1. Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = x^2y^2 + 2x + 2y$ en $(1,0)$

b) $g(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ en $(0, \pi/2)$

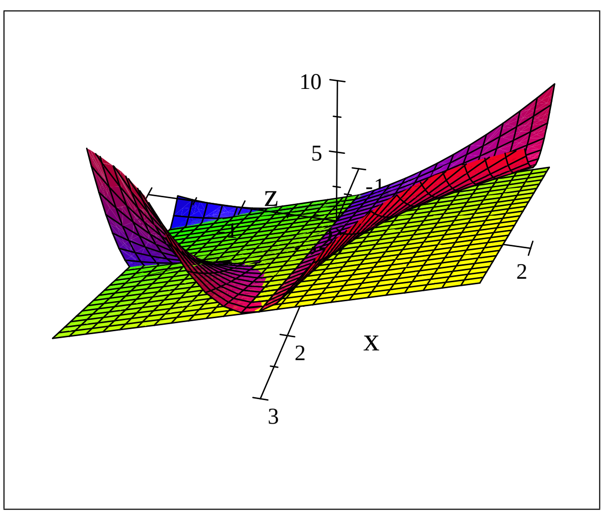
c) $h(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ en $(-1,-1)$

Solución: En cada caso hay que calcular el polinomio de Taylor de primer grado de cada función en el punto indicado.

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-x_0)$$

a) En la gráfica se representan la gráfica y su plano tangente

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^2 + 2x + 2y \text{ en } (1,0) \\ f(1,0) &= 2 \\ \nabla f(x,y) &= \left(2xy^2 + 2, 2x^2y + 2\right) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (2,2) \\ T_f(x,y) &= 2 + 2(x-1) + 2y = 2x + 2y \end{aligned}$$

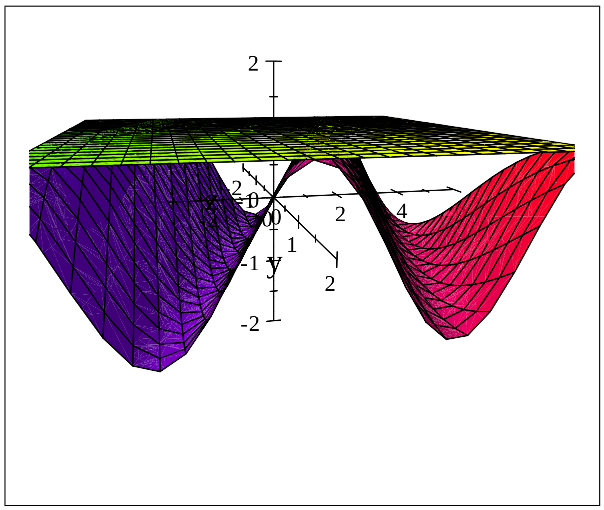


b)

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y en\, (0, \pi/2) \\
g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\
\nabla g(x,y) &= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \Rightarrow \nabla g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,0)
\end{aligned}
$$

La ecuación del plano tangente es

$$T_f(x,y) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

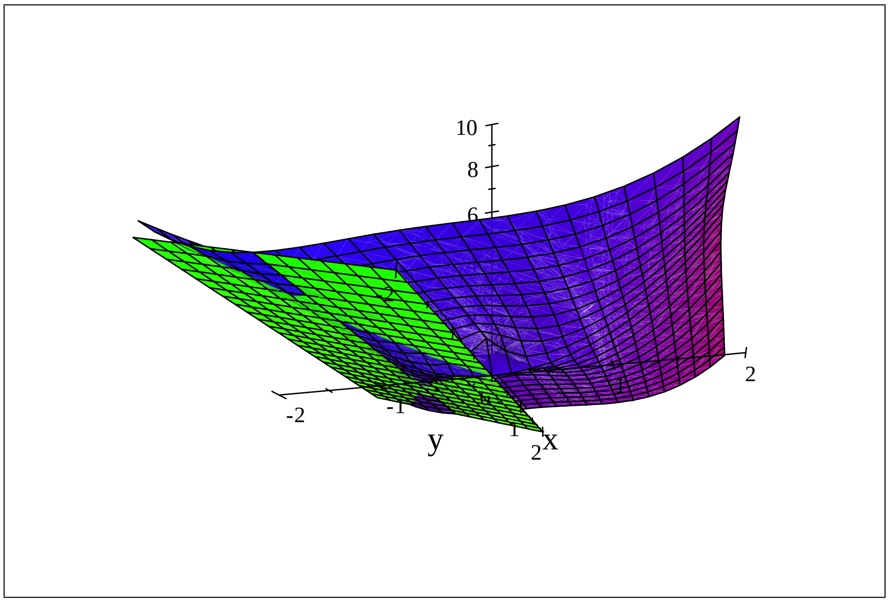


c)

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow h(-1,-1) = 1 \\
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{4x^3\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{2y\left(x^2+y^2\right) - 2y\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2x^5 + 2y^2x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{2yx^2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right) \\
&\Rightarrow \nabla f(-1,-1) = (-1,0),
\end{aligned}
$$

y la ecuación del plano tangente será

$$T_f(x,y) = 1 - (x+1) = -x.$$



2. Demuestra que la ecuación de la elipse

$$x^2 + 3y^2 = 12,$$

en el punto $(3, 1)$ define a y como función implícita de x. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$, en $x = 3$.

3. Demuestra que la ecuación

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0,$$

define, en un entorno de $x = 0$, una función implícita $y = f(x)$, con $f(0) = 1$. Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x)$, en $x = 0$.

4. Sea $z = f(x, y)$ la función definida a partir de la expresión

$$3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y = e,$$

Halla $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$, y determina la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$.

5. Comprueba que las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x, tales que $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$. Calcula el desarrollo de Taylor en 0 de orden 2 de ambas funciones.

6. Comprueba que las ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z^2 = 0 \\ xy + z - y = 0 \end{cases}$$

define a las variables x e y como funciones implícitas de z, tales que $x(2) = 0$ e $y(2) = 2$. Calcula una aproximación de dichas funciones mediante el polinomio de Taylor de orden 2 de ambas funciones.

7. Comprueba si la ecuación

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0,$$

determina una función $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1)$. En caso afirmativo, calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$, y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0, 1, f(0, 1))$.

8. De una función $f : R^3 \to R$, sabemos que

$$f(0,0,0) = 2; \quad \nabla f(0,0,0) = (1, 2, -1); \quad Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) A partir de estos datos, obtén una expresión aproximada para $f(x, y, z)$ en un entorno del punto $(0, 0, 0)$.

   b) Encuentra una aproximación para el valor de $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

9. Se considera la función $z = f(x, y)$ que, en un entorno del punto $(1, 1, 1)$, está definida implícitamente por

$$z^3 + 3x^2y - y^3z + y^2 - 3x - 1 = 0,$$

Obtén el polinomio de Taylor de grado 2 de tal función en $(1, 1)$.

10. Comprueba que la ecuación

$$z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0,$$

determina una función $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 1 + \sqrt{e}, 1)$. Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1 + \sqrt{e}, 1)$.

11. Comprueba que los circunferencias de ecuaciones $(x-2)^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + (y-2)^2 = 2$ son tangentes en el punto $(1, 1)$.

Solución: Para comprobarlo tenemos que comprobar que la derivada de la función y como función implícita de x en el punto $(1, 1)$ es la misma. Primero comprobaremos que las ecuaciones definen a y como función implícita de x

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 2 \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1(1, 1) = (1-2)^2 + 1 - 2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(1, 1) = 2 \neq 0 \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{c} F_2(x, y) = x^2 + (y-2)^2 - 2 \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) = 2(y-2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_2(1, 1) = 1 + (1-2)^2 - 2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(1, 1) = -2 \neq 0 \end{array} \right.$$

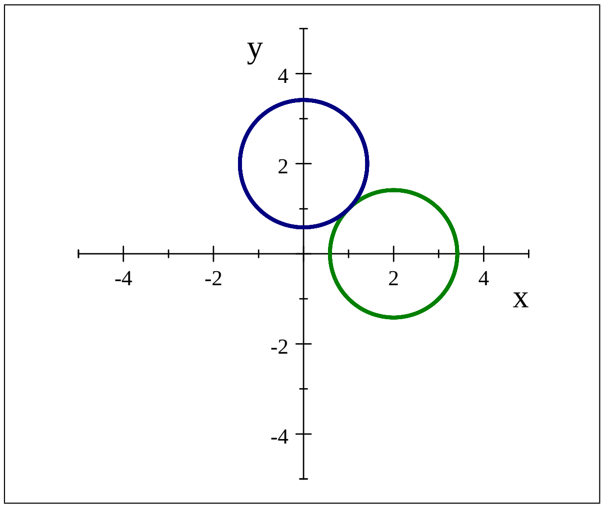
Calculamos la derivada en cada caso. Para F_1

$$y'(1) \Rightarrow 2(x-2) + 2yy' = 0 \Rightarrow 2(1-2) + 2y(1)\,y'(1) = 0 \Rightarrow -2 + 2y'(1) = 0 \Rightarrow y'(1) = 1$$

Para F_2

$$y'(1) \Rightarrow 2x + 2(y-2)\,y' = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 2(y(1) - 2)\,y'(1) = 0 \Rightarrow 2 + 2(1-2)\,y'(1) = 0 \Rightarrow y'(1) = 1$$

Gráficamente podemos comprobar que ambas circunferencias son tangentes en $(1, 1)$



12. Halla el desarrollo de Taylor de grado tres para la función $f(x,y) = x^y$ en un entorno del punto $(a,b) = (1,1)$. Usa este desarrollo para calcular de forma aproximada el valor de $1{,}1^{1{,}02}$.

13. Estudia los puntos críticos y clasifícalos para las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

    (b) $g(x,y) = -4x^2 - 5y^2$

    (c) $h(x,y) = 4x^2 + 5y^2$

    (d) $k(x,y) = x^2 + xy$

    (e) $l(x,y) = x^3 + y^3$

    (f) $m(x,y) = x^2y^2$

    (g) $n(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

    (h) $o(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

    (i) $p(x,y) = 6 - 4x - 3y - z\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

    (j) $q(x,y) = 6 - 4x - 3y - \frac{2}{5}\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

    (k) $r(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$

14. Calcula la mínima distancia de $P = (1,2)$ a $\Omega = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2+2)^2 = 1\right\}$.

    Solución: Tenemos que resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & d\left(P,(x,y)\right) \\ \text{Sujeto a} & (x,y) \in \Omega \end{array}$$

o en ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ \text{Sujeto a} & x^2 + (y+2)^2 = 1 \end{array}$$

Se trata de un problema de Lagrange que procedemos a resolver utilizando los multiplicadores de Lagrange, construimos el Lagrangiano, incorporando a la función del problema la restricción $x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0$, usando un multplicador de Lagrange, λ

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \lambda\left(x^2 + (y+2)^2 - 1\right)$$

y buscamos los puntos críticos de $L(x,y,\lambda)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}+2\lambda(y+2)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+(y+2)^2-1=0 \qquad (3)$$

Despejamos λ de la ecuación (1)

$$\lambda=\frac{1-x}{2x\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

y también de la ecuación (2)

$$\lambda=\frac{2-y}{2(y+2)\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

e igualando

$$\frac{1-x}{2x\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\frac{2-y}{2(y+2)\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

simplificando el 2 y la raíz cuadrada

$$\frac{1-x}{x}=\frac{2-y}{y+2}$$

de modo que

$$(1-x)(y+2)=(2-y)x\Leftrightarrow y+2-xy-2x=2x-yx\Leftrightarrow y+2=4x$$

y sustituyendo en (3)

$$x^2+(y+2)^2-1=0\Leftrightarrow x^2+(4x)^2-1=0\Leftrightarrow 17x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{17},$$

y tendremos por tanto dos puntos

$$x=\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow y=4x-2=4\frac{1}{\sqrt{17}}-2=\frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\Rightarrow P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)$$

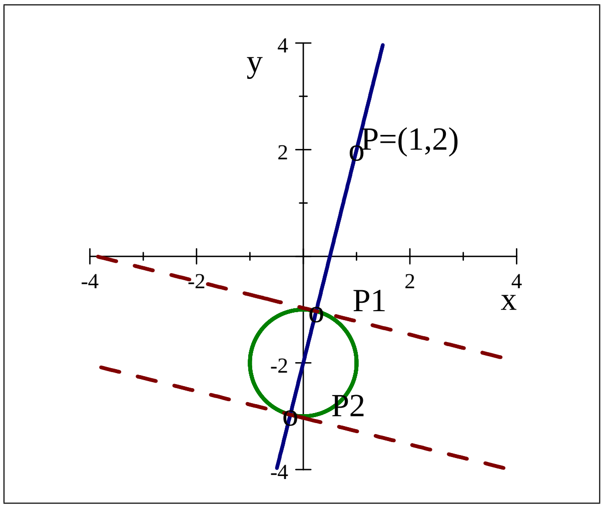
y

$$x=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow y=4x-2=-4\frac{1}{\sqrt{17}}-2=\frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\Rightarrow P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)$$

y el valor de la distancia de estos puntos a Ω

$$\begin{aligned} d(P_1,\Omega) &= \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{17}}-1)^2+(\frac{4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}-2)^2}=\sqrt{18-2\sqrt{17}} \\ d(P_2,\Omega) &= \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{17}}-1)^2+(\frac{-4-2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}-2)^2}=\sqrt{18+2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

P_1 es un mínimo, mientras P_2 será máximo, podemos verlos en la gráfica siguiente:



Notar que en los puntos $P1$ y $P2$, las rectas tangentes a la circunferencia son perpendiculares a la recta que unes esos puntos con el punto P.

15. **Ajuste por mínimos cuadrados**. El ajuste por mínimos cuadrados de los cuatro puntos $(-1,4)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ a una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ requiere resolver el problema siguiente de programación no lineal: Minimizar $f(a,b,c)$, donde

$$f(a,b,c) = (4 - (a - b + c))^2 + (1 - c)^2 + (1 - (a + b + c))^2 + (1 + (a + b + c))^2$$

Resuelve este problema.

Como en todos los problemas de ajustes de curvas lo que se pretende es minimizar la suma de los errores que se cometen al aproximar los puntos por la parábola, son problemas de la forma

$$E = \sum_{k=1}^{N} (y_k - M(x_k))^2$$

siendo $M(x)$ el modelo elegido en cada caso y N es el número de pares de datos (x_k, y_k). Por ejemplo, para la parábola sería $M(x) = ax^2 + bx + c$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c_k\right)\right)^2$$

y lo que se busca es el valor de los parámetros a, b y c que minimizan el error E, en este caso

$$E = f(a,b,c) = (4 - a + b - c)^2 + (1 - c)^2 + (1 - a - b - c)^2 + (1 + a + b + c)^2$$

. Se trata de un problema de optimización sin restricciones y tenemos que buscar los puntos críticos. Calculamos el Gradiente de f respecto a los parámetros a, b y c e igualamos a 0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial a} &= -2(4 - a + b - c) - 2(1 - a - b - c) + 2(1 + a + b + c) = 6a + 2b + 6c - 8 = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial b} &= 2(4 - a + b - c) - 2(1 - a - b - c) + 2(1 + a + b + c) = 2a + 6b + 2c + 8 = 0 \\
\frac{\partial E}{\partial c} &= -2(4 - a + b - c) - 2(1 - c) - 2(1 - a - b - c) + 2(1 + a + b + c) = 6a + 2b + 8c - 10 = 0
\end{aligned}$$

Sistema lineal cuya solución es

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Y usaremos el Hessiano para comprobar que es un mínimo

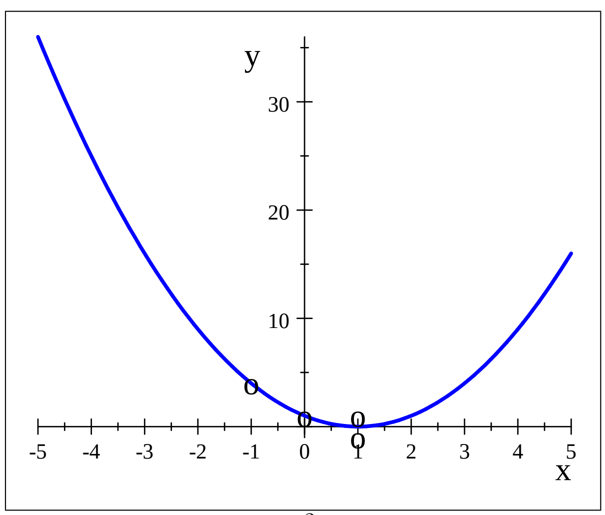
$$HE = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

y calculando la secuencia Δ_k

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 6 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (288 + 24 + 24) - (216 + 24 + 32) = 64 > 0 \end{aligned}$$

Luego todos los menores son positivos y el punto es un mínimo. La parábola buscada es

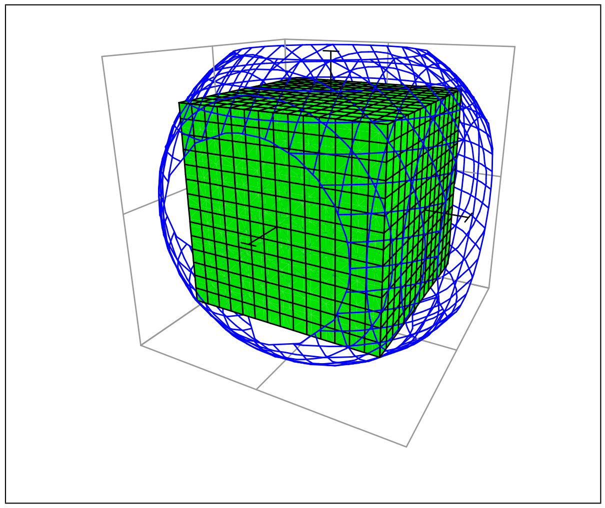
$$M(x) = x^2 - 2x + 1$$



Parábola $x^2 - 2x + 1$.

16. Calcula las dimensiones del cubo de volumen máximo que se puede incluir en una esfera de radio 1.

Solución:



Sean (x, y, z) las coordenadas de la esquina superior derecha del cubo inscrito en la esfera de radio 1. El volumen viene dado por el producto de las longitudes de los lados en las respectivas dimensiones, es decir

$$V(x, y, z) = (2x) \cdot (2y) \cdot (2z) = 8xyz,$$

por otra parte el punto (x, y, z) está sobre la esfera, así que debe cumplir su ecuación. El problema se puede plantear como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 8xyz \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}$$

que es un problema de Lagrange. Para resolverlo construimos el Lagrangiano

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 4yz + \lambda x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 4xz + \lambda y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8xy + 2\lambda z = 0 \Leftrightarrow 4xy + \lambda z = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

Restando (1) y (2) obtenemos

$$(4yz + \lambda x) - (4xz + \lambda y) = 0 \Longleftrightarrow \lambda(x - y) + 4z(y - x) = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(\lambda - 4z) = 0,$$

ecuación que nos dos opciones

$$y = x \quad \text{o} \quad \lambda = 4z$$

Para el caso $y = x$, el sistema quedaría

$$4xz + \lambda x = 0 \qquad (5)$$

$$4x^2 + \lambda z = 0 \qquad (6)$$

$$2x^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (7)$$

De la ecuación (5) tenemos

$$x\,(4z+\lambda)=0$$

pero si $x=0$, entonces no hay paralelepípedo, así que podemos asumir

$$4z+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-4z$$

y sustituyendo este valor en (6)

$$4x^2-4z^2=0\Leftrightarrow x^2=z^2$$

y usando ahora la ecuación (7)

$$3x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y como

$$z^2=x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y de este apartado obtenemos 4 puntos

$$P_1=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_2=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_3=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_4=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Para el caso $\lambda=4z$, el sistema queda como

$$4yz+4zx=0\qquad(8)$$

$$4xy+4z^2=0\qquad(9)$$

$$x^2+y^2+z^2-1=0\qquad(10)$$

De la ecuación (8) obtenemos

$$4z\,(y+x)=0$$

y como para $z=0$ no tendríamos paralelepípedo, entonces $y=-x$ y sustituyendo en (9)

$$-4x^2+4z^2=0\Longleftrightarrow x^2=z^2,$$

y usando (10)

$$x^2+(-x)^2+x^2-1=0\Leftrightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y como en el caso anterior tendremos

$$z^2=x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

y otros cuatros puntos

$$P_5=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_6=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_7=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad P_8=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

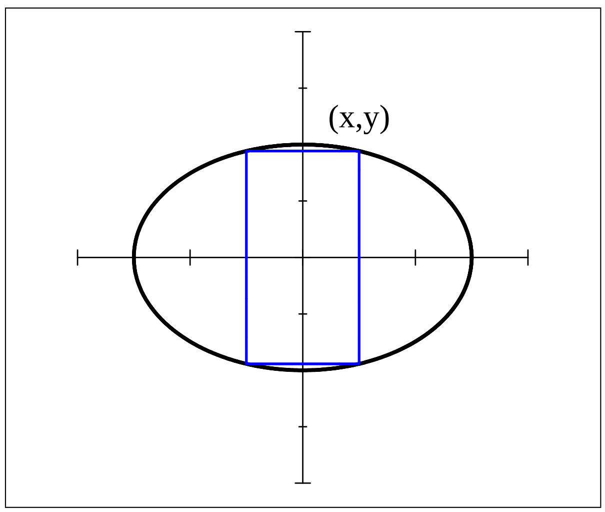
El problema nos ha dado los 8 vértices del paralelepípedo, como habíamos supuesto que (x,y,z) eran las coordenadas del vértice que hay en el primer octante, entonces deben ser positivas y la solución sería $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, siendo las dimensiones y el volumen del paralelepípedo máximo:

$$\begin{aligned} a &= b = c = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ V(a,b,c) &= 8\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

17. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que está contenido en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2.$$

Solución: Sean (x, y) las coordenadas de las esquina superior derecha del rectánculo inscrito en la elipse (ver figura) .



El área del rectángulo es base por altura, por tanto vendrá dada por la siguiente expresión

$$A(x,y) = (2x)\cdot(2y) = 4xy,$$

por otra parte el punto (x, y) está sobre la elipse, así que debe cumplir su ecuación. El problema se puede plantear como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4xy \\ \text{Sujeto a} & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

que es un problema de Lagrange. Para resolverlo construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4y + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4x + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (2) podemos despejar el multiplicador λ

$$\lambda = -2a^2\frac{y}{x}, \qquad (4)$$

$$\lambda = -2b^2\frac{x}{y}, \qquad (5)$$

notar que es posible dividir por x, puesto que si $x = 0$, entonces de la ecuación (1) se obtendría $y = 0$ y por tanto la ecuación (3) no se podría cumplir; lo mismo ocurre para la variable y, tampoco puede ser nula. Igualando las ecuaciones (4) y (5)

$$a^2\frac{y}{x} = b^2\frac{x}{y} \Leftrightarrow a^2y^2 = b^2x^2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

y podemos sutituir en (3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$y^2 = b^2\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Hemos conseguido 4 puntos que son los cuatro vértices del rectángulo tal y como aparece en la figura anterior.

$$P_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_3 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Las dimensiones corresponden a los lados del rectángulo

$$\text{base} = 2\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\text{altura} = 2\frac{b}{\sqrt{2}} = b\sqrt{2}$$

y el área máxima será

$$\text{Área} = 2ab.$$

18. Se dispone de una cantidad fija de material para fabricar una caja rectangular. Calcula las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo posible.

Solución: Para determinar las dimensiones de una caja rectangular de forma que contenga el mayor volumen posible, pero utilizando para ello una cantidad fija de material. El problema en forma abstracta se podría plantear en los siguientes términos

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & \text{Volumen de la caja} \\ \text{sujeto a} & \text{Área lateral fija} \end{array}$$

Con el fin de resolver este problema habrá que modelizarlo matemáticamente, es decir tendremos que expresarlo en términos matemáticos. El primer paso para modelizar un problema de optimización es identificar y definir las variables que están implicadas en dicho problema, en este caso y puesto que estamos tratando de determinar el tamaño de una caja rectangular, la opción más clara es considerar como variables sus tres dimensiones rectangulares usuales (ancho, largo, alto) y que representamos con x, y, z.

Con estas variables, la función para la que tenemos que encontrar el mejor valor será el volumen de la caja que puede expresarse como

$$V(x, y, z) = xyz$$

A continuación debemos tener en cuenta las limitaciones existentes sobre el material. Como este material se utiliza para construir las paredes de la caja, necesitaremos considerar el área lateral de la misma, y si la caja tiene tapa, dicha área será

$$A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$$

Por último, teniendo en cuenta que las dimensiones de la caja no pueden ser negativas el problema puede expresarse matemáticamente como

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & xyz \\ \text{sujeto a} & xy + yz + zx = \frac{A}{2} \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}.$$

Se pueden omitir las restricciones de positividad sobre las variables ya que por la naturaleza del problema, los valores de estas variables deben > 0; si alguna de las variables x, y o z es nula, entonces no tendremos caja y no habrá volumen. La función Lagrangiana para este problema es

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(xy + yz + zx - \frac{A}{2} \right)$$

y los puntos críticos de L

$$\nabla L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad yz + \lambda(y + z) = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad xz + \lambda(x + z) = 0 & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy + \lambda(x + y) = 0 & (3) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy + yz + zx - \dfrac{A}{2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Restando (1) y (2) obtenemos

$$(yz + \lambda(y + z)) - (xz + \lambda(x + z)) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(z + \lambda) = 0$$

Así que o bien $y = x$, o bien $\lambda = -z$. Pero si $\lambda = -z$, entonces de la ecuación (1)

$$yz - z(y + z) = 0 \Rightarrow yz - zy - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

y no habría caja. Así que debe ocurrir $y = x$.

Restando (1) y (3) obtenemos

$$(yz + \lambda(y + z)) - (xy + \lambda(x + y)) = 0 \Leftrightarrow (z - x)(y + \lambda) = 0$$

Así que o bien $z = x$, o bien $\lambda = -y$. Pero si $\lambda = -y$, entonces de la ecuación (1)

$$yz - y(y+z) = 0 \Rightarrow yz - y^2 - yz = 0 \Rightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

y no habría caja. Así que debe ocurrir $z = x$.

Como $x = y = z$, usamos la ecuación (4)

$$xy + yz + zx - \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{A}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{A}{6}},$$

por las condiciones del problema, sólo cogemos la positiva y el sistema anterior tiene como única solución

$$x = y = z = \sqrt{\frac{A}{6}} \qquad \lambda = -\sqrt{\frac{A}{24}}.$$

19. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x + y^2$, sobre el conjunto $x^2 + y^2 = 25$.

20. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy$, sobre el conjunto compacto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$.

21. Una placa con forma circular $x^2 + y^2 \leq 1$,se calienta de manera que en cada punto (x,y), la temperatura viene dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Obtén los puntos de la placa donde se alcanza la mayor y menor temperatura.

22. Resuelve los siguientes apartados:

    a) Calcula y clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

    b) Calcula los extremos absolutos de $f(x,y)$ sobre el conjunto compacto

    $$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2; y \geq 0\right\}$$

23. Se considera el conjunto de triángulos isósceles incritos en la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, con vértice fijo en $(0,-2)$ y base paralela al eje OX. Hallar los triángulos de área máxima y mínima.

24. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ en el recinto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\right\}$.

25. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2-xy+y^2$ en el recinto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\right\}$.

26. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2$ con la condición $3x^2+y^2+6z^2 = 1$ y $-y+z = 0$.

27. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+xy-x+y^2$ en el recinto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$.

28. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x + z$ en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

29. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = z$ en el recinto

    $$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0\right\}.$$

    Nota: La única solución de la ecuación $t + e^t = 1$ es $t = 0$.

30. Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x+y+z$ condicionados por $x^2+2y^2+3z^2 = 1$.

31. Dada la función

$$F(x,y)=\int_0^{x^2+y^2} e^{t^2 dt}$$

Estudia su continuidad y diferenciabilidad. Calcula sus extremos relativos.

32. Se considera la función

$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Estudia su continuidad y diferenciabilidad y en su caso calcula $df(x,y)$. Calcula y clasifica sus extremos relativos.

33. Se considera la función

$$f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}dt$$

Prueba que el punto $(1,0)$ es crítico y clasifícalo. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

34. Consideremos una placa circular que ocupa la región bidimensional $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$.Supongamos que la distribución de temperaturas de la placa está dada por la función $T(x,y)=\frac{1-(x^2+y^2)}{4}$.¿Cuál es el punto de la placa que está más caliente ? ¿Y el más frío?

Solución: El problema considerado es:

$$\begin{array}{ll}\text{Optimizar} & \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4}\\ \text{sujeto a} & x^2+y^2\leq 1\end{array}$$

El conjunto Ω donde buscamos el máximo y el mínimo de la función es un círculo de radio 1, que es un conjunto compacto, como la función es continua el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de máximo y mínimo de la función dentro del conjunto.

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\, x^2+y^2\leq 1\right\}$$

El problema se divide en estudiar qué ocurre en el interior del conjunto $\overset{\circ}{\Omega}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\, x^2+y^2<1\right\}$ y en su frontera $\delta\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$.

En el interior tenemos que encontrar las máximos y mínimos de la función $f(x,y)=\dfrac{1-(x^2+y^2)}{4}$, para ello buscamos los puntos críticos de la función

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-2x\\-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=y=0$$

En la frontera tenemos que resolver el problema de Lagrange

$$\begin{array}{ll}\text{Optimizar} & \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4}\\ \text{sujeto a} & x^2+y^2=1\end{array}$$

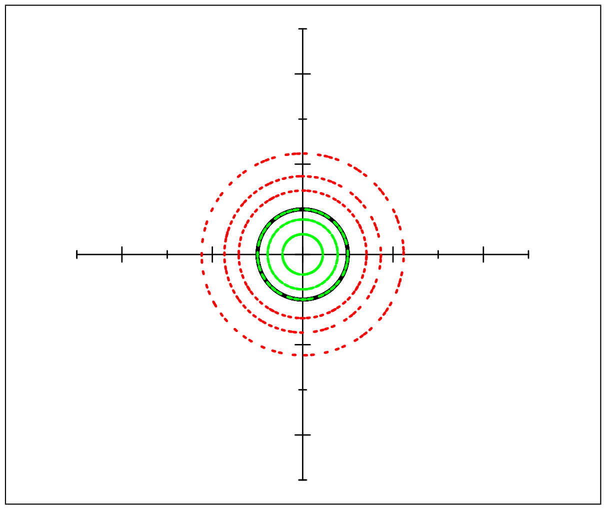
No obstante si $x^2+y^2=1$, entonces $f(x,y)=0$ es constante sobre la frontera. Evaluando la función en el punto $(0,0)$ obtendremos

$$f(0,0)=\frac{1}{4}$$

mientras que en la frontera

$$f(x,y)=0$$

En el primer caso tendremos un máximo y en el segundo infinitos mínimos, que son todos los puntos de la frontera.



Para comprobar que $T(x,y)$ es solución de la ecuación del calor recordemos que

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en este caso

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\\ \\ \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{y}{2}\Rightarrow\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad -\nabla^2 T=-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\forall(x,y)\quad\in\quad\mathbb{R}:x^2+y^2=1\Rightarrow f(x,y)=0$$

35. Resuelve el siguiente problema de programación no lineal:

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & \|x\|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2\\ \text{sujeto a} & \\ & a\cdot x=c\end{array}\right.$$

donde $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ es un vector no nulo de n componentes, c es una constante y $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

Solución: $x=\frac{c}{\|a\|^2}a$

Es un problema de Lagrange o problema con restricciones de igualdad. Usando las componentes de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$, el Lagrangiano será

$$L(x_1,\ldots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-c)$$

y los puntos críticos se obtendrán de la ecuación $\nabla L = 0$. Tendremos n ecuaciones para las variables x_k

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 2x_k + \lambda a_k = 0 \qquad k = 1, \dots, n \qquad (1)$$

y una para la variable λ

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - c = 0 \qquad (2)$$

Para cada valor de k en (1) obtendremos

$$2x_k + \lambda a_k = 0,$$

de donde

$$x_k = -\frac{\lambda}{2} a_k \qquad k = 1, \dots, n,$$

y sustituyendo en (2)

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - c = 0 \Rightarrow a_1 \left(-\frac{\lambda a_1}{2} \right) + \cdots + a_n \left(-\frac{\lambda a_n}{2} \right) - c = 0,$$

sacando factor común $\frac{-\lambda}{2}$

$$-\frac{\lambda}{2} \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2 \right) - c = 0$$

y despejando

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Sustituyendo en la expresión de x_k

$$x_k = -\frac{\lambda}{2} a_k = \frac{c}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} a_k = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2} a_k,$$

es decir

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2} a_1, \dots, \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2} a_n \right) = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2} (a_1, \dots, a_n) = \frac{c}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

36. Utiliza la derivación implícita para calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en un punto genérico (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.
Solución:

$$r(x) = -\frac{x_0}{y_0} x + \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}.$$

Solución: En primer lugar vamos a comprobar que la ecuación $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ define a y como función implícita de x para cualquier punto de la circunferencia (x_0, y_0).

$$F(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y \Rightarrow \text{Como } y_0 \neq 0, \text{ entonces } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$$

por tanto la ecuación define a y como función implícita de x con $y(x_0) = y_0$. La pendiente de la tangente en (x_0, y_0) es $y'(x_0)$, por tanto, usando derivada implícita en la ecuación

$$\left(x^2 + y^2 - 1 = 0\right)' = 2x + 2yy' = 0$$

y sustituyendo en el punto

$$2x_0 + 2y(x_0)\, y'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 2y_0 y'(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}$$

La recta tangente será

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) = -\frac{x_0}{y_0}x + y_0 + \frac{x_0^2}{y_0} = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}$$

y como el punto está en la circunferencia, también podemos poner:

$$y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{1}{y_0}.$$

37. La ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 51$$

define a la variable z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(6, -3)$ en el cual $z = z(x, y)$ puede tomar los valores $z = 3$ y $z = -2$. Para $z = -2$, calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$ en el punto $(3, -2)$. Calcula la también el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x, y)$ en el punto $(3, -2)$.

Solución: Consideremos la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - z - 51$, la ecuación es equivalente a poner $F(x, y, z) = 0$.

Sustituyendo los valores $x = 6$ e $y = -3$ en la función, obtenemos

$$F(6, -3, z) = 36 + 9 + z^2 - z - 51 = z^2 - z - 6$$

Para que z se pueda definir como función implícita del punto $(6, -3, z_0)$ debe suceder por una parte que $F(6, -3, z_0) = 0$ y por otra que $\frac{\partial F}{\partial z}(6, -3, z_0) \neq 0$. De la primera condición obtenemos

$$F(6, -3, z_0) = z_0^2 - z_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow z_0 = 3 \text{ o } z_0 = -2$$

Para estos puntos aplicamos la segunda condición

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(6, -3, 3) = 5 \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(6, -3, -2) = -5 \neq 0 \end{cases}$$

De forma que z se puede definir como función implícita tanto en un entorno de $(6, -3, 3)$ como de $(6, -3, -2)$.

La ecuación del plano tangente a la gráfica de una función $z(x, y)$ en un punto viene dado por el polinomio de Taylor de primer orden de la función en ese punto, en este caso el punto es $(6, -3)$ con $z(6, -3)$ y tenemos que calcular el gradiente de z

$$\nabla z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

y evaluarlo en ese punto.

Para la obtener derivada parcial respecto de x derivamos en la ecuación respecto de esa variable, donde debemos tener en cuenta que $z = z(x, y)$, es función de las dos variables

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,z)=0\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2-z-51\right)=0 \\
2x + 2z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 2x + (2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

y sustituyendo en $(6, -3)$, teniendo en cuenta que $z(6, -3) = -2$

$$2 \cdot 6 + (2z(6,-3)-1)\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 12 - 5\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = \frac{12}{5}.$$

Repetimos el proceso para calcular la derivada parcial respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(F(x,y,z)=0\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2-z-51\right)=0 \\
2y + 2z(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 2y + (2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

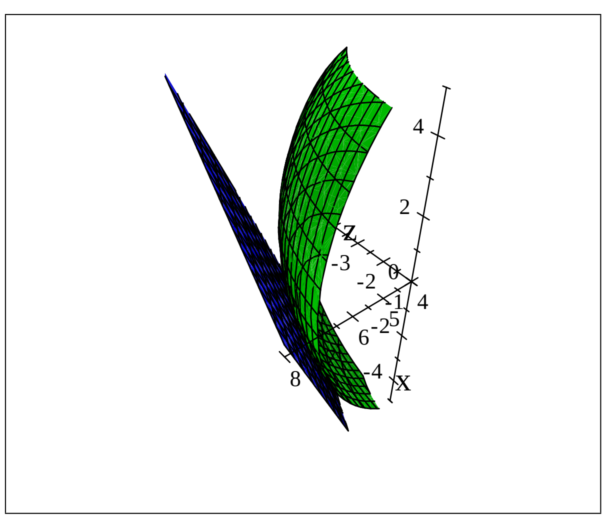
evaluando en el punto $(6, -3)$

$$2 \cdot (-3) + (2(-2)-1)\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -6 - 5\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = -\frac{6}{5}.$$

El polinomio de Taylor en $(6, -3)$ será

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= z(6,-3) + \frac{\partial z(6,-3)}{\partial x}(x-6) + \frac{\partial z(6,-3)}{\partial y}(y+3) \\
&= -2 + \frac{12}{5}(x-6) - \frac{6}{5}(y+3) \\
&= \frac{12}{5}x - \frac{6}{5}y - 20.
\end{aligned}$$

En la siguiente gráfica se han representado tanto la función, como el polinomio de Taylor (plano tangente en $(6, -3)$):



Para obtener el polinomio de 2^o grado hay que calcular la segunda derivada de z respecto de las variables x e y, usando los resultados obtenidos anteriormente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + (2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}\left((2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = 0$$

es decir

$$2+2\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow 2+2\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

y evaluando en $(6,-3)$ con $z(6,-3)=-2$, $\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x} = \frac{12}{5}$ y $\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y} = -\frac{6}{5}$

$$\begin{aligned}
2+2\left(\frac{\partial z(6,-3)}{\partial x}\right)^2 + (2z(6,-3)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0\\
2+2\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (2\cdot(-2)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0\\
\frac{338}{25} - 5\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial x^2} = \frac{338}{125}$$

Para la y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(2y + (2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}\left((2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

es decir

$$2+2\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2+2\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2+(2z(x,y)-1)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

y como antes

$$\begin{aligned}
2+2\left(\frac{\partial z(6,-3)}{\partial y}\right)^2 + (2z(6,-3)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial y^2} &= 0\\
2+2\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + (2\cdot(-2)-1)\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial y^2} &= 0\\
\frac{122}{25} - 5\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 z(6,-3)}{\partial y^2} = \frac{122}{125}$$

Para la derivada cruzada $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2y + (2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial x}\left((2z(x,y)-1)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

es decir

$$2\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x}\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y}+\left(2z\left(x,y\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(x,y\right)}{\partial y\partial x}=0$$

y en $(6,-3)$

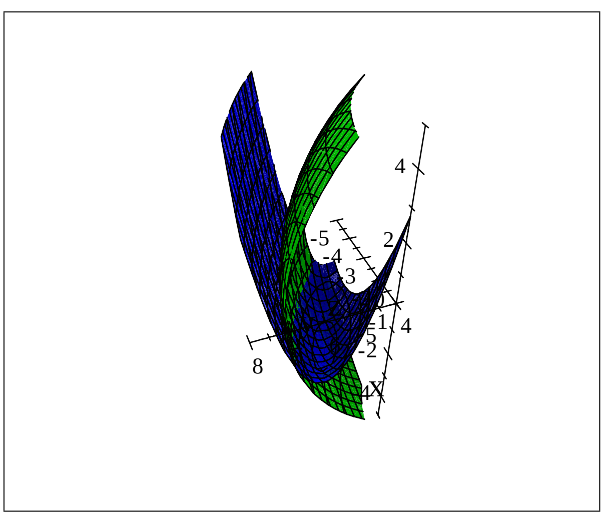
$$\begin{aligned}
2\frac{\partial z\left(6,-3\right)}{\partial x}\frac{\partial z\left(6,-3\right)}{\partial y}+\left(2z\left(6,-3\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y\partial x} &= 0\\
2\left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(2\cdot\left(-2\right)-1\right)\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial x\partial y} &= 0\\
-\frac{144}{25}-5\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y^{2}} &= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^{2}z\left(6,-3\right)}{\partial y\partial x}=-\frac{144}{125}$$

El polinomio de Taylor es el plano tangente anterior más la parte correspondiente a las segunda derivadas.

$$\begin{aligned}
T_{2}\left(x,y\right) &= z\left(6,-3\right)+\nabla z\left(6,-3\right)\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(x-6,y+3\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^{2}z(6,-3)}{\partial y^{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}\\
&= -2+\left(\frac{12}{5},-\frac{6}{5}\right)\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(x-6,y+3\right)\begin{pmatrix}\frac{338}{125} & -\frac{144}{125}\\ -\frac{144}{125} & \frac{122}{125}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-6\\ y+3\end{pmatrix}\\
&= -2+\frac{12}{5}\left(x-6\right)-\frac{6}{5}\left(y+3\right)+\frac{338}{250}\left(x-6\right)^{2}+\frac{122}{250}\left(y+3\right)^{2}-\frac{144}{125}\left(x-6\right)\left(y+3\right)\\
&= -2+\frac{12}{5}\left(x-6\right)-\frac{6}{5}\left(y+3\right)+\frac{169}{125}\left(x-6\right)^{2}+\frac{61}{125}\left(y+3\right)^{2}-\frac{144}{125}\left(x-6\right)\left(y+3\right)\\
&= \frac{269}{5}-\frac{432}{25}x+\frac{216}{25}y+\frac{169}{125}x^{2}-\frac{144}{125}xy+\frac{61}{125}y^{2}
\end{aligned}$$



38. Calcula el polinomio de Taylor de grado dos de las funciones que se indican a continuación:

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$ en el punto $(0,0)$

(b) $f(x,y) = (x^2-3x)e^{y^2}$ en el punto $(0,0)$

(c) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - ze^x$ en el punto $(1,1,0)$

Solución:

a)

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x)\cos(y), -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(x)\cos(y) & -\cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ -\cos(x)\operatorname{sen}(y) & -\operatorname{sen}(x)\cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$T_2(x,y) = x$$

b)

$$f(x,y) = (x^2-3x)e^{y^2} \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = \left((2x-3)e^{y^2}, 2y\left(x^2-3x\right)e^{y^2}\right) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (-3,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 2y(2x-3)e^{y^2} \\ 2y(2x-3)e^{y^2} & 2\left(x^2-3x\right)\left(2y^2+1\right)e^{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es

$$T_2(x,y) = -3x + 2x^2$$

c) Para $f(x,y) = \frac{x}{y} - ze^x$

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - ze^x \Rightarrow f(1,1,0) = 1$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{y} - ze^x, -\frac{x}{y^2}, -e^x\right) \Rightarrow \nabla f(1,1,0) = (1,-1,-e)$$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -ze^x & -\frac{1}{y^2} & -e^x \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & 0 \\ -e^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el polinomio de Taylor de orden 2 sería

$$T_2(x,y,z) = f(1,1,0) + \nabla f(1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1, z)\, Hf(1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y,z) = 1 + (1,-1,-e)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1, z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y,z) = 1 + (x-1) - (y-1) - ez + \frac{1}{2}(x-1, y-1, z)\begin{pmatrix} -(y-1) - ez \\ -(x-1) + 2(y-1) \\ -e(x-1) \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 2x - 2y - xy - xze + y^2$$
