

1. Determina si las siguientes aplicaciones  $f : V \rightarrow W$ , son o no lineales.

- a)  $V = W = \mathbb{R}^3$        $f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$ .  
 b)  $V = W = \mathbb{R}^3$        $g(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$ .  
 c)  $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$        $f(x, y) = x^2 + y - 5x$ .  
 d)  $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$        $f(x, y) = |x + y|$ .

2. Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$ , una aplicación lineal. Demuestra los siguientes apartados:

- a) Si  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \subseteq V \implies f(S) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_m)\}$ .  
 b) Si  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$  es base de  $V \implies \text{Im}(f) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ .  
 c) Si  $f$  es sobreyectiva  $\implies \dim(W) \leq \dim(V)$ .

3. ¿Existirá una aplicación lineal tal que  $f(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(0, 1, 0) = (21, -3)$ ,  $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$  y  $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$ ? ¿Y si fuera  $f(1, 0, 1) = (0, 3)$ ?

4. Demuestra la ecuación de las dimensiones para aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal, entonces se cumple

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f).$$

5. Para las siguientes aplicaciones lineales  $f : V \rightarrow W$  calcula tanto el núcleo como la imagen e indica las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

- a)  $V = W = \mathbb{R}^3$        $f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$ .  
 b)  $V = W = \mathbb{R}^3$        $f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + 2z)$ .  
 c)  $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^4$        $f(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$ .  
 d)  $V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^2$        $f(x, y, z, t) = (x - 3y + 8t, 2x)$ .  
 e)  $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$        $f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$ .  
 f)  $V = W = \mathbb{R}^3$        $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, z)$ .

6. Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz asociada a  $f$  respecto de la base

$$B' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}.$$

7. Se considera la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que cumple que

$$f(1, 0) = (2, 3 - 1) \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (0, -2, 3)$$

Dadas bases respectivas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(-1, 2); (3, 0)\}$$

$$B' = \{(0, 0, -1); (0, 2, 1); (-1, 1, 4)\},$$

se pide obtener las matrices asociadas siguientes

$$(a) M_{C_2 \rightarrow C_3}(f) \quad (b) M_{B \rightarrow C_3}(f) \quad (c) M_{C_2 \rightarrow B'}(f)$$

siendo  $C_2$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y  $C_3$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

8. Supongamos que tenemos una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica  $C_3$  y en el segundo una base  $B$ . Supongamos que

$$M_{C_3 \rightarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector  $\vec{v} = (2, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$  halla  $f(\vec{v})_B$ . Halla los posibles  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  tales que  $f(\vec{w})_B = (2, 4)$ .

9. Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  la base

$$B = \{\vec{v}_1 = (-2, 1, 1); \vec{v}_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_3 = (3, 2, -4)\}$$

y el endomorfismo  $f$  tal que

$$M_{B \rightarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b - 1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

siendo  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $f(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ .

a) Justifica que  $a = 2, b = 3$  y  $c = -2$ .

b) Calcula la matriz de  $f$  respecto de la base canónica y su expresión analítica.

c) Calcula  $\ker(f)$  e  $\text{Im}(f)$ . ¿Es  $f$  inyectiva? ¿Es  $f$  suprayectiva?

10. Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  la base

$$B = \{\vec{v}_1 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (0, 1, -1); \vec{v}_3 = (1, 0, 1)\}$$

y en  $\mathbb{R}^2$  la base

$$B' = \{\vec{w}_1 = (-1, 1); \vec{w}_2 = (-1, 0)\}$$

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal tal que

$$M_{B \rightarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

- a) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de las bases canónicas respectivas.  
 b) La expresión analítica de dicha aplicación.  
 c) Calcula  $\ker(f)$  e  $\text{Im}(f)$  y bases para estos subespacios.  
 d) ¿Es  $f$  inyectiva? ¿Es  $f$  suprayectiva?
11. Determina un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifique  $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$  y  $f(0, 1, 1) = (2, 1, -1)$ .
12. Determina un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifique  $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; x + z = 0\}$  e  $\text{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ .
13. Determina la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:
- a) En  $\mathbb{R}^3$  la proyección ortogonal de base  $U = \langle \{(1, 1, 0); (0, 1, -1)\} \rangle$ .  
 b) En  $\mathbb{R}^3$  la simetría ortogonal de base  $W = \langle \{(1, 0, 1); (1, 0, -1)\} \rangle$ .
14. Consideremos los espacios vectoriales  $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$  y  $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$  de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$  y en el segundo la base  $B' = \{1, x, x^2\}$ . Se pide:

- a) **Matriz de la derivada.** Consideremos la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

$$\begin{aligned} D : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] &\rightarrow \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] \\ p(x) &\mapsto D(p)(x) = p'(x). \end{aligned}$$

Comprueba que  $D$  es una aplicación lineal y que la matriz asociada a  $D$  en las bases  $B$  y  $B'$  es

$$M_{B \rightarrow B'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) **Matriz de la integral.** Consideremos ahora la aplicación que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

$$\begin{aligned} I : \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] &\rightarrow \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \\ p(x) &\mapsto I(p)(x) = \int_0^x p(t) dt. \end{aligned}$$

Comprueba que  $I$  es una aplicación lineal y que la matriz asociada a  $I$  en las bases  $B'$  y  $B$  es

$$M_{B' \rightarrow B}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- c) Calcula  $\ker D$  y  $\ker I$ .  
 d) Comprueba que  $M_{B \rightarrow B'}(D) \cdot M_{B' \rightarrow B}(I) = I_3$ , con  $I_3$  la matriz identidad de  $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Nótar que esta identidad matricial es una especie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: La derivada de la integral de una función  $f(x)$  es ella misma, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

15. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven, cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Las tres últimas transformaciones se representan matemáticamente, en el espacio tridimensional, por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

- **Cambio de escala** (Scaling o Rescaling en inglés):

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \mapsto S(\vec{v}) := (c_1v_1, c_2v_2, c_3v_3),$$

con  $c_k > 0$ ,  $1 \leq k \leq 3$ . Calcula la matriz asociada a  $S$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

- **Rotación**: una rotación en el plano de ángulo  $\theta$  se puede realizar por medio de la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano  $YZ$  ?

- **Proyección**: en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen. En la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  y otro vector fijo  $\vec{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)$ , la proyección de cualquier vector tridimensional  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  sobre el plano de ecuación  $n_1x + n_2y + n_3z = v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3$  se calcula multiplicando el vector de coordenadas  $(v_1, v_2, v_3, 1)$  por la matriz  $4 \times 4$  (llamada de proyección)

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & \vec{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - \vec{n} \cdot \vec{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -\vec{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la proyección del vector  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  sobre el plano  $XY$  se puede calcular mediante el procedimiento anterior.

- Aunque en principio, una traslación es fácil de entender, sin embargo no es una aplicación lineal. En efecto, comprueba que si  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  es un vector fijo, entonces la aplicación

$$T_{\vec{a}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \mapsto T_{\vec{a}}(\vec{v}) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3),$$

no es lineal. Por tanto, una traslación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz  $3 \times 3$ . Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  se calculará por medio de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para ello hay que considerar las llamadas coordenadas homogéneas de un vector  $\vec{v}$ , definidas como

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \vec{v}_h = (v_1, v_2, v_3, 1).$$

Demuestra que.

$$T_{\vec{a}_h}(\vec{v}_h) = \vec{a}_h + \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$