1. **(1 punto)** Calcula $z_1 = \dfrac{(1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y operamos.

$$\frac{(1+i)}{(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

2. **(1 punto)** Calcula $z_2 = (1-i)^{10}$ expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Expresamos z_2 en forma polar

$$z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \text{ o } z_2 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$$

   y operamos

$$z_2^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i7\pi/4}\right)^{10} = \left(2^{1/2}e^{i7\pi/4}\right)^{10} = 2^5 e^{i\pi 70/4}$$

   por otro lado

$$\frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2} = 8\,(2\pi) + \frac{3\pi}{2}$$

   por tanto damos 8 vueltas a la circunferencia y nos quedaría

$$2^5 e^{i\pi 70/4} = 2^5 e^{i3\pi/2}$$

   y en forma binómica, tal y como se pide en el enunciado sería:

$$2^5 e^{i3\pi/2} = 2^5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2^5\,(0-i) = -2^5 i = -32i.$$

3. **(2 puntos)** Calcula $\sqrt[4]{1}$ en $\mathbb{C}$ y expresa el resultado en las formas exponencial y binómica.

   Solución: Expresamos el radicando en forma polar

$$1 = 1e^{i0}$$

   y aplicamos la fórmula de las raíces n–ésimas

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ con } \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ y } k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

   en este caso

$$n = 4,\ \ |z| = 1,\ \ \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi_k = \frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

   luego tendremos 4 raíces

$$\begin{aligned} w_0 &= 1e^{i0} = (\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 1 \\ w_0 &= 1e^{i\pi/2} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i \\ w_0 &= 1e^{i\pi} = (\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = -1 \\ w_0 &= 1e^{i3\pi/2} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -i \end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(0,2),(1,3)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$. Halla la matriz de cambio de base de B a B'.

Solución: Buscamos $M_{B\to B'}$, luego hay que expresar los elemento de la base B en términos de la base B',es decir,si ponemos $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$, entonces buscamos 4 escalares a, b, c, d de forma que

$$\begin{aligned} u_1 &= av_1 + bv_2 \\ u_2 &= cv_1 + dv_2 \end{aligned}$$

y en este caso la matriz buscada será

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Para calcular estos valores, sólo hay que sustituir los vectores y resolver los sistemas que aparecen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = a+b \\ 2 = a-b \end{array} \right. \Leftrightarrow a = 1, b = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = c+d \\ 3 = c-d \end{array} \right. \Leftrightarrow c = 2, d = -1 \end{aligned}$$

La matriz buscada será

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y-z = 0 \\ x-y = 0 \end{array} \right. \quad \text{y } W =< (-2,1,0),(0,-4,1) >$$

   a) **(1 punto)** Encuentra una base, las ecuaciones implícitas y las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios, U y W.
   b) **(1 punto)** Encuentra mediante el método de Gram–Schmidt una base ortonormal de W.
   c) **(1 punto)** Calcula la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U.
   d) **(1 punto)** Calcula una base de $U \cap W$. ¿Es directa la suma $U + W$?

Solución:

   a) Para el subespacio U, ya tenemos las ecuaciones implícitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-z = 0 \\ x-y = 0 \end{array} \right.$$

Con estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas de U, resolviendo el sistema correspondiente: De la segunda ecuación

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

y sustituyendo en la primera

$$x + y - z = 0 \Rightarrow x + y = z \Rightarrow 2x = z$$

y si usamos un parámetro, por ejemplo α

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \alpha \\ z &= 2\alpha \end{aligned}$$

Las soluciones serán de la forma

$$(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha\,(1, 1, 2)$$

lo que nos proporciona una base para U, $B_U = \{u = (1, 1, 2)\}$

$$U = \langle (1, 1, 2) \rangle .$$

Para el subespacio W, ya tenemos la base

$$W =< (-2, 1, 0), (0, -4, 1) > \Longrightarrow B_W = \{w_1 = (-2, 1, 0)\,; w_2 = (0, -4, 1)\}$$

que nos permite construir las ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = \alpha\,(-2, 1, 0) + \beta\,(0, -4, 1) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = -2\alpha \\ y = \alpha - 4\beta \\ z = \beta \end{array} \right.$$

Y con estas ecuaciones paramétricas obtendremos la implícita

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -2\alpha \Longrightarrow \alpha = -\dfrac{x}{2} \\ y = \alpha - 4\beta \Longrightarrow y = -\dfrac{x}{2} - 4z \\ z = \beta \Longrightarrow \beta = z \end{array} \right.$$

es decir

$$\frac{x}{2} + y + 4z = 0 \iff x + 2y + 8z = 0.$$

b) A partir de la base de W que nos proporciona el enunciado,

$$B' = \{w_1 = (-2, 1, 0); w_2 = (0, -4, 1)\}$$

construímos la base ortogonal $B'_W = \{w'_1; w'_2\}$ mediante el método de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_1 = (-2, 1, 0) \\ w'_2 &= w_2 + \alpha w'_1 = (0, -4, 1) + \alpha\,(-2, 1, 0) = (-2\alpha, -4 + \alpha, 1) \end{aligned}$$

eligiendo α de forma que $\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = 0$

$$\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = \langle (-2, 1, 0)\,; (-2\alpha, -4 + \alpha, 1) \rangle = 4\alpha - 4 + \alpha = 0 \iff 5\alpha = 4 \iff \alpha = \frac{4}{5},$$

de modo que

$$w'_2 = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}, 1 \right).$$

Se obtiene la base ortonormal pedida (b.o.n.) $B''_W = \{w''_1; w''_2\}$ dividiendo cada vector por su norma

$$\begin{aligned} w''_1 &= \frac{w'_1}{\|w'_1\|} = \frac{w'_1}{\left\langle w'_1; w'_1 \right\rangle^{1/2}} = \frac{(-2, 1, 0)}{\langle (-2, 1, 0)\,; (-2, 1, 0) \rangle^{1/2}} = \frac{(-2, 1, 0)}{\sqrt{4 + 1}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right) \\ w''_2 &= \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{\left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}, 1\right)}{\left\langle \left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}, 1\right); \left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}, 1\right) \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}, 1\right)}{\sqrt{\frac{69}{5}}} = \left(-\frac{8\sqrt{5}\sqrt{69}}{345}, -\frac{16\sqrt{5}\sqrt{69}}{345}, \frac{\sqrt{5}\sqrt{69}}{69} \right) \end{aligned}$$

c) Como sabemos $\mathbb{R}^3 = U + U^{\perp}$, de forma que

$$v = (3, 2, 1) = u_1 + u_2, \quad \text{con } u_1 \in U \text{ y } u_2 \in U^{\perp}$$

el enunciado nos pide el cálculo de u_1. Por una parte y como $u_1 \in U = \langle (1,1,2) \rangle$ entonces se tiene que si $u = (1,1,2)$

$$u_1 = \alpha u = \alpha (1,1,2) = (\alpha, \alpha, 2\alpha)$$

por otra sabemos que como $u_2 \in U^{\perp}$, entonces

$$\langle u; u_2 \rangle = 0$$

de este modo si calculamos $\langle v; u \rangle$, o

$$\langle v; u \rangle = \langle u_1 + u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle + \langle u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle$$

y calculando los productos escalares correspondientes

$$\begin{aligned} \langle v; u \rangle &= \langle (3,2,1); (1,1,2) \rangle = 3 + 2 + 2 = 7 \\ \langle u_1; u \rangle &= \langle (\alpha, \alpha, 2\alpha); (1,1,2) \rangle = \alpha + \alpha + 4\alpha = 6\alpha \end{aligned}$$

Por tanto

$$7 = 6\alpha \iff \alpha = \frac{7}{6}$$

y la proyección buscada será

$$u_1 = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{14}{6} \right)$$

Aunque no se pide la proyección ortogonal sobre $U^{\perp}$ sería

$$u_2 = v - u_1 = (3,2,1) - \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{14}{6} \right) = \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{8}{6} \right)$$

y podemos comprobar que

$$\langle u_1; u_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{14}{6} \right); \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{8}{6} \right) \right\rangle = \frac{77}{36} + \frac{35}{36} - \frac{112}{36} = 0$$

d) Para calcular una base $U \cap W$ podemos, por ejemplo, utilizar las ecuaciones implícitas de U y W

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad (x,y,z) \in U \text{ y } (x,y,z) \in W \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x + y - z = 0,\ x - y = 0,\ x + 2y + 8z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Tendremos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 2y + 8z = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones (ver apartado a) sabemos que $y = x$ y que $z = 2x$ y sustituyendo en la tercera

$$x + 2y + 8z = 0 \iff x + 2x + 16x = 0 \iff x = 0$$

luego el vector nulo $(0,0,0)$ es la única solución

$$U \cap W = \{0\}$$

de donde

$$\dim (U \cap W) = 0$$

y la fórmula de las dimensiones nos da

$$\dim (U + W) = \dim (U) + \dim (W) - \dim (U \cap W) = 1 + 2 - 0 = 3$$

luego la suma es directa

$$U + W = U \oplus W.$$
