Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema3 - Soluciones comentadas
Matrices, determinantes y
sistemas de ecuaciones lineales

1. Determinar el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución: Usando escalonamiento de cada matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - \frac{4}{3}F_1 \\ F_3' = F_2 - \frac{5}{3}F_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1 \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' - 5F_2' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 3F_1 \\ F_3' = F_2 - 4F_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1 \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' - F_2' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_2 \\ F_2' = F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' + 2F_1' \\ F_3'' = F_3' - F_1' \\ F_4'' = F_4' - 3F_1' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_4'' \\ F_4''' = F_3'' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^4 = F_1''' \\ F_2^4 = F_2''' \\ F_3^4 = F_3''' + 4F_2''' \\ F_4^4 = F_4''' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r\left(C\right) = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1 \\ F_4' = F_4 - 2F_1 \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' + F_2' \\ F_4'' = F_4' + F_2' \end{array} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r\left(D\right) = 2
\end{aligned}
$$

2. Hallar la inversa de la matriz A. Comprueba el resultado.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Solución: Primero comprobaremos si es o no invertible, calculando su determinante

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = P - N = 19 - 20 = -1 \\
P &= 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) = 8 + 2 + 9 = 19 \\
N &= (-1) \cdot 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (1) \cdot (2) = 12 + 2 + 6 = 20
\end{aligned}
$$

Calculamos transpuesta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz adjunta

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 \\ -4 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos la inversa dividiendo por el determinante

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos el resultado

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -1 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Hallar el valor de los siguientes determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Utilizaremos operaciones elementales entre columnas y teniendo en cuenta las modificaciones que se obtienen sobre el determinante con estas modificaciones. Cambiamos las columnas 1 y 4 por combinaciones lineales de esa columna y la columna 3, estas operaciones no modifican el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1' = C_1 - 3C_3 \\ C_2' = C_2 \\ C_3' = C_3 \\ C_4' = C_4 - 4C_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & -11 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la fila 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -11 & 4 & -11 \end{vmatrix}$$

y ahora desarrollamos por los elementos de la columna 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -11 & 4 & -11 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -11 & 4 \end{vmatrix} - 11 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\,(-4+33) - 11\,(9+2) = -237$$

b) Utilizaremos operaciones elementales entre filas y teniendo en cuenta las modificaciones que se obtienen sobre el determinante con estas modificaciones. Cambiamos las columnas 2, 3, 4 y 5 por combinaciones lineales de esa fila y la fila 3, estas operaciones no modifican el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \\ F_4' = F_4 + F_1 \\ F_5' = F_2 - 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2 + F_1 \\ F_3'' = F_3' \\ F_4'' = F_4' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

y desarrollamos ahora por los elementos de la segunda fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' - 3F_1'' \\ F_3''' = F_3'' + 5F_1'' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Esta última matriz es triangular superior así que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-5) = -10.$$

$c)$ Desarrollamos directamente sobre los elementos de la primera columna

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix} &= (1-i)\begin{vmatrix} 3-i & 1 \\ -i & i+2 \end{vmatrix} - (1+i)\begin{vmatrix} 2 & i \\ -i & i+2 \end{vmatrix} \\ &= (1-i)\left((3-i)(i+2) - 1\cdot(-i)\right) - (1+i)\left(2(i+2) - i\cdot(-i)\right) \\ &= (1-i)\left((7+i)+i\right) - (1+i)\left((2i+4)-1\right) \\ &= (1-i)(7+2i) - (1+i)(3+2i) \\ &= (9-5i) - (1+5i) \\ &= 8-10i \end{aligned}$$

4. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(a) \begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-4y+2z+4t=-10 \\ y+t=1 \\ x+3y-z-t=6 \\ x-z-4t=3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -3x+2y+2z=0 \\ -x-2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 5x-6y-2z=0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x+2y-3z+t=2 \\ 2x-y-z-t=1 \\ -x+y+2z-t=0 \\ 3x+2y-4z-3t=1 \end{cases}$$

Solución: Utilizaremos el método de Gauss.

$a)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 + 2F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 - F_1 \\ F_5' = F_5 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

La fila 2 es nula, las filas 3 y 4 son iguales y la fila 5 es la fila 3 multiplicada por -2, por tanto el sistema queda como:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y-z-2t=5 \\ \\ y+t=1 \end{array}\right\}$$

Si tomamos

$$\begin{aligned} z &= \alpha \\ t &= \beta \end{aligned}$$

obtenemos de la 2 ecuación

$$y = 1 - t = 1 - \beta$$

y sustituyendo en la primera

$$x = 5 - 2y + z + 2t = 5 - 2(1-\beta) + \alpha + 2\beta = 3 + 4\beta + \alpha$$

El sistema es compatible indeterminado con solución

$$(3 + \alpha + 4\beta, 1 - \beta, \alpha, \beta).$$

b)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1' = F_4 \\ F_2' = F_2 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_1 \\ F_5' = F_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' + 3F_1' \\ F_3'' = F_3' + F_1' \\ F_4'' = F_4' + 2F_1' \\ F_5'' = F_5' - 5F_1' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = \frac{1}{5}F_2'' \\ F_3''' = F_3'' \\ F_4''' = F_4'' \\ F_5''' = F_5'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'''' = F_1''' \\ F_2'''' = F_2''' \\ F_3'''' = F_3''' + F_2''' \\ F_4'''' = F_4''' + 3F_2''' \\ F_5'''' = F_5''' + 11F_2''' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Las dos últimas ecuaciones nos dan

$$\begin{aligned} 2z &= 5 \\ 4z &= 0 \end{aligned}$$

que es claramente incompatible. El sistema inicial es incompatible.

c)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \\ F_4' = F_4 - 3F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

Intercambiamos columnas de la variable y (columna 2) y variable t (columna 4)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' \\ F_4'' = F_4 - 2F_2' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_3'' \\ F_4''' = F_4 - 5F_3' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Obtenemos el sistema triangular, teniendo en cuenta el cambio en las varaibles

$$\left\{\begin{array}{l} x + t - 3z + 2y = 2 \\ -3t + 5z - 5y = -3 \\ -z + 3y = 2 \\ -9y = -9 \end{array}\right.$$

Que resolvemos fácilmente

$$\begin{array}{rcl} y & = & 1, \\ z & = & 3y - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1, \\ t & = & \dfrac{1}{3}(5z - 5y + 3) = \dfrac{1}{3}(5 - 5 + 3) = 1, \\ x & = & 2 - t + 3z - 2y = 2 - 1 + 3 - 2 = 2. \end{array}$$

El sistema es compatible determinado con solución $s = (2, 1, 1, 1)$.
