Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 18 - Soluciones comentadas
Ecuaciones diferenciales
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden Superior

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'' + 9x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x'' - 4x' + 8x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Soluciones:

a) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

con raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, reales y distintas. La solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^t + Be^{-2t}.$$

Para usar las condiciones iniciales, calculamos $x'(t)$

$$x'(t)) = Ae^t - 2Be^{-2t},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 1, \\ x'(0) &= A - 2B = 0, \end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$A = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{3}.$$

La solución del problema es

$$x(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

b) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2,$$

con raíz $\lambda_1 = -3$, real y doble. La solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}.$$

Para usar las condiciones iniciales necesitamos $x'(t)$

$$x'(t) = -3Ae^{-3t} + Be^{-3t} - 3Bte^{-3t},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x(1) &= Ae^{-3} + Be^{-3} = 0 \Rightarrow (A + B)e^{-3} = 0 \Rightarrow A + B = 0, \\ x'(1) &= -3Ae^{-3} + Be^{-3} - 3Be^{-3} = 1 \Rightarrow (-3A - 2B)e^{-3} = 1, \end{aligned}$$

de la primera ecuación obtenemos $B = -A$, y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$(-3A + 2B)e^{-3} = 1 \Rightarrow -Ae^{-3} = 1 \Rightarrow A = -e^3$$

La solución del problema es

$$x(t) = -e^3e^{-3t} + te^3e^{-3t} = e^{3(1-t)}(t - 1).$$

c) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9,$$

que tiene raíces complejas $\pm 3i$.Tenemos como solución general

$$x(t) = A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t).$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = -3A\operatorname{sen}(3t) + 3B\cos(3t),$$

para usar las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{3}\right) &= A\cos(\pi) + B\operatorname{sen}(\pi) = 0 \Rightarrow -A = 0, \\ x'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -3A\operatorname{sen}(\pi) + 3B\cos(\pi) = -1 \Rightarrow -3B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Y la solución del problema es

$$x(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t).$$

d) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

son complejas conjugadas y la solución general será de la forma

$$x(t) = Ae^t \cos(t) + Be^t \operatorname{sen}(t).$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = Ae^t (\cos t - \operatorname{sen} t) + Be^t (\operatorname{sen} t + \cos t),$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x(0) &= A \Rightarrow A = 1, \\ x'(0) &= A + B \Rightarrow A + B = 1, \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$ y $B = 0$ y por tanto la solución del problema es

$$x(t) = e^t \cos(t).$$

e) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea con polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases},$$

son reales distintas, así que la solución general es

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}.$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = 2Ae^{2t} - 3Be^{-3t},$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x(0) &= 1 \Rightarrow A + B = 1, \\ x'(0) &= 0 \Rightarrow 2A - 3B = 0, \end{aligned}$$

con solución $A = \frac{3}{5}$ y $B = \frac{2}{5}$, y la solución buscada es

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}.$$

f) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 8,$$

cuyas raíces

$$2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases},$$

son complejas conjugadas, así que la solución general es

$$x(t) = Ae^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + Be^t \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}t\right).$$

Calculamos $x'(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^t \cos\sqrt{3}t - A\sqrt{3}e^t \operatorname{sen}\sqrt{3}t + Be^t \operatorname{sen}\sqrt{3}t + B\sqrt{3}e^t \cos\sqrt{3}t, \\ &= e^t \cos\sqrt{3}t\left(A + B\sqrt{3}\right) + e^t \operatorname{sen}\sqrt{3}t\left(B - A\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

y aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x(0) &= 1 \Rightarrow A = 1, \\ x'(0) &= 0 \Rightarrow A + B\sqrt{3} = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

con solución $A = 1$ y $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y la solución buscada será en este caso

$$x(t) = e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^t \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}t\right).$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor frontera:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

a) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea que resolvemos usando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

son reales distintas y la solución general será de la forma

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Aplicando condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \Rightarrow A + B = 2 \\ \lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} Ae^x + Be^{-2x} = A\lim_{x\to\infty} e^x + B\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0 \end{aligned}$$

El segundo término en el límite es 0, mientras que el primer depende de A y es $-\infty$ si $A < 0$, $+\infty$ si $A > 0$ y 0 si $A = 0$, así que para que la suma de límites sea 0, la única opción válida es que $A = 0$ y por tanto, de la primera ecuación $B = 2$. La solución es

$$y(x) = 2e^{-2x}.$$

b) Ecuación de segundo orden lineal de coeficientes constantes homogénea que resolvemos usando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9,$$

cuyas raíces

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i$$

son complejas conjugadas, así que la solución general es

$$y(x) = A\cos(3x) + B\,\mathrm{sen}\,(3x)$$

y aplicando condiciones de contorno obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ \\ y(\pi) &= 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

No hay ninguna restricción al valor de B, luego la solución al problema

$$y(x) = B\,\mathrm{sen}\,(3x). \quad B \in \mathbb{R}.$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - y' - 6y = 2 + 3x$ (b) $y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3$ (c) $y'' - y' - 6y = 2e^{-3x}$

(d) $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ (e) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$ (f) $y'' - y' - 6y = 2\cos(3x)$

(g) $y'' + 4y = 3\sin(2x)$ (h) $y'' + y = 2\cos x$ (i) $y'' - 2y' = 12x - 10$

Solución: Todas las ecuaciones son lineales de orden 2, con coeficientes constantes y no homogéneas. En todos los casos calcularemos las soluciones de la ecuación homogénea y después buscaremos una solución particular.

a)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 6y = 2 + 3x$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 6$
Raíces	$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
	$\lambda_1 = 3$
	$\lambda_2 = -2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p(x) = a + bx,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= b, \\ y_p''(x) &= 0, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\underbrace{(0)}_{y_p''} - \underbrace{(b)}_{y_p'} - 6\underbrace{(a+bx)}_{y_p} = 2+3x \Leftrightarrow (-b-6a) - 6bx = 2+3x,$$

de donde, igualando los coeficientes de los polinomios en ambos miembros de la igualdad, obtendremos

$$\begin{aligned} -b-6a &= 2, \\ -6b &= 3, \end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned} b &= -\frac{1}{2}, \\ a &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

con estos valores la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x,$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x.$$

b)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 1 - 4x^3$
Ecuación Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 8\lambda + 16$
Raíces	$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$
	$\lambda_1 = 4$
	$\lambda_2 = 4$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2, \\ y_p''(x) &= 2c + 6dx, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned}
\underbrace{(2c+6dx)}_{y_p''} - 8\underbrace{\left(b+2cx+3dx^2\right)}_{y_p'} + 16\underbrace{\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)}_{y_p} &= 1-4x^3 \\
(2c-8b+16a) + (6d-16c+16b)\,x + (16c-24d)\,x^2 + 16dx^3 &= 1-4x^3
\end{aligned}$$

de donde, igualando los coeficientes de los polinomios en ambos miembros de la igualdad, obtendremos

$$\begin{aligned}
2c-8b+16a &= 1 \\
6d-16c+16b &= 0 \\
16c-24d &= 0 \\
16d &= -4
\end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$a=-\frac{1}{32} \qquad b=-\frac{9}{32} \qquad c=-\frac{3}{8} \qquad d=-\frac{1}{4}\ ,$$

valores que nos dan como solución particular

$$y_p\left(x\right) = -\frac{1}{32} - \frac{9}{32}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

y como solución general

$$y\left(x\right) = y_h\left(x\right) + y_p\left(x\right) = Ae^{4x} + Bxe^{4x} - \frac{1}{32} - \frac{9}{32}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

o factorizando

$$y\left(x\right) = \left(A+Bx\right)e^{4x} - \frac{8x^3+12x^2+9x+1}{32}.$$

c)

Ecuación No Homogénea	$y''-y'-6y=2e^{-3x}$
Ecuación Homogénea	$y''-y'-6y=0$
Polinomio Característico	$\lambda^2-\lambda-6$
Raíces	$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$
	$\lambda_1=3$
	$\lambda_2=-2$
Solución Homogénea	$y_h\left(x\right)=Ae^{3x}+Be^{-2x}$

Probaremos como solución particular

$$y_p\left(x\right) = ae^{-3x},$$

de esta forma

$$\begin{aligned}
y_p'\left(x\right) &= -3ae^{-3x}, \\
y_p''\left(x\right) &= 9ae^{-3x}
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(9ae^{-3x}\right)}_{y_p''}-\underbrace{\left(-3ae^{-3x}\right)}_{y_p'}-6\underbrace{\left(ae^{-3x}\right)}_{y_p} &= 2e^{-3x},\\ 6ae^{-3x} &= 2e^{-3x},\end{aligned}$$

igualando coeficientes obtenemos

$$6a=2\Rightarrow a=\frac{1}{3},$$

la solución particular es

$$y_p\left(x\right)=\frac{1}{3}e^{-3x},$$

y la solución general

$$y\left(x\right)=y_h\left(x\right)+y_p\left(x\right)=Ae^{3x}+Be^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-3x}.$$

d)

Ecuación No Homogénea	$y''-y'-2y=3e^{-x}$
Ecuación Homogénea	$y''-y'-2y=0$
Polinomio Característico	$\lambda^2-\lambda-2$
Raíces	$\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$
	$\lambda_1=2$
	$\lambda_2=-1$
Solución Homogénea	$y_h\left(x\right)=Ae^{2x}+Be^{-x}$

Como el término independiente de la ecuación es de la forma $3e^{-x}$, se podría pensar en usar una solución particular de este tipo $y_p\left(x\right)=ae^{-x}$, sin embargo, este tipo de soluciones ya se encuentra dentro de la solución de la homogénea y por ello tendremos que probar con una solución particular distinta,

$$y_p\left(x\right)=axe^{-x},$$

de esta forma

$$\begin{aligned}y_p'\left(x\right) &= ae^{-x}-axe^{-3x}=a\left(1-x\right)e^{-x},\\ y_p''\left(x\right) &= -ae^{-x}-a\left(1-x\right)e^{-x}=a\left(x-2\right)e^{-x},\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(a\left(x-2\right)e^{-x}\right)}_{y_p''}-\underbrace{\left(a\left(1-x\right)e^{-x}\right)}_{y_p'}-\underbrace{2\left(axe^{-x}\right)}_{y_p} &= 3e^{-x},\\ -3ae^{-3x} &= 3e^{-x},\end{aligned}$$

igualando coeficientes obtenemos

$$-3a=3\Rightarrow a=-1$$

la solución particular es

$$y_p(x) = -xe^{-x},$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} - xe^{-x}.$$

e)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$
Ecuación Homogénea	$y'' - 8y' + 16y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 8\lambda + 16$
Raíces	$\lambda = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \dfrac{8 \pm 0}{2}$
	$\lambda_1 = 4$
	$\lambda_2 = 4$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$

Como el término independiente es de la forma e^{4x}, se podría plantear una solución particular de la forma ae^{4x}, pero este tipo de soluciones ya están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución. Las soluciones del tipo axe^{4x} también están contempladas en la solución homogénea, así que tampoco sirve y tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = ax^2e^{4x},$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2axe^{4x} + 4ax^2e^{4x} = \left(2ax + 4ax^2\right)e^{4x}, \\ y_p''(x) &= (1+4x)\,2ae^{4x} + 8ae^{4x}\left(x + 2x^2\right) = \left(2a + 16ax + 16ax^2\right)e^{4x}, \end{aligned}$$

que al sustituir en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\left(2a + 16ax + 16ax^2\right)e^{4x}\right)}_{y_p''} - 8\underbrace{\left(\left(2ax + 4ax^2\right)e^{4x}\right)}_{y_p'} + 16\underbrace{\left(ax^2e^{4x}\right)}_{y_p} &= e^{4x}, \\ \left(2a + 16ax + 16ax^2 - 8\left(2ax + 4ax^2\right) + 16ax^2\right)e^{4x} &= e^{4x}, \\ \left(2a + 16ax + 16ax^2 - 16ax - 32ax^2 + 16ax^2\right)e^{4x} &= e^{4x}, \\ 2ae^{4x} &= e^{4x}, \end{aligned}$$

de donde igualando coeficientes

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Con este valor, la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{4x},$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x} = \left(2A + 2Bx + x^2\right)\frac{e^{4x}}{2}.$$

f)

Ecuación No Homogénea	$y'' - y' - 6y = 2\cos(3x)$
Ecuación Homogénea	$y'' - y' - 6y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - \lambda - 6$
Raíces	$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$
	$\lambda_1 = 3$
	$\lambda_2 = -2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

Usamos como solución particular

$$y_p(x) = a\cos 3x + b \operatorname{sen} 3x,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -3a \operatorname{sen} 3x + 3b\cos 3x, \\ y_p''(x) &= -9a\cos 3x - 9b \operatorname{sen} 3x, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(-9a\cos 3x - 9b \operatorname{sen} 3x)}_{y_p''} - \underbrace{(-3a \operatorname{sen} 3x + 3b\cos 3x)}_{y_p'} - 6\underbrace{(a\cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)}_{y_p} &= 2\cos(3x) \\ (-9a - 3b - 6a)\cos 3x + (-9b + 3a - 6b)\operatorname{sen} 3x &= 2\cos(3x) \\ (-15a - 3b)\cos 3x + (-15b + 3a)\operatorname{sen} 3x &= 2\cos 3x \end{aligned}$$

de donde igualando coeficientes

$$\begin{aligned} -15a - 3b &= 2, \\ 3a - 15b &= 0, \end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= -\frac{5}{39}, \\ b &= -\frac{1}{39}. \end{aligned}$$

Con estos valores la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{5}{39}\cos 3x - \frac{1}{39}\operatorname{sen} 3x,$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} - \frac{5}{39}\cos 3x - \frac{1}{39}\operatorname{sen} 3x.$$

g)

Ecuación No Homogénea	$y'' + 4y = 3\,\mathrm{sen}\,(2x)$
Ecuación Homogénea	$y'' + 4y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 4$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-4}$
	$\lambda_1 = 2i$
	$\lambda_2 = -2i$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}\,(2x)$

El término independiente es de la forma $3\,\mathrm{sen}\,(2x)$, luego no podemos tomar soluciones particulares de la forma $(a\,\mathrm{sen}\,2x + b\cos 2x)$ y que están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución modificada, así que tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = x\,(a\,\mathrm{sen}\,2x + b\cos 2x)$$

de esta forma

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= (a\,\mathrm{sen}\,2x + b\cos 2x) + x\,(2a\cos 2x - 2b\,\mathrm{sen}\,2x) = (b + 2ax)\cos 2x + (a - 2bx)\,\mathrm{sen}\,2x \\
y_p''(x) &= (2a\cos 2x - 2b\,\mathrm{sen}\,2x) + (2a\cos 2x - 2b\,\mathrm{sen}\,2x) + x\,(-4a\,\mathrm{sen}\,2x - 4b\cos 2x) \\
&= (4a - 4bx)\cos 2x + (-4b - 4ax)\,\mathrm{sen}\,2x
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned}
\underbrace{((4a - 4bx)\cos 2x + (-4b - 4ax)\,\mathrm{sen}\,2x)}_{y_p''} + 4\underbrace{(x\,(a\,\mathrm{sen}\,2x + b\cos 2x))}_{y_p} &= 3\,\mathrm{sen}\,(2x) \\
(4a - 4bx + 4bx)\cos 2x + (-4b - 4ax + 4ax)\,\mathrm{sen}\,2x &= 3\,\mathrm{sen}\,(2x) \\
4a\cos 2x - 4b\,\mathrm{sen}\,2x &= 3\,\mathrm{sen}\,2x
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
4a &= 0 \\
-4b &= 3
\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x\cos 2x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}\,(2x) - \frac{3}{4}x\cos 2x.$$

h)

Ecuación No Homogénea	$y'' + y = 2\cos x$
Ecuación Homogénea	$y'' + y = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 1$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-1}$
	$\lambda_1 = i$
	$\lambda_2 = -i$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$

Como el término independiente es de la forma $2\cos x$, podríamos plantearnos una solución particular de la forma $(a\operatorname{sen} x + b\cos x)$, pero estas soluciones ya están contempladas en la solución homogénea, así que hay que probar con otra solución modificada, así que tendremos que probar con una solución particular del tipo

$$y_p(x) = x(a\operatorname{sen} x + b\cos x)$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (a\operatorname{sen} x + b\cos x) + x(a\cos x - b\operatorname{sen} x) = (b+ax)\cos x + (a-bx)\operatorname{sen} x \\ y_p''(x) &= (a\cos x - b\operatorname{sen} x) + (a\cos x - b\operatorname{sen} x) + x(-a\operatorname{sen} x - b\cos x) \\ &= (2a - bx)\cos x + (-2b - ax)\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{((2a-bx)\cos x + (-2b-ax)\operatorname{sen} x)}_{y_p''} + \underbrace{(x(a\operatorname{sen} x + b\cos x))}_{y_p} &= 2\cos x \\ (2a - bx + bx)\cos x + (-2b - ax + ax)\operatorname{sen} x &= 2\cos x \\ \\ 2a\cos x - 2b\operatorname{sen} x &= 2\cos x \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \\ -2b &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = x\operatorname{sen} x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x.$$

i)

Ecuación No Homogénea	$y'' - 2y' = 12x - 10$
Ecuación Homogénea	$y'' - 2y' = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$
Raíces	$\lambda_1 = 0$
	$\lambda_2 = 2$
Solución Homogénea	$y_h(x) = A + Be^{2x}$

El término independiente es de la forma $12x - 10$, podríamos plantearnos una solución particular de la forma $(ax + b)$,

$$y_p(x) = ax + b$$

de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a \\ y_p''(x) &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(0)}_{y_p''} - 2\underbrace{(a)}_{y_p} &= 12x - 10 \\ -2a &= 12x - 10 \end{aligned}$$

pero esto es imposible ya que implica que $-2a = -10$ y $0 = 12$, lo que es imposible. ¿Porqué sucede esto? Tiene que ver porque en la EDO lineal no aparece el término en y y sólo aparecen los términos en y'' e y'. Tenemos dos formas de resolver el problema. La primera es considerar una solución particular modificada de la forma

$$y_p(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

como en los casos de raíz doble o término independiente incluido en la solución de la homogénea, de esta forma

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{(2a)}_{y_p''} - 2\underbrace{(2ax + b)}_{y_p} &= 12x - 10 \\ -4ax + (2a - 2b) &= 12x - 10 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -4a &= 12 \\ 2a - 2b &= -10 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -3x^2 + 2x$$

Luego la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^{2x} + -3x^2 + 2x = \left(A + 2x - 3x^2\right) + Be^{2x}.$$

La otra forma consiste en hacer un cambio en la ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned} p &= y' \\ p' &= y'' \end{aligned}$$

De forma que la ecuación diferencial es

$$p' - 2p = 12x - 10$$

que es lineal y la podemos resolver con el método de variación de las constantes. Resolviendo la homogénea

$$p' - pz = 0 \Rightarrow p' = 2p \Rightarrow \frac{p'}{p} = 2 \Rightarrow \ln p = 2x + C \Rightarrow p = Be^{2x}$$

y haciendo variar la constante B, probamos con la solución $p = B(x) e^{2x}$

$$p'(x) = B'(x) e^{2x} + 2B(x) e^{2x}$$

sustituyendo en la no homogénea

$$p' - 2p = 12x - 10 \Leftrightarrow \left(B'(x) e^{2x} + 2B(x) e^{2x}\right) - 2\left(B(x) e^{2x}\right) = 12x - 10$$

de donde

$$B'(x) e^{2x} = 12x - 10 \Rightarrow B'(x) = (12x - 10) e^{-2x}$$

e integrando por partes $u = 12x - 10$ y $dv = e^{-2x}dx$, por tanto $du = 12dx$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\begin{aligned} B(x) &= \int (12x - 10) e^{-2x} = -(12x - 10)\frac{1}{2}e^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}12dx \\ &= (5 - 6x) e^{-2x} - 3e^{-2x} + C \\ &= (2 - 6x) e^{-2x} + C \end{aligned}$$

y la solución general será

$$p(x) = B(x) e^{2x} = \left((2 - 6x) e^{-2x} + C\right) e^{2x} = (2 - 6x) + Ce^{2x}$$

recordemos que $p(x) = y'(x)$ luego integrando encontraremos el valor de $y(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int p(x)\, dx = \int (2 - 6x) + Ce^{2x}dx = 2x - 3x^2 + \frac{C}{2}e^{2x} + K \\ &= \left(K + 2x - 3x^2\right) + \frac{C}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

que coincide con la solución general encontrada antes.

4. Consideremos la siguiente ecuación diferencial para el oscilador armónico sin rozamiento y bajo la acción de una fuerza externa de tipo periódico

$$x'' + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La cantidad $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ se llama frecuencia natural del oscilador. Comprueba que si la frecuencia ω de la fuerza externa se aproxima a ω_0, entonces la amplitud de las oscilaciones tiende a infinito, es decir, demuestra que

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \infty, \quad t > 0.$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia y obviamente, debido a la analogía entre el oscilador armónico y el circuito RLC, también se da en este tipo de circuitos eléctricos.

Solución: Es una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que resolvemos como en los apartados anteriores.

Ecuación No Homogénea	$x'' + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$
Ecuación Homogénea	$x'' + \omega_0^2 x = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + \omega_0^2$
Raíces	$\lambda = \sqrt{-\omega_0^2}$
	$\lambda_1 = \omega_0 i$
	$\lambda_2 = -\omega_0 i$
Solución Homogénea	$x_h(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

Suponiendo $\omega \neq \omega_0$, probaremos como solución particular

$$x_p(t) = a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

de esta forma

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t \\ x_p''(t) &= -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)}_{x_p''} + \omega_0^2\underbrace{(a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t)}_{x_p} &= A\cos(\omega t) \\ \left(-a\omega^2 + a\omega_0^2\right)\cos\omega t + \left(-b\omega^2 + b\omega_0^2\right)\mathrm{sen}\,\omega t &= A\cos(\omega t) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \left(-a\omega^2 + a\omega_0^2\right) &= A \Rightarrow -a\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = A \\ \left(-b\omega^2 - b\omega_0^2\right) &= 0 \Rightarrow -b\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{A}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos\omega t$$

Luego la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + \frac{A}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos\omega t.$$

y por tanto

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$$

debido a que las funciones trigonométricas están acotadas.

En el caso de que $\omega = \omega_0$, entonces la solución particular que hay que probar debe ser de la forma

$$x_p(t) = t\,(a\cos\omega_0 t + b\operatorname{sen}\omega_0 t)$$

de esta forma

$$x_p'(t) = (a\cos\omega_0 t + b\operatorname{sen}\omega_0 t) + t\,(-a\omega_0\operatorname{sen}\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= (-a\omega_0\operatorname{sen}\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t) + (-a\omega_0\operatorname{sen}\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t) + t\left(-a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\operatorname{sen}\omega_0 t\right) \\ &= \left(2b\omega_0 - a\omega_0^2 t\right)\cos\omega_0 t + \left(-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t\right)\operatorname{sen}\omega_0 t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$\begin{aligned} x'' + \omega_0^2 x &= A\cos(\omega_0 t) \\ \underbrace{\left(\left(2b\omega_0 - a\omega_0^2 t\right)\cos\omega_0 t + \left(-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t\right)\operatorname{sen}\omega_0 t\right)}_{x_p''} + \omega_0^2\underbrace{(t\,(a\cos\omega_0 t + b\operatorname{sen}\omega_0 t))}_{y_p} &= A\cos(\omega_0 t) \\ \left(2b\omega_0 - a\omega_0^2 t + a\omega_0^2 t\right)\cos\omega_0 t + \left(-2a\omega_0 - b\omega_0^2 t + b\omega_0^2 t\right)\operatorname{sen}\omega_0 t &= A\cos(\omega_0 t) \\ 2b\omega_0\cos\omega_0 t - 2a\omega_0\operatorname{sen}\omega_0 t &= A\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -2a\omega_0 &= 0 \\ 2b\omega_0 &= A \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{A}{2\omega_0} \end{aligned}$$

y la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{A}{2\omega_0} t\operatorname{sen}\omega_0 t$$

Luego la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{A}{2\omega_0} t\operatorname{sen}\omega_0 t.$$

y por tanto

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$$

debido a que las funciones trigonométricas están acotadas.

5. Consideremos un circuito RLC con $R = 110$, $L = 1$, $C = 1/1000$, con unidades en el Sistema Internacional, y donde la fuerza electromotriz está dada por

$$E(t) = \begin{cases} 90, & 0 \leq t < 1 \\ \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Calcula la intensidad de corriente $I(t)$ que circula por el circuito, es decir, resuelve el problema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 I}{dt^2} + 110\dfrac{dI}{dt} + 1000I = \dfrac{dE}{dt} \\ \\ I(0) = 0 \\ \\ I'(0) = 90 \end{cases}$$

Solución: Vamos a buscar la solución correspondiente al intervalo $[0,1]$, para ello y teniendo en cuenta que $\dfrac{dE}{dt} = 0$. Teniendo en cuenta que se cumple la ecuación

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E \quad \forall t \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 110I + 1000Q = 90 \quad t \in [0,1]$$

con los datos conocidos, obtenemos

$$I'(0) + 110I(0) + 1000Q(0) = 90 \Leftrightarrow 90 + 1000Q(0) = 90 \Leftrightarrow Q(0) = 0$$

es decir no hay carga en el circuito en $t = 0$. Ahora resolvemos el problema

Ecuación Homogénea	$\dfrac{d^2 I}{dt^2} + 110\dfrac{dI}{dt} + 1000I = 0$
Polinomio Característico	$\lambda^2 + 110\lambda + 1000 = 0$
Raíces	$\lambda_1 = -10$
	$\lambda_2 = -100$
Solución	$I(t) = Ae^{-10t} + Be^{-100t}$
	$I'(t) = -10Ae^{-10t} - 100Be^{-100t}$

aplicando condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} I(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ \\ I'(0) &= 90 \Rightarrow -10A - 100B = 90 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

Siendo la solución del problema para el intervalor $[0,1]$

$$I_1(t) = e^{-10t} - e^{-100t}.$$

Para encontrar qué ocurre para $t > 1$, tendremos que encontrar los valores de $I(1)$ y $I'(1)$ que hay en el circuito cuando la función E cambia de 90 a 0. Sabemos que

$$\frac{dI}{dt} + 110I + 1000Q = E \quad \forall t$$

por tanto para $t = 1$

$$\frac{dI}{dt}(1) + 110I(1) + 1000Q(1) = 0$$

6. Consideremos el problema de la Mecánica Cuántica que consiste en estudiar el movimiento de una partícula que se mueve libremente a lo largo del segmento $(0, L)$. Este problema se modeliza matemáticamente por medio del problema de contorno

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x), \quad 0 < x < L \\ \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula, E es su energía, y $\psi = \psi(x)$ es la función de onda. Comprueba que los únicos valores de energía para los que el problema anterior tiene una solución no nula son

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}, \quad n \geq 1.$$

Este fenómeno se conoce en Mecánica Cuántica como cuantización de la energía. Calcula $\psi_n(x)$ teniendo en cuenta que ψ_n son funciones de onda y por tanto $\int_0^L \psi_n^2(x)\,dx = 1$.

7. Calcula los autovalores y autofunciones de los siguientes problemas de contorno, es decir, los valores de $\lambda \in R$ para los que los siguientes problemas tienen solución no nula:

$$(a)\ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

Solución: La EDO es igual en todos los casos y distinguiremos según el valor de α

Caso	Ecuación	Polinomio Característico Raíces	Solución General
$\alpha = 0$	$\Rightarrow \quad y'' = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow \quad y(t) = At + B$
$\alpha = -\beta^2 < 0$	$\Rightarrow \quad y'' - \beta^2 y = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 - \beta^2 \\ \lambda_1 = +\beta \\ \lambda_2 = -\beta \end{cases}$	$\Rightarrow \quad y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$
$\alpha = \beta^2 > 0$	$\Rightarrow \quad y'' + \beta^2 y = 0$	$\Rightarrow \begin{cases} p(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2 \\ \lambda_1 = +\beta i \\ \lambda_2 = -\beta i \end{cases}$	$\Rightarrow \quad y(t) = A\cos\beta t + B\,\mathrm{sen}\,\beta t$

Y ahora aplicaremos las condiciones de contorno

a) Condiciones de contorno: $y(0) = y(1) = 0$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = At + B$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \\ \\ y(1) = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

2) $\alpha = -\beta^2 < 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ \\ y(1) = 0 \Rightarrow Ae^{\beta} + Be^{-\beta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ \\ A\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

3) $\alpha = \beta^2 > 0 \Rightarrow y(t) = A\cos\beta t + B\operatorname{sen}\beta t$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \\ y(1) = 0 \Rightarrow A\cos\beta + B\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \\ B\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \text{o} \\ \operatorname{sen}\beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ \text{o} \\ y(t) = B\operatorname{sen} n\pi t \end{cases}$$

b) Condiciones de contorno: $y'(0) = y'(1) = 0$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = At + B \Rightarrow y'(t) = A$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \\ y'(1) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = B$$

2) $\alpha = -\beta^2 < 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \Rightarrow y'(t) = \beta\left(Ae^{\beta t} - Be^{-\beta t}\right)$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow \beta(A - B) = 0 \\ \\ y(1) = 0 \Rightarrow \beta\left(Ae^{\beta} - Be^{-\beta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta(A - B) = 0 = 0 \Rightarrow A = B \\ \\ \beta\left(Ae^{\beta} - Be^{-\beta}\right) = 0 \Rightarrow \beta A\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0$$

3) $\alpha = \beta^2 > 0 \Rightarrow y(t) = A\cos\beta t + B\,\mathrm{sen}\,\beta t \Rightarrow y'(t) = \beta(-A\,\mathrm{sen}\,\beta t + B\cos\beta t)$

$$\left\{\begin{array}{c} y'(0) = 0 \Rightarrow \beta B = 0 \\ \\ y(1) = 0 \Rightarrow \beta(-A\,\mathrm{sen}\,\beta + B\cos\beta) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \\ \beta(-A\,\mathrm{sen}\,\beta + B\cos\beta) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow -A\beta\,\mathrm{sen}\,\beta = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ \text{o} \\ \mathrm{sen}\,\beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y(0) = 0 \\ \text{o} \\ y(t) = A\cos n\pi t \end{array}\right.$$

c) Condiciones de contorno: $y(-\pi) = y(\pi)$ y $y'(-\pi) = y'(\pi)$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow y(t) = At + B \Rightarrow y'(t) = A$

$$\left\{\begin{array}{c} y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow -A\pi + B = A\pi + B \\ \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow A = A \end{array}\right. \Rightarrow -A\pi = A\pi \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(t) = B$$

2) $\alpha = -\beta^2 < 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \Rightarrow y'(t) = \beta\left(Ae^{\beta t} - Be^{-\beta t}\right)$

$$y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow Ae^{-\beta\pi} + Be^{\beta\pi} = Ae^{\beta\pi} + Be^{-\beta\pi} \Rightarrow A = B$$

$$\begin{aligned} y'(-\pi) &= y'(\pi) \Rightarrow \beta\left(Ae^{-\beta\pi} - Be^{\beta\pi}\right) = \beta\left(Ae^{\beta\pi} - Be^{-\beta\pi}\right) \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta A = -\beta B \\ -\beta B = \beta A \end{array}\right. \Rightarrow A = -B \end{aligned}$$

Por tanto

$$A = B = -B \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow y(t) = 0$$

3) $\alpha = \beta^2 > 0 \Rightarrow y(t) = A\cos\beta t + B\,\mathrm{sen}\,\beta t \Rightarrow y'(t) = \beta(-A\,\mathrm{sen}\,\beta t + B\cos\beta t)$

$$\begin{aligned} y(-\pi) &= y(\pi) \Rightarrow A\cos(-\beta\pi) + B\,\mathrm{sen}(-\beta\pi) = A\cos(\beta\pi) + B\,\mathrm{sen}(\beta\pi) \\ &\Rightarrow A\cos(\beta\pi) - B\,\mathrm{sen}(\beta\pi) = A\cos(\beta\pi) + B\,\mathrm{sen}(\beta\pi) \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = A \\ \\ B = -B \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(-\pi) &= y'(\pi) \Rightarrow \beta(-A\,\mathrm{sen}(-\beta\pi) + B\cos(-\beta\pi)) = \beta(-A\,\mathrm{sen}(\beta\pi) + B\cos(\beta\pi)) \\ &\Rightarrow \beta(A\,\mathrm{sen}\,\beta\pi + B\cos\beta\pi) = \beta(-A\,\mathrm{sen}(\beta\pi) + B\cos(\beta\pi)) \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta A = -\beta A \\ \\ \beta B = \beta B \end{array}\right. \end{aligned}$$

De donde

$$\left\{\begin{array}{l} A=-A \Rightarrow A=0 \\ \\ B=-B \Rightarrow B=0 \end{array}\right. \Rightarrow y\left(t\right)=0$$
