1.— $\begin{cases} u''(t)+2u'(t)+u(t)=-t^2 & t\in[0,4] \\ u(0)=3 \\ u(4)=0 \end{cases}$

Usando diferencias finitas centradas, tendremos $h=\Delta t \quad u(t_k)=u_k$.

$$u''(t_k)=\frac{u(t_{k+1})-2u(t_k)+u(t_{k-1})}{h^2}=\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$u'(t_k)=\frac{u(t_{k+1})-u(t_{k-1})}{2h}=\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h}.$$

Por tanto, usando la ecuación, para cada $k=1,2,3\ldots$ puesto que al estar u_{k-1}, no es posible empezar en $k=0$

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{(\Delta t)^2}+2\,\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2(\Delta t)}+u_k=-t_k^2. \quad (*)$$

En este caso $\Delta t=\frac{4-0}{4}=1$, por tanto debemos calcular

$\{u_0=u(0);\ u_1=u(1);\ u_2=u(2);\ u_3=u(3);\ u_4=u(4)\}$.

Conocemos el primero y el último $u_0=3 \quad u_4=0$

Por tanto, usaremos la ecuación (*) para calcular el resto: u_1, u_2, u_3.

Como $\Delta t = 1$, la ecuación queda para $k = 1, 2, 3$

$$(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + (u_{k+1} - u_{k-1}) + u_k = -t_k^2$$

$$(2u_{k+1} - u_k) = -t_k^2 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k - t_k^2)$$

$k=1 \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + t_1^2) = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}$

$k=2 \Rightarrow \quad u_3 = \frac{1}{2}(u_2 + t_2^2) = \frac{1}{2}u_2 - 2$

$k=3 \Rightarrow \quad u_4 = \frac{1}{2}(u_3 + t_3^2) = \frac{1}{2}u_3 - \frac{9}{2}$

Pero como $u_4 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}u_3 - \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{u_3 = 9}$

$$9 = \frac{1}{2}u_2 - 2 \Rightarrow 11 = \frac{1}{2}u_2 \Rightarrow \boxed{u_2 = 22}$$

$$22 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow 44 = u_1 - 1 \Rightarrow \boxed{u_1 = 45}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 45 \\ 22 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 – $\begin{cases} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = -\operatorname{sen}(t) & t \in [0,2] \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 0 \end{cases}$

Diferencias centradas $u'' \Rightarrow u''(t_k) = \dfrac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{(\Delta t)^2}$

Diferencias progresivas $u' \Rightarrow u'(t_k) = \dfrac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}$.

$n = 4 \Rightarrow \Delta t = \frac{2-0}{4} = 1/2 \Rightarrow t_k \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$

La ecuación queda, con la discretización, como

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{(\Delta t)^2} + 3 \cdot \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} \right) + 2 \cdot u_k = -\operatorname{sen}(t_k)$$

Para $K = 1, 2, 3$.

Teniendo en cuenta que $\Delta t = \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta t)^2 = \frac{1}{4}$, la ecuación queda, con $\frac{1}{\Delta t} = 2$ $\frac{1}{\Delta t^2} = 4$.

$$4(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + 6 \cdot (u_{k+1} - u_k) + 2u_k = -\operatorname{sen}(t_k)$$

$$\boxed{10u_{k+1} - 12u_k + 4u_{k-1} = -\operatorname{sen}(t_k)}$$

Con $u_0 = 3$; $u_4 = 0$ (4)

$k=1 \Rightarrow \quad 10u_2 - 12u_1 + 4u_0 = -\text{sen}(t_1) \Rightarrow 10u_2 - 12u_1 + 12 = -\text{sen}(1/2)$

$k=2 \Rightarrow \quad 10u_3 - 12u_2 + 4u_1 = -\text{sen}(t_2) \Rightarrow 10u_3 - 12u_2 + 4u_1 = -\text{sen}(1)$

$k=3 \Rightarrow \quad 10u_4 - 12u_3 + 4u_2 = -\text{sen}(t_3) \Rightarrow -12u_3 + 4u_2 = -\text{sen}(3/2)$.

Sistema que puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} -12 & 10 & 0 \\ 4 & -12 & 10 \\ 0 & 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - \text{sen}(1/2) \\ -\text{sen}(1) \\ -\text{sen}(3/2) \end{pmatrix}$$

o cambiando el signo a las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 12 & -10 & 0 \\ -4 & 12 & -10 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + \text{sen}(1/2) \\ \text{sen}(1) \\ \text{sen}(3/2) \end{pmatrix}$$

cuya solución usando OCTAVE es,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9513 \\ 1.0936 \\ 0.4477 \end{pmatrix}$$

③

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad x \in [0,4] \qquad t \geq 0$$

$$u(0,t) = 3$$

$$u(4,t) = 0$$

$$u(x,0) = 3\left(1 - \frac{x}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

NOTAR QUE $\quad u(0,0) = 3 \quad$ (usando condición de contorno)

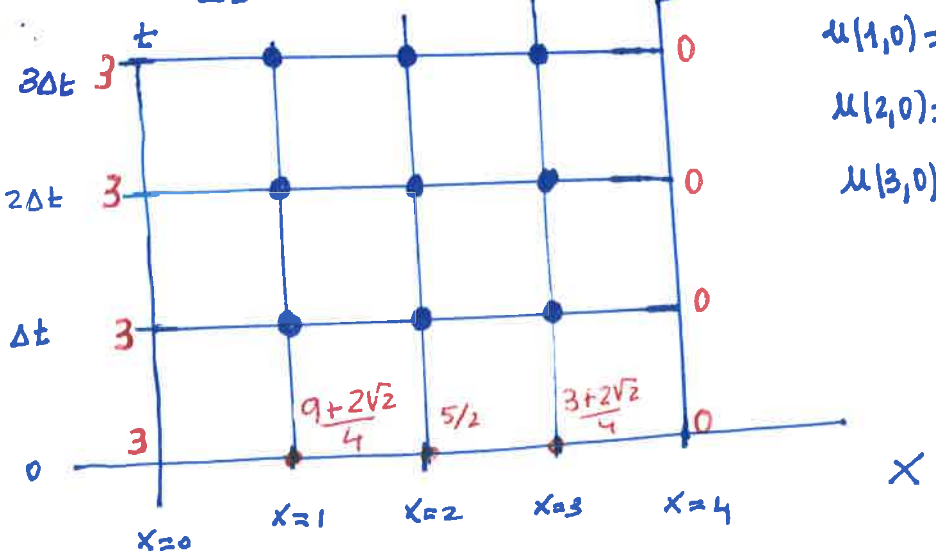
$$u(0,0) = 3\left(1 - \frac{0}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{4}\right) = 3 \quad \text{(usando condición inicial)}$$

$$u(4,0) = 0 \quad \text{(cond. contorno)}$$

$$u(4,0) = 3\underbrace{\left(1 - \frac{4}{4}\right)}_{0} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}\right) = 0 \quad \text{(cond. inicial)}.$$

$$N_x = 4 \Rightarrow \Delta x = \frac{4-0}{N_x} = \frac{4-0}{4} = 1.$$

$$\Delta t = \Delta t$$



$$u(1,0) = \frac{9+2\sqrt{2}}{4}$$

$$u(2,0) = 5/2$$

$$u(3,0) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}.$$

a) Calculamos el número de Courant para una EDP $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, en este caso $\alpha^2 = 1$

$$C = \alpha^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta t}{1^2} = \Delta t$$

Debe cumplirse $C \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \leq 1/2$.

b) Por comodidad y puesto que nos piden 3 intervalos de tiempo equidistantes consideramos $\Delta t = 1/3$ (que cumple la condición de estabilidad anterior) y los 3 instantes de tiempo serían $t_1 = 1/3$ $t_2 = 2/3$ y $t_3 = 3/3 = 1$.

Junto con el instante inicial $t_0 = 1$.

EXPLÍCITO.

Usando diferencias progresivas para $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_j) = \frac{u(x_n, t_{j+1}) - u(x_n, t_j)}{\Delta t} = \frac{u_{n,j+1} - u_{n,j}}{\Delta t}$$

Y diferencias centrales para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t_j) = \frac{u(x_{n+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_j)}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

La ecuación queda: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{u_{n,j+1} - u_{n,j}}{\Delta t} = \frac{u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta t = 1/2$ $\Delta x = 1$

$$\boxed{u_{n,j+1} - u_{n,j} = \frac{1}{3} \cdot (u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j})}$$

y como condiciones de contorno e iniciales

$$u_{0,j} = 3$$

$$u_{4,j} = 0$$

$$u_{n,0} = 3\left(1 - \frac{n}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)$$

Obviamente $j = 0, 1, 2, 3,$ mientras que $n = 1, 2, 3$

Podemos despejar $u_{n,j+1}$

$$u_{n,j+1} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j}\right) + u_{n,j}$$

$$u_{n,j+1} = \frac{1}{3}u_{n+1,j} + \frac{1}{3}u_{n,j} + \frac{1}{3}u_{n-1,j} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1,j} + u_{n,j} + u_{n-1,j}\right)$$

$\boxed{j=0}$

$\boxed{n=1 \Rightarrow}$ $$u_{1,1} = \frac{1}{3}u_{2,0} + \frac{1}{3}u_{1,0} + \frac{1}{3}u_{0,0} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9+2\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{31+2\sqrt{2}}{12} \simeq 2.819036.$$

$\boxed{n=2 \Rightarrow}$ $$u_{2,1} = \frac{1}{3}u_{3,0} + \frac{1}{3}u_{2,0} + \frac{1}{3}u_{1,0} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9+2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{11+2\sqrt{2}}{6} \simeq 2.304738$$

$\boxed{n=3 \Rightarrow}$

$$u_{3,1} = \frac{1}{3}u_{4,0} + \frac{1}{3}u_{3,0} + \frac{1}{3}u_{2,0} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{13+2\sqrt{2}}{12} \simeq 1.319036$$

$\boxed{J=1}$

$n=1 \Rightarrow$ $$u_{1,2} = \frac{1}{3}\left(u_{2,1} + u_{1,1} + u_{0,1}\right) = \frac{1}{3}\left(2.304738 + 2.819036 + 3\right)$$

$$= 2.707925$$

$n=2 \Rightarrow$ $$u_{2,2} = \frac{1}{3}\left(u_{3,1} + u_{2,1} + u_{1,1}\right) = \frac{1}{3}\left(1.319036 + 2.304738 + 2.819036\right)$$

$$= 2.147603$$

$n=3 \Rightarrow$ $$u_{3,2} = \frac{1}{3}\left(u_{4,1} + u_{3,1} + u_{2,1}\right) = \frac{1}{3}\left(0 + 1.319036 + 2.304738\right)$$

$$= 1.207925$$

$\boxed{J=2}$

$n=1 \Rightarrow$ $$u_{1,3} = \frac{1}{3}\left(u_{2,2} + u_{1,2} + u_{0,2}\right) = \frac{1}{3}\left(2.147603 + 2.707925 + 3\right)$$

$$= 2.618509$$

$n=2 \Rightarrow$ $$u_{2,3} = \frac{1}{3}\left(u_{3,2} + u_{2,2} + u_{1,2}\right) = \frac{1}{3}\left(1.207925 + 2.147603 + 2.707925\right)$$

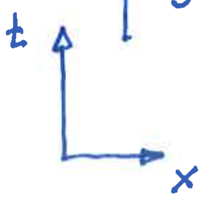
$$= 2.021151$$

$n=3 \Rightarrow$ $$u_{3,3} = \frac{1}{3}\left(u_{4,2} + u_{3,2} + u_{2,2}\right) = \frac{1}{3}\left(0 + 1.207925 + 2.147603\right)$$

$$= 1.118509$$

Solución

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2.618509 & 2.021151 & 1.118509 & 0 \\ 3 & 2.707925 & 2.147603 & 1.207925 & 0 \\ 3 & 2.819036 & 2.304738 & 1.319036 & 0 \\ 3 & 2.957107 & 2.5 & 1.457107 & 0 \end{bmatrix}$$



c) $q(x,t) = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

Tenemos que calcular $q(0,t_j)$ para $t_j \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ usando para ello los valores obtenidos en el apartado anterior para $u(x,t)$ es decir $u(0,t_j)$ para $t_j \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$.

Como tenemos que calcular la derivada respecto a x en uno de los extremos del intervalo de esta variable, utilizamos diferencias progresivas.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial u(x_n,t_j)}{\partial x} = \frac{u(x_{n+1},t_j) - u(x_n,t_j)}{\Delta x} = \frac{u_{n+1,j} - u_{n,j}}{\Delta x}$$

En este caso $n=0$ y $\Delta x = 1$, por tanto la fórmula queda.

$$q(x_n,t_j) \Rightarrow \boxed{q(0,t_j) = u_{1,j} - u_{0,j}} \qquad j=0,1,2,3.$$

$$q(0,0_s) = u_{1,0} - u_{0,0} = \frac{9+2\sqrt{2}}{4} - 3 = -0.042893$$

$$q(0,1/3) = u_{1,1} - u_{0,1} = \frac{31+2\sqrt{2}}{12} - 3 = -0.180964$$

$$q(0,2/3) = u_{1,2} - u_{0,2} = 2.707925 - 3 = -0.292075$$

$$q(0,1) = u_{1,3} - u_{0,3} = 2.618509 - 3 = -0.381491.$$