industriales
etsii UPCT

Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 2
Números complejos

1. Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$, realiza las siguientes operaciones:

   a) Halla sus módulos y argumentos

   b) Calcula

$$\text{a) } \overline{z_1} + 6z_2 \quad \text{b) } 3z_1\overline{z_2} \quad \text{c) } z_1\,|z_2|\,i \quad \text{d) } z_1^3 \quad \text{e) } \frac{2z_2}{-z_1}$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

$$\text{a) } z_1 + z_2 \quad \text{b) } 3z_1 - 2z_2 \quad \text{c) } z_1z_2 \quad \text{d) } (z_2)^{-1} \quad \text{e) } \frac{z_1}{z_2}$$

3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy) = i$.

4. Calcula el módulo de los números complejos:

$$\text{a) } 3+4i \qquad \text{b) } \tfrac{1+i}{1-i} \qquad \text{c) } i^7 + i^{10} \qquad \text{d) } 1+i+i^2$$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$	b) $-3i$	c) -1	d) 3	e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
f) $-3+i\sqrt{3}$	g) $\frac{1+i}{1-i}$	h) i^7+i^{10}	i) $3+3i$	j) $1+i+i^2$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1+i)^3$	b) $\frac{2+3i}{3-4i}$	c) i^5+i^{16}	d) $1+i+i^2+i^3$	e) $\frac{1}{i}$
f) $(1+i\sqrt{3})^3$	g) $2_{\pi/2}$	h) $1_{\pi/4}$	i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$	j) $(2+2i)^2$
k) $(2-2i)^2$	l) $(2+2i)(2-2i)$	m) $e^{-i\pi/2}$	n) $2e^{-i\pi}$	ñ) $3e^{-i\pi/2}$
o) $2e^{-i\pi/4}$	p) $i+3e^{i2\pi}$	q) $e^{i\pi/4}-2e^{-i\pi/4}$	r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$	s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $|z| \leq 1$ b) $z + \overline{z} \geq |z|^2$ c) $z + \overline{z} \leq 1$ d) $z - \overline{z} = i$

e) $\operatorname{Im}(z) < 0$ f)$|\operatorname{Re}(z)| < 1$ g) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = z\overline{z}$ h) $|z|^{-1} \geq 1, \, (z \neq 0)$

i) $|z - 5i| = 8$ j) $\operatorname{Im}(z^2) > 2$ k) $\operatorname{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$ l) $\operatorname{Re}(z^2 - z) = 0$

m) $|z - 2| = |1 - 2\overline{z}|$ n) $2 < |z| < 3$ ñ) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$ o) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1+i)^{100}$ b) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{30}$ c) $\left(\sqrt{1-i}\right)^{10}$ d) $\dfrac{1}{(1-i)^5}$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$. Calcula i^{101}.

10. Calcula las siguientes raíces:

a)$\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d)$\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[4]{-81}$ g) $\sqrt{1-i}$

h) $\sqrt{3+3i}$ i) $\sqrt[3]{-2+2i}$ j) $\sqrt[3]{-1+i}$ k) $\sqrt[4]{-8\left(1-\sqrt{3}i\right)}$ l) $\sqrt[4]{1}$ m) $\sqrt[6]{1}$ n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

11. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$:

a) $z^2 + 1 = 0$ b) $z^3 + 2 = 0$ c) $z^5 + 64 = 0$ d) $(z^2+4)(z-1)^2 = 0$

12. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - (2+i)\,z + (9+i) = 0$ b)$z^2 - 2\,(2-i)\,z + 3\,(1-2i) = 0$ c) $z^4 + 64 = 0$

13. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $(1+i)^{2/3}$ b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/4}$

14. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\operatorname{sen}(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\operatorname{sen}(4x)$?

15. Resuelve: $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.
