Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 1 - Soluciones comentadas
Conceptos básicos. Teoría de conjuntos y estructuras algebráicas

1. Escribe en lenguaje matemático las siguientes afirmaciones:

   a) Sea f una aplicación entre dos conjuntos X e Y. Diremos que f es inyectiva si y sólo si para todo par de elementos del conjunto inicial tales que su imagen es la misma, entonces los elementos son iguales.

   b) Sea f una aplicación entre dos conjuntos X e Y. Diremos que f es sobreyectiva si y sólo si para cada elemento y del conjunto de llegada existe un elemento x del conjunto de partida cuya imagen por f es igual a y.

   c) Dado un número complejo z no nulo, se define el logaritmo de z como el conjunto de números complejos cuya parte real es igual a logaritmo neperiano del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z.

   Solución:

   a) Sea $f : X \to Y$. Diremos que f es inyectiva $\iff (\forall x_1, x_2 \in X \text{ con } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$.

   b) Sea $f : X \to Y$. Diremos que f es sobreyectiva $\iff (\forall y \in Y; \exists\, x \in X : f(x) = y)$.

   c) Sea $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, definimos el logaritmo complejo de $z, \log(z)$, como

   $$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

   siendo $\ln(x)$ el logaritmo natural de x.

2. Halla $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ e $Y - X$, en cada uno de los siguientes casos

   a) $X = \{1, 3, 6, 7\}, \quad Y = \{1, 5, 6\}$ b) $X = \{0, a, *, \sqrt{2}\}, \quad Y = \{*, a, 0\}$
   c) $X = \{1, 2, 3, 7\}, \quad Y = \{0, 5, 6\}$ d) $X = \{n \in \mathbb{N} | \quad n \text{ es par}\}, \; Y = \{n \in \mathbb{Z} | \quad 0 < n < 10\}$

   Solución:

	a)		b)		c)		d)
$\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} =$	$\{1, 3, 5, 6, 7\}$		$\{0, a, *, \sqrt{2}\}$		$\{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$		$\{n \in \mathbb{N} \| \quad n \text{ es par}\}$
$X \cap Y =$	$\{1, 6\}$		$\{*, a, 0\}$		$\{\varnothing\}$		$\{n \in \mathbb{Z} \| \quad 0 < n < 10\}$
$X - Y =$	$\{3, 7\}$		$\{\sqrt{2}\}$		$\{1, 2, 3, 7\}$		$\{n \in \mathbb{Z} \| \quad n \geq 10\}$
$Y - X =$	$\{5\}$		$\{\varnothing\}$		$\{0, 5, 6\}$		$\{\varnothing\}$

3. Determina si las siguientes asignaciones son o no aplicaciones:

   a) A cada número real le asignamos su cuadrado.

b) A cada número real le asignamos su raíz cuadrada.

c) A cada número real le asignamos su cubo.

d) A cada número real le asignamos su raíz cúbica.

e) A cada español mayor de edad le asignamos su NIF.

f) A cada persona le asignamos su tío.

Solución:

a) Sí.

b) No, porque los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas. Es aplicación cuando elegimo uno de esos signos.

c) Sí.

d) Depende del conjunto destino, ya que cada número real tiene 3 raíces, una real y dos complejas. Para garantizar que sea una aplicación podríamos, por ejemplo, asignarle la única raíz real que tiene.

e) Sí. No hay dos personas con DNI iguales.

f) No, porque cada persona puede tener varios tíos.

4. Sea $f : \{1, 3, 6, 7\} \rightarrow \{2, 5, 4\}$, la aplicación definida por

$$f(1) = 5, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 4, \quad f(7) = 5$$

Halla

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Im}(f) & f(\{1,3,7\}) \\ f(\{6,7\}) & f^{-1}(\{2,5\}) \\ f^{-1}(\{4,5\}) & f^{-1}(5) \\ f^{-1}(4) & f^{-1}(2) = \varnothing \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Im}(f) = \{4,5\} & f(\{1,3,7\}) = \{5\} \\ f(\{6,7\}) = \{4,5\} & f^{-1}(\{2,5\}) = \{1,3,7\} \\ f^{-1}(\{4,5\}) = \{1,3,6,7\} & f^{-1}(5) = \{1,3,7\} \\ f^{-1}(4) = \{6\} & f^{-1}(2) = \varnothing \end{array}$$

5. En cada uno de los siguientes casos, indica si la aplicación dada es inyectiva, suprayectiva y/o biyectiva

a) $f : \{1, 3, 6\} \to \{2, 3, 5\}$ definida por $f(1) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 2$

b) $f : \{1, 3, 6\} \to \{2, 3, 5\}$ definida por $f(1) = 5, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 2$

c) $f : \{1, 3, 6\} \to \{0, 2, 3, 5\}$ definida por $f(1) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 3$

d) $f : \{1, 3, 6\} \to \{0, 2, 3, 5\}$ definida por $f(1) = 3, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 0$

e) $f : \{1, 3, 6\} \to \{2, 5\}$ definida por $f(1) = 2, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 2$

f) $f : \{1, 3, 6, 7\} \to \{2, 4, 5\}$ definida por $f(1) = 5, \quad f(3) = 5, \quad f(6) = 4, \quad f(7) = 5$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5$

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

i) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{Si } x > 0 \\ e^{-x} & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

Solución:

a) Biyectiva.

b) Ni inyectiva ($f(1) = f(3)$), ni sobreyectiva ($f^{-1}(3) = \varnothing$).

c) Ni inyectiva ($f(1) = f(6)$), ni sobreyectiva ($f^{-1}(0) = f^{-1}(2) = \varnothing$).

d) Inyectiva, no sobreyectiva ($f^{-1}(2) = \varnothing$).

e) Ni inyectiva ($f(1) = f(6)$), sobreyectiva ($f(X) = Y$).

f) Ni inyectiva ($f(1) = f(3) = f(7)$), ni sobreyectiva ($f^{-1}(2) = \varnothing$).

g) Biyectiva. Inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Sobreyectiva: $f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}$

h) Ni inyectiva ($f(1) = f(-1)$), ni sobreyectiva (Si $y < 0 \Rightarrow f^{-1}(y) = \varnothing$).

i) Inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_2 = x_1$. No sobreyectiva ($f^{-1}(0) = \varnothing$).

j) Ni inyectiva ($f(x) = f(x + 2\pi)$), ni sobreyectiva (Si $|y| > 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = \varnothing$).

k) Ni inyectiva ($f(1) = f(-1)$), ni sobreyectiva (Si $y < 0 \Rightarrow f^{-1}(y) = \varnothing$).

6. En cada uno de los siguientes apartados, obtener las composiciones pedidas:

   a) $g \circ f$ y $f \circ g$ Siendo f y g definidas por $f(x) = 2x, \quad g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

   b) $h \circ g \circ f$ Siendo f, g y h definidas por $\forall x \in \mathbb{R}; \begin{cases} f(x) = x - 1 \\ g(x) = x^2 \\ h(x) = x + 2 \end{cases}$

   c) $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$ Siendo f definida por $f(x) = 2x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Solución:

$a)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2, \\ f \circ g(x) &= f(g(x)) = f\left(x^2\right) = 2x^2. \end{aligned}$$

$b)$

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = h(g(x-1)) = h\left((x-1)^2\right) = (x-1)^2 + 2.$$

$c)$

$$\begin{aligned} f^4 &= f \circ f \circ f \circ f(x) = f(f(f(f(x)))) = f(f(f(2x-1))) = f(f(2(2x-1)-1)) \\ &= f(f(4x-3)) = f(2(4x-3)-1) = f(8x-7) = 2(8x-7) - 1 = 16x - 15 \end{aligned}$$

7. Determina las inversas de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Siendo f definida por $f(x) = 6x - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   b) $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - 3$ Siendo f definida por $f(x) = \frac{9x-4}{3x+6}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

Solución:

$a)$ Buscamos para $y \in \mathbb{R}$, el número real $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = y \Leftrightarrow 6x - 5 = y,$$

y despejando la x

$$x = \frac{y+5}{6},$$

luego la inversa será:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{6}.$$

b) Buscamos para $y \in \mathbb{R}$, el número real $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{9x-4}{3x+6} = y,$$

es decir

$$9x - 4 = 3xy + 6y,$$

reagrupando términos en x

$$9x - 3xy = 6y + 4 \Leftrightarrow x(9-3y) = 6y + 4,$$

y despejando la x

$$x = \frac{6y+4}{9-3y},$$

luego la inversa será

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+4}{9-3x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}.$$