

- Supongamos que una molécula de metano, en estado de equilibrio, tiene sus cuatro hidrógenos en las posiciones $r_1 = (a, a, a)$, $r_2 = (a, -a, -a)$, $r_3 = (-a, a, -a)$, $r_4 = (-a, -a, a)$, con el carbono en el centro. El momento dipolar de cada enlace viene dado por $\mu_i = \kappa r_i$, $1 \leq i \leq 4$, con κ una constante. Calcula el momento dipolar total $\mu = \sum_{i=1}^4 \mu_i$.
- Comprueba si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso el rango del sistema:

- $S_1 = \{(1, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 3, 2)\}$ de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} .
- $S_2 = \{(1, 2, 3, 0); (4, 3, 4, -16); (7, 3, 4, 5)\}$ de \mathbb{R}^4 sobre \mathbb{R} .
- $S_3 = \{(1, 0, 0, -1); (2, 1, 1, -2); (0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, -1)\}$ de \mathbb{R}^4 sobre \mathbb{R} .
- $S_4 = \{(4, -5, 7); (3, 3, 4); (1, 1, -2); (2, -1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} .
- $S_5 = \{(1, i, 2); (0, 1, -2i); (3, 1, 5)\}$ de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{R} . ¿Qué ocurre si el cuerpo es \mathbb{C} ?
- $S_6 = \{(1, 0, -1); (i, 2, 0); (1, -2i, 0); (0, 2i, -1)\}$ de \mathbb{C}^3 sobre \mathbb{R} . ¿Qué ocurre si el cuerpo es \mathbb{C} ?
- $S_7 = \{1 + x; x + x^2; 1 + x^2\}$ de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{\text{polinomios de grado menor o igual que 2}\}$ sobre \mathbb{R} .
- $S_8 = \{(2, 0, 0); (3, 2, 0); (4, 3, x)\}$ (con $x \in \mathbb{R}$) de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} .

- ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 ?

- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

- Consideremos la base $B = \{(1, -1); (2, 0)\}$ de \mathbb{R}^2 . Se pide:

- Representa gráficamente la base B en \mathbb{R}^2 .
- Encuentra la expresión del vector $v = (5, 3)$ en la base B .
- Si C es la base canónica de \mathbb{R}^2 halla las matrices cambio de base $M_{B \rightarrow C}$ y $M_{C \rightarrow B}$.

- Consideremos las siguientes bases de \mathbb{R}^2 : $B = \{(0, 2); (1, 3)\}$ y $B' = \{(1, 1); (1, -1)\}$. Se pide:

- Dibuja las bases B y B' .
- Halla las matrices cambio de base de B a B' y de B' a B , así como las ecuaciones del cambio de base de B a B' y de B' a B .
- Si u y v son vectores de \mathbb{R}^2 tales que $u_B = (-3, 5)$ y $v_{B'} = (0, 2)$, halla $u_{B'}$ y v_B .

6. Encuentra una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 :

a) $W_1 = \langle \{(2, -1, 0, 1); (-2, 1, -3, 2)\} \rangle$.

b) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$.

c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\}$.

d) $W_4: \begin{cases} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{cases}$

e) $W_5 = \langle \{(1, -1, 0, 1); (2, -1, 0, 2); (-1, 2, 0, -1)\} \rangle$.

7. Determina unas ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0, x + 2y - z = 0\} \text{ y } W = \langle \{(1, -1, 0, 3); (2, 1, -1, 2)\} \rangle,$$

así como también de $U \cap W$ y de $U + W$. Concluye si la suma es directa o no.

Soluciones:

1. $\mu = 0$.

2. **(a)** $r(S_1) = 3$, base; **(b)** $r(S_2) = 3$, sistema linealmente independiente, no es una base, no es un sistema generador; **(c)** $r(S_3) = 2$, sistema linealmente dependiente, no es una base, no es un sistema generador **(d)** $r(S_4) = 3$, sistema linealmente dependiente, sistema generador; **(e)** $r(S_5) = 3$; el conjunto es linealmente independiente, pero no es un SG. **(f)** Sistema linealmente dependiente y no es un SG. **(g)** Base (rango 3) **(h)** Para $x \neq 0$, es una base de rango 3 y para $x = 0$ es un sistema linealmente dependiente, no es un SG y el rango es 2.

3. **(a)** Sí; **(b)** No, porque $0 \notin S_2$; **(c)** No, no cumple $u + v \in S_3$ para $u, v \in S_2$; por ejemplo $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 0, 1)$. **(d)** Sí.

4. **(a)** Dibujar directamente los vectores que van desde el origen a cada uno de los elementos del B . **(b)** $v = (-3, 4)_B$; **(c)**

$$M_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; M_{C \rightarrow B} = (M_{B \rightarrow C})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. **(a)** Dibujar directamente los vectores que van desde el origen a cada uno de los elementos de B y B' . **(b)**

$$M_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; M_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $u_{B'} = (7, -2)_{B'}$; $v_B = (-4, 2)$.

	Base	Paramétricas	Implícitas
	(a) $\left\{ \begin{array}{l} (2, -1, 0, 1) \\ (-2, 1, -3, 2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -3\beta \\ t = \alpha + 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z + t = 0 \\ x - 2z - 2t = 0 \end{array} \right\}$
	(b) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, -1) \\ (0, 1, 1, 0) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta \\ t = -\alpha \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$
6.	(c) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, -1, 0) \\ (0, 1, 2, 0) \\ (0, 0, 0, 1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2\beta - \alpha \\ t = \gamma \end{array} \right\}$	$\{x - 2y + z = 0\}$
	(d) $\left\{ \begin{array}{l} (1, -1, 2, 3) \\ (1, 3, 0, 1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x + z - t = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$
	(e) $\left\{ \begin{array}{l} (1, -1, 0, 1) \\ (2, -1, 0, 2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha - \beta \\ z = 0 \\ t = \alpha + 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x - t = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$

	Base	Paramétricas	Implícitas
7.	$U \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 1, 2) \\ (0, 1, 2, -1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + 2\beta \\ t = 2\alpha - 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - t = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$
	$W \left\{ \begin{array}{l} (1, -1, 0, 3) \\ (2, 1, -1, 2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -\beta \\ t = 3\alpha + 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ 3x + 4z - t = 0 \end{array} \right\}$

$U \cap W = \{0\}$, $U \oplus W = \mathbb{R}^4$, ya que es suma directa