1. **(1 punto)** Calcula $z_1 = \dfrac{(1-i)}{(1-i\sqrt{3})}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y operamos.

$$\frac{(1-i)}{(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1-i\sqrt{3})\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

2. **(1 punto)** Calcula $z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Expresamos z_2 en forma polar

$$z_2 = 2e^{i\pi/3}$$

   y operamos

$$z_2^{10} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{10} = 2^{10}e^{i\pi 10/3}$$

   por otro lado

$$\frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

   por tanto damos 1 vuelta a la circunferencia y nos quedaría

$$2^{10}e^{i\pi 10/3} = 2^{10}e^{i4\pi/3}$$

   y en forma binómica, tal y como se pide en el enunciado sería:

$$2^{10}e^{i4\pi/3} = 2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^9 - i2^9\sqrt{3} = -512 - i512\sqrt{3}.$$

3. **(2 puntos)** Calcula $\sqrt[3]{-i}$ en $\mathbb{C}$ y expresa el resultado en las formas exponencial y binómica.

   Solución: Expresamos el radicando en forma polar

$$i = 1e^{i3\pi/2}$$

   y aplicamos la fórmula de las raíces n–ésimas

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ con } \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ y } k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

   en este caso

$$n = 3, \ \ |z| = 1, \ \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \varphi_k = \frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3} \ \ k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

   luego tendremos 3 raíces

$$\begin{aligned} w_0 &= 1e^{i\pi/2} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i \\ w_1 &= 1e^{i7\pi/6} = \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ w_2 &= 1e^{i11\pi/6} = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(2,0),(1,3)\}$ y $B' = \{(0,1),(1,-1)\}$. Halla la matriz de cambio de base de B' a B.

Solución: Buscamos $M_{B'\to B}$, luego hay que expresar los elemento de la base B' en términos de la base B,es decir,si ponemos $B = \{u_1,u_2\}$ y $B' = \{v_1,v_2\}$, entonces buscamos 4 escalares a,b,c,d de forma que

$$\begin{aligned} v_1 &= au_1 + bu_2 \\ v_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}$$

y en este caso la matriz buscada será

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Para calcular estos valores, sólo hay que sustituir los vectores y resolver los sistemas que aparecen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 3b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 = 2a+b \\ 1 = 3b \end{array} \right. \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{3} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+d \\ 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = 2c+d \\ -1 = 3d \end{array} \right. \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}, d = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

La matriz buscada será

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \quad \text{y } W = < (3,3,3),(1,1,0) >$$

   a) **(1 punto)** Encuentra una base, las ecuaciones implícitas y las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios, U y W.
   b) **(1 punto)** Encuentra mediante el método de Gram–Schmidt una base ortonormal de W.
   c) **(1 punto)** Calcula la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U.
   d) **(1 punto)** Calcula una base de $U \cap W$. ¿Es directa la suma $U + W$?

Solución:

a) Para el subespacio U, ya tenemos las ecuaciones implícitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right.$$

Con estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas de U, resolviendo el sistema correspondiente: De la segunda ecuación

$$x+z=0 \Rightarrow z=-x$$

y sustituyendo en la primera

$$x+y+z=0 \Rightarrow y=0$$

y si usamos un parámetro, por ejemplo α

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= 0 \\ z &= -\alpha \end{aligned}$$

Las soluciones serán de la forma

$$(\alpha,0,-\alpha) = \alpha\,(1,0,-1)$$

lo que nos proporciona una base para U, $B_U = \{u = (1,0,-1)\}$

$$U = \langle (1,0,-1) \rangle .$$

Para el subespacio W, ya tenemos la base

$$W = < (3,3,3), (1,1,0) > \Longrightarrow B_W = \{w_1 = (3,3,3)\,; w_2 = (1,1,0)\}$$

que nos permite construir las ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z) = \alpha\,(3,3,3) + \beta\,(1,1,0) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 3\alpha + \beta \\ y = 3\alpha + \beta \\ z = 3\alpha \end{array} \right.$$

Y con estas ecuaciones paramétricas obtendremos la implícita

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0$$

b) A partir de la base de W que nos proporciona el enunciado,

$$B' = \{w_1 = (3,3,3); w_2 = (1,1,0)\}$$

construímos la base ortogonal $B'_W = \{w'_1; w'_2\}$ mediante el método de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_1 = (3,3,3) \\ w'_2 &= w_2 + \alpha w'_1 = (1,1,0) + \alpha(3,3,3) = (1+3\alpha, 1+3\alpha, 3\alpha) \end{aligned}$$

eligiendo α de forma que $\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = 0$

$$\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = \langle (3,3,3); (1+3\alpha, 1+3\alpha, 3\alpha) \rangle = (3+9\alpha)+(3+9\alpha)+9\alpha = 0 \iff 27\alpha = -6 \iff \alpha = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9},$$

de modo que

$$w'_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Se obtiene la base ortonormal pedida (b.o.n.) $B''_W = \{w''_1; w''_2\}$ dividiendo cada vector por su norma

$$\begin{aligned} w''_1 &= \frac{w'_1}{\|w'_1\|} = \frac{w'_1}{\left\langle w'_1; w'_1 \right\rangle^{1/2}} = \frac{(3,3,3)}{\langle (3,3,3); (3,3,3) \rangle^{1/2}} = \frac{(3,3,3)}{\sqrt{9+9+9}} = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ w''_2 &= \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{w'_2}{\left\langle w'_2; w'_2 \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

c) Como sabemos $\mathbb{R}^3 = U + U^\perp$, de forma que

$$v = (3,2,1) = u_1 + u_2, \quad \text{con } u_1 \in U \text{ y } u_2 \in U^\perp$$

el enunciado nos pide el cálculo de u_1. Por una parte y como $u_1 \in U = \langle (1,0,-1) \rangle$ entonces se tiene que si $u = (1,0,-1)$

$$u_1 = \alpha u = \alpha\,(1,0,-1) = (\alpha, 0, -\alpha)$$

por otra sabemos que como $u_2 \in U^\perp$, entonces

$$\langle u; u_2 \rangle = 0$$

de este modo si calculamos $\langle v; u \rangle$, o

$$\langle v; u \rangle = \langle u_1 + u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle + \langle u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle$$

y calculando los productos escalares correspondientes

$$\begin{aligned} \langle v; u\rangle &= \langle (3,2,1)\,;(1,0,-1)\rangle = 3+0-1 = 2 \\ \langle u_1; u\rangle &= \langle (\alpha,0,-\alpha)\,;(1,0,-1)\rangle = \alpha+\alpha = 2\alpha \end{aligned}$$

Por tanto

$$2 = 2\alpha \iff \alpha = 1$$

y la proyección buscada será

$$u_1 = (1,0,-1)$$

Aunque no se pide la proyección ortogonal sobre $U^{\perp}$ sería

$$u_2 = v - u_1 = (3,2,1) - (1,0,-1) = (2,2,2)$$

y podemos comprobar que

$$\langle u_1; u_2\rangle = \langle (1,0,-1)\,;(2,2,2)\rangle = 2+0-2 = 0$$

d) Para calcular una base $U \cap W$ podemos, por ejemplo, utilizar las ecuaciones implícitas de U y W

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad (x,y,z) \in U \text{ y } (x,y,z) \in W \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x+y+z=0,\, x+z=0,\, x-y=0 \right\} \end{aligned}$$

Tendremos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones (ver apartado a) sabemos que $y = 0$, por tanto de la tercera

$$y = x \implies x = 0$$

y en la primera

$$x+y+z=0 \implies 0+0+z=0 \implies z=0$$

luego el vector nulo $(0,0,0)$ es la única solución

$$U \cap W = \{0\}$$

de donde

$$\dim (U \cap W) = 0$$

y la fórmula de las dimensiones nos da

$$\dim (U+W) = \dim (U) + \dim (W) - \dim (U \cap W) = 1+2-0 = 3$$

luego la suma es directa

$$U + W = U \oplus W.$$