Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Temas 12
Cálculo
Integral de Riemann

1. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$
2. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$
3. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$
4. Expresa el siguiente límite como una integral definida adecuada y calcula su valor
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}+\cdots+\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$
5. Sea la función
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
   a) Halla el área determinada por las rectas $x=0$, $x=t$, el eje OX y $f(x)$.
   b) Calcula el volumen obtenido al girar laregión anterior alrededor de $y=0$.
   c) ¿Cuáles son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos $t\to\infty$?
6. Calcula
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(t^2)\,dt}{x^6}$$
7. Calcula
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^2}^{x}\operatorname{sen}(t^2)\,dt}{x^2}$$
8. Calcula el área de la región plana comprendida entre el eje X, la gráfica de la función
$$f(x)=-\frac{x}{1+x^4}$$
   y limitada lateralmente por las rectas $x=-1$ y $x=1$.

9. Halla el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ e $y = e^{1-|x|}$, sabiendo que se cortan en $x = 1$ y $x = -1$.

10. Sea la función
$$f(x) = \tan x; \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

    a) Calcula las primitivas de $f(x)$.
    b) Halla la longitud de la curva $y = F(x)$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.
    c) Estudia la convergencia de la integral impropia de segunda especie
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

11. Sea R la región plana delimitada por las gráficas $y = 0$, $y = \sqrt{5}$, $x = 0$ y $x = y^2$. Determina el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje Y, mediante los dos siguientes métodos:

    a) Por secciones planas.
    b) Como un sólido de revolución

12. Sea R la región plana delimitada por la gráfica de la función $f(x) = (\ln x)^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 1, x = e$. Se pide:

    a) Calcula el área de R.
    b) Calcula el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

13. Calcula, en el primer cuadrante, el área comprendiada entre las gráficas de las funciones
$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ y } g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

14. Calcula el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$
queda dividida mediante la circunferencia de centro $(0, -3)$ y radio 5.

15. Sea $a > 0$. Calcula las siguientes integrales impropias:

$(a)\ \int_0^\infty e^{-ax} \cos x\, dx$ $\quad (b)\ \int_0^\infty e^{-ar} r^n\, dr$ $\quad (c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$

$(d)\ \int_e^\infty \dfrac{dx}{x \log x}$ $\quad (e)\ \int_e^\infty \dfrac{dx}{x \log^2 x}$ $\quad (f)\ \int_0^\infty x^2 e^{-2x}\, dx$

16. **Derivación paramétrica de integrales**. Calcula las siguientes derivadas:

$(a)\dfrac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3}\cos t\,dt$ $\quad(b)\dfrac{d}{dx}\int_{2x}^{3x}\frac{1}{t}\,dt$ $\quad(c)\dfrac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx$

$(d)\dfrac{d}{dx}\int_0^2 t^n\,dt$ $\quad(e)\dfrac{d}{dx}\int_0^2 x^n\,dt$ $\quad(f)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x v(t)\,dt\right)$

$(g)\dfrac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^t v(s)\,ds\right)\,dt$ $\quad(h)\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)\,dt+\int_x^1 v(t)\,dt\right)$ $\quad(i)\dfrac{d}{dx}\int_x^{x+1}v(t)\,dt$

17. **Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac**. Se define la función escalón (también llamada función de Heaviside) como

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\geq 1\\ \\ 0 & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

Se llama masa de Dirac centrada en 0, denotada $\delta_0(x)$, a la derivada de $H(x)$ respecto a x. Como es bien sabido, toda función derivable es necesariamente continua. Por tanto, como $H(x)$ no es continua en $x=0$, no puede ser derivable en dicho punto, al menos en el sentido de derivación introducido por Newton. Veamos qué sentido tiene pues la afirmación anterior.

a) Sea $v:[-1,1]\to R$ una función continua, con derivada continua, y de modo que $v(-1)=v(1)=0$. Utiliza la fórmula de integración por partes para comprobar que

$$\int_{-1}^{1}H'(x)v(x)\,dx=v(0).$$

b) En el contexto de la Física Cuántica, Paul Dirac (Premio Nobel de Física en 1933 junto a Erwin Schrödinger) introdujo la distribución delta $\delta_0(x)$ atribuyéndole las dos siguientes propiedades:

$$\delta_0(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\neq 0\\ \\ +\infty & \text{si} \quad x=0,\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_0(x)v(x)\,dx=v(0),$$

donde v es como en el apartado anterior.

Estas dos propiedades no encajaban con las Matemáticas conocidas en 1933 pues la integral de Riemann no está definida para "funciones"que toman el valor $+\infty$. El sentido en que deben entenderse las propiedades anteriores es el siguiente: para cada $\varepsilon>0$ consideremos la función

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & \text{si} \quad -\varepsilon\leq x\leq\varepsilon\\ \\ 0 & \text{si} \quad |x|>\varepsilon\end{cases}$$

Utiliza el Teorema de la media del Cálculo Integral para comprobar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(x)v(x)\,dx=v(0),$$

donde v es una función como en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, es decir,

$$\int_{-1}^{1} H'(x)v(x)\,dx = v(0) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} \delta_0(x)v(x)\,dx = v(0) \quad \forall v,$$

podemos concluir que $H'(x) = \delta_0(x)$. Esta forma de entender las derivadas es lo que se conoce con el nombre de derivación en el sentido de las distribuciones.

18. **Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral**. Son muchas y muy variadas las aplicaciones del Cálculo Integral en Física e Ingeniería. Se presentan a continuación algunas de ellas.

    a) Las líneas de forma en espectroscopia de resonancia magnética se describen a menudo a través de la función de Lorentz

    $$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{T}{1 + T^2(\omega - \omega_0)^2},$$

    donde T y ω_0 son constantes. Calcula $\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega)\,d\omega$.

    b) La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T se mueva a velocidad v está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

    $$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$

    Calcula la velocidad media $\overline{v} = \int_0^{\infty} v f(v)\,dv$.

    c) La fuerza que actúa entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia x en el vacío está dada por (ley de Coulomb)

    $$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

    donde ϵ_0 es la permeatividad del vacío. Calcula el trabajo ejercido por dicha fuerza para el caso de dos cargas iguales (por ejemplo dos electrones) que se repelen, es decir, calcula $W = -\int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt$.

    d) Consideremos una barra de longitud L con densidad de masa $\rho(x) = L - x$, $0 \leq x \leq L$. Calcula la posición del centro de masas, es decir,

    $$X = \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}$$

    y también el momento de inercia respecto al punto x_0, el cual se define como

    $$I = \int_0^L \rho(x)\,(x - x_0)^2\,dx.$$