Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Temas 13
Cálculo en varias variables
Límites y continuidad de funciones en varias variables

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes conjuntos:

   En general, si un conjunto está definido mediante ecuaciones, el interior estaría definido mediante las desigualdades estrictas, las fronteras estarían definidas por igualdades y el conjunto derivado sería la clausura sin los puntos aislados.

   a)

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{A}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 9\right\}$
Clausura	$\overline{A}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$
Frontera	δA	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 9\right\}$
Derivado	A'	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$

   b)

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{B}$	$\varnothing$ (No tiene interior)
Clausura	$\overline{B}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}$
Frontera	δB	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}$
Derivado	B'	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}$

   c)

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\}.$$

Interior	$\overset{\circ}{C}$	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\}$
Clausura	$\overline{C}$	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\right\}$
Frontera	δC	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}$
Derivado	C'	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\right\}$

   d)

$$D = \{(0,0), (1,0)\}$$

Interior	$\overset{\circ}{D}$	$\varnothing$ (No tiene interior)
Clausura	$\overline{D}$	$\{(0,0), (1,0)\}$
Frontera	δD	$\{(0,0), (1,0)\}$
Derivado	D'	$\varnothing$

   e)

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{E}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$
Clausura	$\overline{E}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$
Frontera	δE	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$
Derivado	E'	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$

f)

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{F}$	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\right\}$
Clausura	$\overline{F}$	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 4\right\}$
Frontera	δF	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 4\right\}$
Derivado	F'	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 4\right\}$

g)

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y < 0\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{G}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y < 0\right\}$
Clausura	$\overline{G}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \leq 0\right\}$
Frontera	δG	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, y)\,; (x, 0)\right\}$
Derivado	G'	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \leq 0\right\}$

h)

$$H = [2, 3[\times]{-1}, 3[$$

Interior	$\overset{\circ}{H}$	$]2, 3[\times]{-1}, 3[$
Clausura	$\overline{H}$	$[2, 3] \times [-1, 3]$
Frontera	δH	$\{(2, y)\,, (3, y) \mid y \in [-1, 3]\} \cup \{(x, -1)\,; (x, 3) \mid x \in [2, 3]\}$
Derivado	H'	$[2, 3] \times [-1, 3]$

i)

$$I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$$

Interior	$\overset{\circ}{I}$	$(2, 3) \times (0, 1)$
Clausura	$\overline{I}$	$([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$
Frontera	δI	$\{(2, y)\,, (3, y) \mid y \in [0, 1]\} \cup \{(x, 0)\,; (x, 1) \mid x \in [2, 3]\} \cup \{(0, 1)\}$
Derivado	I'	$[2, 3] \times [0, 1]$

j)

$$J = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{J}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$
Clausura	$\overline{J}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$
Frontera	δJ	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$
Derivado	J'	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

k)

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Interior	$\overset{\circ}{K}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$
Clausura	$\overline{K}$	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$
Frontera	δK	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$
Derivado	K'	$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

l)

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<4; 0 \le z < 3\right\} \cup \{(-3,0,0);(2,0,0)\}$$

Interior	$\overset{\circ}{L}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<4; 0 < z < 3\right\}$
Clausura	$\overline{L}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4; 0 \le z \le 3\right\}$
Frontera	δL	$\left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=4\right\} \cup \left\{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=4\right\} \cup \{(-3,0,0);(2,0,0)\}$
Derivado	L'	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4; 0 \le z \le 3\right\}$

m)

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<4\right\} \cup \{(2,0,0);(4,0,0)\}$$

Interior	$\overset{\circ}{M}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<4\right\}$
Clausura	$\overline{M}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4\right\} \cup \{(2,0,0);(4,0,0)\}$
Frontera	δM	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\right\} \cup \{(2,0,0);(4,0,0)\}$
Derivado	M'	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4\right\}$

n)

$$N = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 9\right\} \cup \{(4,3,1)\}$$

Interior	$\overset{\circ}{K}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<9\right\}$
Clausura	$\overline{K}$	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 9\right\} \cup \{(4,3,1)\}$
Frontera	δK	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=9\right\} \cup \{(4,3,1)\}$
Derivado	K'	$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 9\right\}$

2. Calcula el dominio donde se podrían definir las siguientes funciones

a) $f_1(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ b) $f_2(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

c) $f_3(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-9\right)$ d) $f_4(x,y) = \dfrac{x+y}{xy^2}$

e) $f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ f) $f_6(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{3}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)$

a) Cociente de funciones, el dominio sería todos los puntos salvo aquellos que anulan el denominador y en este caso sólo habrá un punto el $(0,0)$

$$\mathrm{Dom}\,(f_1) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

b) Cociente de funciones, además en el denominador hay una raíz cuadrada, por tanto el dominio incluirá a todos los reales salvo aquellos que anulan el denominador y aquellos que dan como resultado un radicando negativo y que podemos expresar como

$$x^2+y^2-4 \le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 4$$

El dominio sería el exterior del círculo, incluyendo la circunferencia, de centro $(0,0)$ y radio 2.

$$\mathrm{Dom}\,(f_2) = \mathbb{R}^2 - \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\right\}$$

c) Como se trata del logaritmo natural de un número, es necesario que el argumento sea > 0, por tanto

$$x^2 + y^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 9$$

El dominio sería el exterior del círculo, incluida su circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3

$$\mathrm{Dom}\,(f_3) = \mathbb{R}^2 - \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

d) Cociente de funciones, luego el dominio será el conjunto de puntos que no anula el denominador

$$\mathrm{Dom}\,(f_4) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\right\}$$

Sería todo el plano salvo los puntos situados en los ejes coordenados.

e) Es una raíz cuadrada, así que el argumento debe ser ≥ 0

$$\mathrm{Dom}\,(f_5) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

f) Es una función vectorial, por tanto el dominio es la intersección de los dominios de cada una de las funciones componentes

$$\mathrm{Dom}\,((f_6)_1\,(x)) = \mathrm{Dom}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\right\}$$

$$\mathrm{Dom}\,((f_6)_1\,(x)) = \mathrm{Dom}\left(\frac{3}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\}$$

El dominio es un anillo de radios 1 y 4.

3. Analiza la existencia de límite en $(0,0)$ para las siguientes funciones:

En algunos apartados es posible utilizar otra técnica de la indicada, es decir, en muchos casos es posible utilizar límites direccionales, iterados o paso a coordenadas polares.

a)

$$f_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_1\,(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Para calcular el límite usamos el cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

y como este límite depende de θ, entonces el límite de la función no existirá.

b)

$$f_2 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_2\,(x,y) = \frac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta) + 2\left(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)}{r} = \lim_{r\to 0} \cos\theta + 2r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \cos\theta,$$

que como depende de θ, no existirá.

c)

$$f_3 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_3(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = 0,$$

que no depende de θ, pero además

$$\left|r^2\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\right| \leq \left|r^2\cos^4\theta\right| + \left|r^2\operatorname{sen}^4\theta\right| \leq r^2 + r^2 = 2r^2$$

siendo

$$\lim_{r\to 0} 2r^2 = 0,$$

luego la función f_3 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r) = 2r^2$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$\left|r^2\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) - 0\right| < g(r).$$

d)

$$f_4 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_4(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)\left(r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right) = 0,$$

además

$$\left|r\left(\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)\right| \leq r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r = 0$$

luego f_4 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r) = r$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$\left|r\left(\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right) - 0\right| < g(r).$$

e)

$$f_5 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_5(x,y) = \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

Vamos a usar límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0\cdot y+y^2}{0^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Los límites no coinciden y por tanto la función f_5 no tiene límite en $(0,0)$.

f)

$$f_6 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_6(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Usamos límites direccionales con $y = mx^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(mx^2\right)}{x^4 + \left(mx^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

que como depende de m, el límite no existe.

g)

$$f_7 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_7(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^4}$$

Usaremos coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left(r^3\cos^3\theta\right) + \left(r^3\operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^4\cos^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2\left(1 + r^2\cos^4\theta\right)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)}{\left(1 + r^2\cos^4\theta\right)} = 0$$

además como $r^2\cos^4\theta \geq 0$

$$1 + r^2\cos^4\theta \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + r^2\cos^4\theta} \leq 1$$

y por tanto

$$\left|\frac{r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)}{\left(1 + r^2\cos^4\theta\right)}\right| < r\frac{\left|\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)\right|}{\left(1 + r^2\cos^4\theta\right)} < r\left|\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)\right| < r\left(\left|\cos^3\theta\right| + \left|\operatorname{sen}^3\theta\right|\right) \leq 2r$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r = 0$$

luego f_7 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r) = 2r$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$\left|\frac{r\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)}{\left(1 + r^2\cos^4\theta\right)} - 0\right| < g(r).$$

h)

$$f_8 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ con } f_8(x,y) = \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2}, x + y\right)$$

Es una función vectorial, así que el límite existirá si existe el límite de cada componente. La segunda componente no tiene problemas puesto que es una suma de dos funciones con dominio en todos los reales. La primera componente tiene problemas en el $(0,0)$. Usando límites direccionales con $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{1+m^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

que depende de m y por tanto el límite no existe.

i)

$$f_9 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ con } f_9(x,y) = \left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Es una función vectorial, así que el límite existirá si existe el límite de cada componente. Ambas componentes tienen problemas en el punto $(0,0)$. Para la primera componente, usaremos coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left(r^3\cos^3\theta\right)+\left(r^3\operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right) = 0$$

además

$$\left|r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)\right| = \left|r\cos^3\theta + r\operatorname{sen}^3\theta\right| \le \left|r\cos^3\theta\right| + \left|r\operatorname{sen}^3\theta\right| \le r+r = 2r$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r = 0$$

luego esta componente tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r) = 2r$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$\left|r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right) - 0\right| < g(r).$$

Para la segunda componente, vamos a comprobar primero si el cociente $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tiene límite, lo hacemos como antes, usando coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

además

$$|r\cos\theta\operatorname{sen}\theta| \le r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r = 0$$

luego esta fracción tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r) = r$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$|r\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 0| < g(r).$$

Como el límite es 0 y la función $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ está acotada, el límite del producto es 0.

Las dos componentes tienen límite 0, luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \tfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (0,0).$$

j)

$$f_{10} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } f_{10}(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2}$$

Usaremos coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left(r^3\cos^3\theta\right)+\left(r^3\operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(r^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)}{r^2\left(1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)} = \lim_{r\to 0}\frac{r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)}{\left(1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)} = 0$$

además como $r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta \geq 0$

$$1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} \leq 1$$

y por tanto

$$\left|\frac{r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)}{1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}\right| < r\frac{\left|\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)\right|}{1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} < r\left|\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)\right| < r\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\operatorname{sen}^3\theta\right|\right) \leq 2r$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r = 0$$

luego f_8 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r)=2r$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que cumple

$$\left|\frac{r\left(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta\right)}{1+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}-0\right| < g(r).$$

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones

En todos los apartados hay que comprobar que el límite de la función en el punto $(0,0)$ coincide con el valor de la función en dicho punto. El ejercicio en esencia es igual que el anterior.

a)

$$f_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \quad f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\,|r\operatorname{sen}\theta|}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\,|\operatorname{sen}\theta| = 0$$

Además

$$|r\cos\theta\cdot|\operatorname{sen}\theta|-0| = |r\cos\theta\cdot|\operatorname{sen}\theta|| < r\,|\cos\theta|\cdot|\operatorname{sen}\theta| < r$$

$$\lim_{r\to 0} r = 0$$

luego f_1 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r)=r$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

b)

$$f_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \quad f_2(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Hay que probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$$

Está claro que el límite del primer factor de la función existe y vale 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) = 0,$$

y como la función $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ está acotada, el límite del producto es 0 y la función f_2 será continua en el origen.

c)

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si utilizamos límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0^2}{0^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

que como son distintos, el límite no existe y la función no es continua en $(0,0)$.

d)

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Usando coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0,$$

donde además

$$|r\cos\theta \operatorname{sen}\theta - 0| = r\,|\cos\theta| \cdot |\operatorname{sen}\theta| < r$$

siendo

$$\lim_{r\to 0} r = 0,$$

es decir f_4 tiene límite 0, en $(0,0)$, puesto que existe la función $g(r) = r$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

e)

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si utilizamos límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2+0^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

y como uno de los límites iterados no existe, el límite de la funión tampoco existirá y tampoco será continua en dicho punto.

f)

$$f_6:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\quad f_6(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si usamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta\,(r\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)=0,$$

Además

$$\left|r\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)-0\right|=r\left|\operatorname{sen}^2\theta\right|\cdot\left|(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\right|<r\left|(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\right|\leq 2r$$

con

$$\lim_{r\to 0}2r=0$$

luego f_6 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r)=2r$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

g)

$$f_7:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\quad f_7(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Directamente ponemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}y=0$$

h)

$$f_7:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\quad f_7(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{4r^3\cos^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}4r\cos^3\theta=0$$

Además

$$\left|4r\cos^3\theta-0\right|=r\left|4\cos^3\theta\right|<4r$$

con

$$\lim_{r\to 0}4r=0$$

luego f_7 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = 4r$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

5. Analiza la continuidad en el origen de las siguientes funciones

a)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\operatorname{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Además

$$\left|r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 0\right| = r^2\left|\cos\theta\right| \cdot \left|\operatorname{sen}\theta\right| < r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

luego f_1 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = r^2$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

b)

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \cdot r\operatorname{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Además

$$\left|r\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 0\right| = r\left|\cos\theta\right| \cdot \left|\operatorname{sen}\theta\right| < r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r = 0$$

luego f_2 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = r$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

c)

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Usamos límites direccionales con $x = my^3$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^3}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{my^3\left(y^3\right)}{\left(my^3\right)^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{my^6}{m^2y^6+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{m^2+1} = \frac{m}{m^2+1},$$

que como depende de m, entonces no existe.

d)

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textsf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textsf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^3\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = 0$$

Además

$$\left|r^3\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) - 0\right| = r^3(1+1) < 2r^3$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r^3 = 0$$

luego f_4 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = 2r^3$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

e)

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textsf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textsf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\operatorname{sen}^2\theta\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)}{r} = \lim_{r\to 0} r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos 2\theta = 0$$

Además

$$\left|r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos 2\theta\right| = r^3\cdot\left|\operatorname{sen}^2\theta\right|\cdot\left|\cos 2\theta\right| < r^3$$

con

$$\lim_{r\to 0} r^3 = 0$$

luego f_5 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = r^3$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

f)

$$f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textsf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textsf{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^2 \left(\operatorname{sen}^3 \theta\right) = 0$$

Además

$$\left| r^2 \left(\operatorname{sen}^3 \theta\right) - 0 \right| < 2r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

luego f_4 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = r^2$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

g)

$$f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta}{r} = \lim_{r\to 0} \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$$

Como depende de θ, el límite no existe.

h)

$$f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{\left(x^2-y\right)^2 + x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si tomamos coordenadas polares

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \frac{r^6 \cos^6\theta}{\left(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + r^6\cos^6\theta} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta}{r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + r^6\cos^6\theta} = \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta}{r^2\cos 2\theta + r^6\cos^6\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^6\theta}{\cos 2\theta + r^6\cos^6\theta} = 0 \end{aligned}$$

Además

$$\left| r^3 \left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) - 0 \right| = r^3 (1+1) < 2r^3$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r^3 = 0$$

luego f_4 tiene límite 0, en $(0,0)$, ya que existe la función $g(r) = 2r^3$ del teorema de existencia de límites. Como además el límite coincide con el valor de la función en el punto, la función es continua en todos los puntos.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ g(y) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$, sea continua en todos los puntos de la forma $(0,y)$.

Solución: Para que la función sea continua en los puntos de la forma $(0,y)$ debe ocurrir que exista el límite cuando nos acercamos a un punto de ese tipo;

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = g(y)$$

Si multiplicamos y dividimos por y, obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,y)} y\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)} = \lim_{f(x)\to 0} \frac{\cos f(x)}{1} = 1$$

obtendremos el resultado

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} y\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,y)} y = y$$

Luego $g(y) = y$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

Solución: Para que la función $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$ debe ocurrir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} = 0$$

Los límites iterados deben existir y ser iguales, por tanto

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

que es válido para cualquier valor de α.También debe ocurrir

$$\lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^\alpha}{y^2} = 0$$

Para que este límite exista, deben existir los límites laterales y ser iguales

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{|y|^\alpha}{y^2} = \lim_{y\to 0^-} \frac{|y|^\alpha}{y^2} = 0$$

por tanto

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{|y|^\alpha}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{y\to 0^+} \frac{y^\alpha}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} y^{\alpha-2} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

y también

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{|y|^\alpha}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{y\to 0^+} \frac{-y^\alpha}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} -y^{\alpha-2} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Luego debe suceder

$$\alpha > 2$$

Comprobamos la hipótesis, tomando $\alpha > 2$ y usando coordenads polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + |r\,\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^\alpha\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^2}$$

Sacamos factor común r^2

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^\alpha\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(r\cos^3\theta + r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta + r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha$$

y puesto que $\alpha - 2 > 0$

$$\lim_{r\to 0} r\cos^3\theta + r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha = 0$$

además

$$\left|r\cos^3\theta + r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha\right| \le \left|r\cos^3\theta\right| + \left|r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha\right| = r\left|\cos^3\theta\right| + r^{\alpha-2}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha < r + r^{\alpha-2}$$

y tomando

$$g(r) = r + r^{\alpha-2}$$

encontramos la existencia de la función $g(r)$ que acota a la diferencia entre la función y su límite.