1. Determina si las siguientes aplicaciones $f: V \to W$, son o no lineales.

   a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (2x+y, y-3x, 0)$.
   b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad g(x,y,z) = (2x+y, y-3x, 8)$.
   c) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 + y - 5x$.
   d) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = |x+y|$.

2. Sean V y W espacios vectoriales y sea $f: V \to W$, una aplicación lineal. Demuestra los siguientes apartados:

   a) Si $S = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \rangle \subseteq V \Longrightarrow f(S) = \langle \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)\} \rangle$.
   b) Si $B = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \rangle \subseteq V$ es base de $V \Longrightarrow \operatorname{Im}(f) = \langle \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_m)\} \rangle$.
   c) Si f es sobreyectiva $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.

3. ¿Existirá una aplicación lineal tal que $f(1,0,0) = (1,1), f(0,1,0) = (21,-3), f(0,0,1) = (-1,2)$ y $f(1,0,1) = (-1,1)$? ¿Y si fuera $f(1,0,1) = (0,3)$?

4. Demuestra la ecuación de las dimensiones para aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si $f: V \to W$ es una aplicación lineal, entonces se cumple

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

5. Para las siguientes aplicaciones lineales $f: V \to W$ calcula tanto el núcleo como la imagen e indica las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

   a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (z, x+y, -z)$.
   b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x-y+2z, y-z, x+2z)$.
   c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^4$ $\quad f(x,y,z) = (z, x+y, -z, y-x)$.
   d) $V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z,t) = (x-3y+8t, 2x)$.
   e) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z) = (x+y+z, 0)$.
   f) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z)$.

6. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Halla la matriz asociada a f respecto de la base

$$B' = \{(1,0,1); (1,1,0); (1,0,0)\}.$$

7. Se considera la aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

   que cumple que

$$f(1,0) = (2,3-1) \quad \text{y} \quad f(0,1) = (0,-2,3)$$

Dadas bases respectivas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} B &= \{(-1,2)\,;(3,0)\} \\ B' &= \{(0,0,-1)\,;(0,2,1)\,;(-1,1,4)\}\,, \end{aligned}$$

se pide obtener las matrices asociadas siguientes

(a) $M_{C_2 \to C_3}(f)$ (b) $M_{B \to C_3}(f)$ (c) $M_{C_2 \to B'}(f)$

siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

8. Supongamos que tenemos una aplicación lineal
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica C_3 y en el segundo una base B. Supongamos que
$$M_{C_3 \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Dado el vector $\overrightarrow{v} = (2,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ halla $f(\overrightarrow{v})_B$. Halla los posibles $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\overrightarrow{w})_B = (2,4)$.

9. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base
$$B = \{\overrightarrow{v}_1 = (-2,1,1)\,;\overrightarrow{v}_2 = (1,-1,0)\,;\overrightarrow{v}_3 = (3,2,-4)\}$$
y el endomorfismo f tal que
$$M_{B \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b-1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$
siendo $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $f(\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$.
   - a) Justifica que $a = 2, b = 3$ y $c = -2$.
   - b) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.
   - c) Calcula $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

10. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base
$$B = \{\overrightarrow{v}_1 = (1,-1,0)\,;\overrightarrow{v}_2 = (0,1,-1)\,;\overrightarrow{v}_3 = (1,0,1)\}$$
y en $\mathbb{R}^2$ la base
$$B' = \{\overrightarrow{w}_1 = (-1,1)\,;\overrightarrow{w}_2 = (-1,0)\}$$
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que
$$M_{B \to B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Calcula:
   - a) La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.
   - b) La expresión analítica de dicha aplicación.
   - c) Calcula $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ y bases para estos subespacios.
   - d) ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

11. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ y $f(0,1,1) = (2,1,-1)$.

12. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; x + z = 0\}$ e $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

13. Determina la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:

    a) En $\mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de base $U = \langle\{(1,1,0);(0,1,-1)\}\rangle$.

    b) En $\mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal de base $W = \langle\{(1,0,1);(1,0,-1)\}\rangle$.

14. Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ y $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y en el segundo la base $B' = \{1, x, x^2\}$. Se pide:

    a) **Matriz de la derivada**. Consideremos la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

    $$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] & \to & \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] \\ & p(x) & \mapsto & D(p)(x) = p'(x). \end{array}$$

    Comprueba que D es una aplicación lineal y que la matriz asociada a D en las bases B y B' es

    $$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

    b) **Matriz de la integral**. Consideremos ahora la aplicación que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

    $$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] & \to & \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \\ & p(x) & \mapsto & I(p)(x) = \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt. \end{array}$$

    Comprueba que I es una aplicación lineal y que la matriz asociada a I en las bases B' y B es

    $$M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

    c) Calcula $\ker D$ y $\ker I$.

    d) Comprueba que $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(D) \cdot M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(I) = I_3$, con I_3 la matriz identidad de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Nótar que esta identidad matricial es una epecie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: La derivada de la integral de una función $f(x)$ es ella misma, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

15. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven, cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Las tres últimas transformaciones se representan matemáticamente, en el espacio tridimensional, por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

    - **Cambio de escala** (Scaling o Rescaling en inglés):

      $$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & S(\overrightarrow{v}) := (c_1 v_1, c_2 v_2, c_3 v_3) \end{array}$$

      con $c_k > 0$, $1 \le k \le 3$. Calcula la matriz asociada a S en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    - **Rotación**: una rotación en el plano de ángulo θ se puede realizar por medio de la matriz

      $$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

      ¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano YZ ?

- **Proyección**: en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen. En la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y otro vector fijo $\overrightarrow{v}_0 = \left(v_1^0, v_2^0, v_3^0\right)$, la proyección de cualquier vector tridimensional $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano de ecuación $n_1x + n_2y + n_3z = v_1n1 + v_2n_2 + v_3n_3$ se calcula multiplicando el vector de coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ por la matriz 4×4 (llamada de proyección)

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & \overrightarrow{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -\overrightarrow{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la proyección del vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano XY se puede calcular mediante el procedimiento anterior.

- Aunque en principio, una translación es fácil de entender, sin embargo no es una aplicación lineal. En efecto, comprueba que si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{a}}: \ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & T_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{v}\right) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3), \end{array}$$

no es lineal. Por tanto, una traslación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la translación de vector $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se calculará por medio de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para ello hay que considerar las llamadas coordenadas homogéneas de un vector $\overrightarrow{v}$, definidas como

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \overrightarrow{v}_h = (v_1, v_2, v_3, 1).$$

Demuestra que.

$$T_{\overrightarrow{a_h}}\left(\overrightarrow{v_h}\right) = \overrightarrow{a_h} + \overrightarrow{v_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluciones:

1. **(a)** Sí. **(b)** No. **(c)** No. **(d)** No.

2. **(a)** Se usa la definición de imagen. **(b)** Se usa la imagen de una base de mV**.** **(c)** Usando la imagen de una base de V como sistema generador de $\operatorname{Im} f$

3. No. Sí.

4. Teoría.

5. **(a)** $\ker(f) = \langle(1, -1, 0)\rangle$, $\operatorname{Im}(f) = \langle(0, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$, no inyectiva, no sobreyectiva. **(b)** $\ker(g) = \langle 0\rangle$, $\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R}^3$, biyectiva. **(c)** $\ker(h) = \langle 0\rangle$, $\operatorname{Im}(h) = \langle\{(0, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}\rangle$, inyectiva, no sobreyectiva. **(d)** $\ker(k) = \left\langle\left\{(0, 0, 1, 0), \left(0, \frac{8}{3}, 0, 1\right)\right\}\right\rangle$, $\operatorname{Im}(k) = \mathbb{R}^2$, no inyetiva, sobreyectiva. **(e)** $\ker(l) = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$, $\operatorname{Im}(l) = \langle(1, 0)\rangle$, no inyetiva, no sobreyectiva. **(f)** $\ker(m) = \langle(1, -1, 0)\rangle$, $\operatorname{Im}(m) = \langle(1, 1, 0), (1, -1, 1)\rangle$, no inyetiva, no sobreyectiva.

6. $M_{B' \to B'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

7. $M_{C_2\to C_3}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 3 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $M_{B\to C_3}(f)=\begin{pmatrix} -2 & 6\\ -7 & 9\\ 7 & -3\end{pmatrix}$, $M_{C_2\to B'}(f)=\begin{pmatrix} -9/2 & -4\\ 5/2 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

8. $f(\overrightarrow{v})_B=(3,0)\,,f^{-1}(w)=\{(\alpha,\alpha-2,\alpha+2)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$.

9. **(a)** Expresar $\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_3$ y $\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2$ en coordenadas de la base B y aplicar linealidad. **(b)** $M_{C_3\to C_3}(f)=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 6\\ 4 & 0 & 4\\ -8 & 1 & -8\end{pmatrix}$; $f(x,y,z)=(6x+y+6z,4x+4z,8x+y+8z)$ **(c)** $\ker f=<\{(1,0,-1)\}>$; $\operatorname{Im} f=<\{(3,2,-4),(-1,0,1)\}>$.**(d)** No inyectiva, no sobreyectiva.

10. **(a)** $M_{C_3\to C_2}(f)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. **(b)** $f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}z,\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z\right)$. **(c)** $\ker f=\langle\{(0,-3,1)\}\rangle$; $\operatorname{Im} f=\left\langle\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right);\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right\}\right\rangle$. **(d)** No inyectiva, sobreyectiva.

11. La solución no es única, una podría ser: $M_{B\to B}f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

12. La solución no es única una podría ser $M_{C\to C}f=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}\\ -1 & -1 & -\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$

13. **(a)** $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. **(b)** $S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

14. **(a)** Se obtiene derivando cada polinomio de $B=\{1,x,x^2,x^3\}$. Se obtiene integrando cada polinoimio de $B'=\{1,x,x^2\}$. **(b)** $\ker D=\langle\{(a,0,0,0)\}\rangle$, $\ker I=\{0\}$. **(c)** Multiplicar las dos matrices.

15. **(a)** $M_{C_3\to C_3}(S)=\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & c_3\end{pmatrix}$. **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. (c) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. (d) No lineal. Multiplicar la matriz por el vector.