$$(x, y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Comprueba que los autovalores de T_i son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y que sus autovectores asociados (normalizados) son $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La matriz de cambio de base P que contiene los autovectores es ortogonal con lo que $P^{-1} = P^T$. Por tanto, se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la izquierda por (x, y) y por la derecha por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene la identidad

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \left(\frac{x - y}{\sqrt{2}} \right)^2$$

[1] En este contexto el tensor es sinónimo de endomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.
[2] En este contexto un sistema de referencia en el es una base del espacio vectorial correspondiente.

lo que indica que con el cambio de variables $u = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $v = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, la ecuación de la elipse es $9u^2 + v^2 = 1$. Dibuja con MAXIMA esta nueva elipse.

9. **Elasticidad Lineal**. Se supone que el tensor de pequeñas deformaciones ε en un entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana viene dado por la matriz

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Calcula las deformaciones principales (autovalores) y direcciones principales de deformación (autovectores normalizados[3]).

Interpretación geométrica: la misma que en el ejercicio anterior pero cambiando la palabra inercia por deformación.

10. La **teoría de Hückel en Química Orgánica** analiza la posibilidad para algunos tipos de moléculas de tener propiedades aromáticas. Aplicada al ciclobutadieno C_4H_4, aparece asociado el problema de autovalores definido por la ecuación

$$\mathbf{HC} = E\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{H}$ representa el Hamiltoniano efectivo de un π electrón del sistema, los autovalores E de $\mathbf{H}$ son la energías orbitales de los π electrones, y los autovectores $\mathbf{C}$ representan las correspondientes orbitales moleculares. En concreto,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde α, β son números reales negativos.

Comprueba que los autovalores de $\mathbf{H}$ son $E_1 = \alpha + 2\beta$, $E_2 = E_3 = \alpha$, $E_4 = \alpha - 2\beta$, y que $C_1 = (1, 1, 1, 1)$, $C_2 = (0, 1, 0, -1)$, $C_3 = (1, 0, -1, 0)$, $C_4 = (1, -1, 1, -1)$ son autovectores asociados.

11. Responde a las siguientes cuestiones:

    a) Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f. ¿Es f inyectiva ? ¿Por qué ?

    b) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ? ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y los de A^{-1} ?

12. **Algunos tipos destacados de matrices**. Recogemos en la siguienta tabla algunos tipos de matrices importantes

[3] De módulo 1.

en las aplicaciones junto con las propiedades de sus autovalores y autovectores

Matriz	Definición	Autovalores	Autovectores
Simétrica	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (si son ortogonales)
Definida Positiva	$x^T \mathbf{A} x > 0$	$\lambda > 0$	
de Markov	$m_{ij} > 0, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$	$\lambda_{\text{máx}} = 1$	$v_j(\lambda_{\text{máx}}) > 0$
Tridiagonal Tipo 1	$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$	$\lambda_k = a + 2b\cos\frac{k\pi}{n+1}$	
Ejemplo $a = 2$, $b = -1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$v_k = \left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n+1}, \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n+1}, \ldots, \right)$

Determina de qué tipo son cada una de las siguientes matrices y calcula sus autovalores y autovectores:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Calcula la potencia $n-$ésima de las matrices M_1 y M_4 del ejercicio anterior.

14. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$p_M(\lambda) = (5 - \lambda)(-1 - \lambda)(a - \lambda)$. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = a$. M es diagonalizable para $(a, b) \notin \{-1, 5\}$, si $a = 5$, no es diagonalizable y si $a = -1$, entonces sólo es diagonalizable cuando $b = 0$.

15. **Teorema de Perron-Frobenius**. El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa Google para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: "Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado tiene todas sus componentes estrictamente positivas". Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius.

El secreto de Google y el Álgebra Lineal. Se recomienda la lectura de este artículo profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, Pablo Fernández Gallardo, a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo PageRank de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.

Soluciones

1. **(a)** Verdadera. **(b)** Verdadera. **(c)** Verdadera. **(d)** Verdadera. **(e)** Falso. **(f)** Ambas son verdaderas. **(g)** Verdadero. **(h)** Verdadero.

2. **(a)** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. $N_{\lambda_1} = \langle (1,2) \rangle$. $N_{\lambda_2} = \langle (1,3) \rangle$. Diagonalizable. $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. **(b)** $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. $N_{\lambda_1} = \langle (1,-2) \rangle$. $N_{\lambda_2} = \left\langle \left(1, -\frac{5}{3}\right) \right\rangle = \langle (3,-5) \rangle$. Diagonalizable. $B^n = \begin{pmatrix} -5 \times 4^n - 6 & -3 \times 4^n - 3 \\ 10 \times 4^n + 10 & 6 \times 4^n + 5 \end{pmatrix}$.
   (c) $\lambda_1 = 0 . N_{\lambda_1} = \langle (1,-2) \rangle$. No diagonalizable. **(d)** $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. No diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. **(e)** $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 7$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(1,0,-1);(0,1,-1)\} \rangle$. $N_{\lambda_2} = \langle (1,1,1) \rangle$. Diagonalizable.
   $E^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n - \frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}7^n \end{pmatrix}$.**(f)** $\lambda_1 = 1, .N_{\lambda_1} = \langle \{(1,0,0)\} \rangle$. No diagonalizable.
   (g) $\lambda_1 = 1, .N_{\lambda_1} = \left\langle \left\{(1,0,0); \left(0,1,-\frac{2}{3}\right)\right\} \right\rangle$. No diagonalizable. **(h)** $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(1,1,0)\} \rangle$.
   $N_{\lambda_2} = \langle \{(1,-3,0);(0,-3,1)\} \rangle$. Diagonalizable. $H^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-2)^n + \frac{3}{4}2^n & \frac{1}{4}2^n - \frac{1}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}(-2)^n + \frac{1}{4}2^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.
   (i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(1,0,0,2);(0,1,0,-1);(0,0,1,-1)\} \rangle$. $N_{\lambda_2} = \langle \{(0,1,1,-3)\} \rangle$. Diagonalizable.
   $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \times 2^n - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2 \times 2^n - 2 & 1 - 2^n & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 6 - 6 \times 2^n & 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$.

3. **(a)** Diagonalizable si $\alpha \notin \{3\}$.**(b)** B es diagonalizable si $\gamma \neq 1$ y $\alpha = \beta = 0$.**(c)** C es diagonalizable si $\alpha \notin \{-1\}$.

4. $f(x,y,z) = (-x - 2z, 2x + y + 2z, z)$.

5. $f(x,y,z) = (0, x - y, 3y - 5x + 2z)$.

6. **(a)** $\phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35$. $\lambda_1 = 7$ con $m(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = -5$ con $m(\lambda_2) = 1$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(3,2)\} \rangle$. $N_{\lambda_2} = \langle \{(3,-2)\} \rangle$.**(b)** $\phi_B(\lambda) = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 3)$. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 3$ con $m(\lambda_k) = 1$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(3,-6,1)\} \rangle$, $N_{\lambda_2} = \langle \{(1,2,7)\} \rangle$, $N_{\lambda_3} = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$. **(c)** $\phi_C(\lambda) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)^2$. $\lambda_1 = 2$ con $m(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = 3$ con $m(\lambda_2) = 2$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(1,-1,-1)\} \rangle$, $N_{\lambda_2} = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$. **(d)** $\phi_D(\lambda) = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 9)$. $\lambda_1 = 5$ con $m(\lambda_1) = 2$ y $\lambda_2 = 9$ con $m(\lambda_2) = 1$. $N_{\lambda_1} = \langle \{(1,-1,0);(0,0,1)\} \rangle$, $N_{\lambda_2} = \langle (1,3,2) \rangle$.

7. $p_{T_1}(\lambda) = p_{T_2}(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. $\ker(T_1 - 3I) = \{(x,-x)_B\}$, $\ker(T_2 - 3I) = \{(x,0)_{B'}\}$.

8. $p_i(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9$. $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 9$. $N_{\lambda_1} = \langle (1,-1) \rangle$; $N_{\lambda_2} = \langle (1,1) \rangle$. $B = \{(1,-1),(1,1)\}$; $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$.

9. $p_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - \frac{11}{50000}\lambda + \frac{7}{1250000000}$. $\lambda_1 = \left(110 + 10\sqrt{65}\right) \cdot 10^{-6}$; $\lambda_2 = \left(110 - 10\sqrt{65}\right) \cdot 10^{-6}$. $N_{\lambda_1 =} \left\langle \left(1, \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{65}\right)\right) \right\rangle$; $N_{\lambda_2 =} \left\langle \left(1, \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{65}\right)\right) \right\rangle$. $n_1 = \left(\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65 - \sqrt{65}}}, \frac{1 - \sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65 - \sqrt{65}}} \right)$; $n_2 = \left(\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65 + \sqrt{65}}}, \frac{1 + \sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65 + \sqrt{65}}} \right)$. $\vec{n}_1 = (\mp 0{,}7497, \mp 0{,}6618)$; $\vec{n}_2 = (\mp 0{,}6618, \mp 0{,}7497)$.

10. $p_H(\lambda) = (\alpha - \lambda)^2 \left((\alpha - \lambda)^2 - 4\beta^2\right)$. $E_1 = \alpha + 2\beta$; $v_1 = (1,1,1,1)$. $E_2 = E_3 = \alpha$; (doble); $\{v_2, v_3\} = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$. $E_4 = \alpha - 2\beta$; $v_4 = (1,-1,1,-1)$.

11. **(a)** No. **(b)** $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$. Tienen los mismos autovectores.

12. **(a)** M_1 es definida positiva y de Markov (por columnas). $p_{M_1}(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5$. $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. $N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, \frac{2}{3}\right) \right\rangle$; $N_{\lambda_2} = \langle (1,-1) \rangle$. **(b)** M_2 es definida positiva. $p_{M_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \lambda_1 = \lambda_2 = 1 N_{\lambda_1} = \langle (1,0) \rangle$.**(c)** M_3 es tridiagonal, simétrica y definida positiva, por tanto las raíces serán reales. $p_{M_3}(\lambda) =$

$-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+4$. $\lambda_1=2-\sqrt{2}$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}$, $\lambda_3=2$. $N_{\lambda_1}=\left\langle\left(1,\sqrt{2},1\right)\right\rangle$; $N_{\lambda_2}=\left\langle\left(1,-\sqrt{2},1\right)\right\rangle$; $N_{\lambda_3}=\langle(1,0,-1)\rangle$. **(d)** M_4 es simétrica. $p_{M_4}(\lambda)=-\lambda^3+7\lambda^2+9\lambda-63$. $\lambda_1=-3$; $\lambda_2=7$; $\lambda_3=3$. $N_{\lambda_1}=\langle(1,0,2)\rangle$; $N_{\lambda_2}=\left\langle\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)\right\rangle$; $N_{\lambda_3}=\langle(0,1,0)\rangle$.

13. **(a)** $M_1^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(3+\frac{1}{2^{n-1}}\right) & \frac{3}{5}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{5}\left(2+\frac{3}{2^n}\right) \end{pmatrix}$; $M_1^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(4\cdot 7^n+(-3)^n\right) & 0 & \frac{2}{5}\left((-3)^n+7^n\right) \\ 0 & 3^n & 0 \\ \frac{2}{5}\left((-3)^n-7^n\right) & 0 & \frac{1}{5}\left(4\cdot(-3)^n+7^n\right) \end{pmatrix}$.

14. $p_A(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2+8\lambda-8$. $\lambda_1=3-\sqrt{5}$, $N_{\lambda_1}=\left\langle\left(1,1,-1-\sqrt{5}\right)\right\rangle$, $\lambda_2=3+\sqrt{5}$, $N_{\lambda_2}=\left\langle\left(1,1,-1+\sqrt{5}\right)\right\rangle$, $\lambda_3=-2$, $N_{\lambda_3}=\left\langle\left(1,-\frac{11}{9},\frac{2}{3}\right)\right\rangle$.

15. $p_A(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2+8\lambda-8$. Valores propios: $\lambda_1=3-\sqrt{5}$, $\lambda_2=3+\sqrt{5}$ y $\lambda_3=-2$. Vectores propios: $N_{\lambda_1}=\left\langle\left(1,1,-1-\sqrt{5}\right)\right\rangle$, $N_{\lambda_2}=\left\langle\left(1,1,-1+\sqrt{5}\right)\right\rangle$ y $N_{\lambda_3}=\left\langle\left(1,-\frac{11}{9},\frac{2}{3}\right)\right\rangle$.