Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Tema 6
Resolución numérica de EDO

1. Considera el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u'(t) = -3u(t) - t^2 & t \geq 0 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

   a) Obtén una aproximación numérica de la solución $u(t)$ al problema anterior en el intervalo $[0,3]$, considerando 4 subintervalos de la misma longitud, usando el método de Euler explícito.
   b) Justifica debidamente por qué el número de subintervalos considerados conduce a una solución aproximada inestable.
   c) Propón una nueva partición del intervalo $[0,3]$ que conduzca a una solución estable por medio del método explícito de Euler y obtén dicha solución.
   d) Para la partición inicial de $[0,3]$ en 4 subintervalos, obtén una solución al problema de condiciones inciales utilizando ahora el método de Euler implícito. ¿Tenemos que preocuparnos en este caso por el número de subintervalos para obtener una solución estable? ¿Quiere decir esto que podemos utilizar cualquier partición para obtener una solución **estable** y **precisa**?

2. Considera el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u'(t) = -3u^2(t) - t^2 & t \geq 0 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

   a) Obtén una aproximación numérica de la solución $u(t)$ al problema anterior en el intervalo $[0,3]$, considerando 4 subintervalos de la misma longitud, usando el método de Euler explícito.
   b) Explica como obtendrías la condición de estabilidad.
   c) Para la partición inicial de $[0,3]$, en 4 subintervalos, obtén el valor de u en instante $t_1 = \Delta t$, utilizando el método de Euler implícito. Explica lo que sucede.

3. Considera el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) = -t^2 & t \geq 0 \\ u(0) = 3 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

   a) Transforma el problema de condiciones inciales asociado a la ecuación diferencial anterior de segundo en un problema de condiciones iniciales asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
   b) Obtén una aproximación numérica de la solución $\mathsf{x}(t)$ al problema anterior en el intervalo $[0,4]$, considerando 4 subintervalos de la misma longitud, usando el método de Euler explícito.
   c) Explica cómo obtendrías la condición de estabilidad.

d) Para la partición inicial de $[0,4]$, en 4 subintervalos, obtén una solución al problema de condiciones iniciales utilizando el método de Euler implícito.

4. Utiliza los métodos de Euler Explícito y Runge-Kutta de orden 2 y 4 clásico, para aproximar la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial. Compara con la solución exacta

Ecuación	Intervalo	Condición Inical	Incremento (h)	Solución Exacta
a) $y' = te^{3t} - 2y$	$0 \leq t \leq 1$	$y(0) = 0$	$h = 0{,}5$	$y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$
b) $y' = 1 + (t-y)^2$	$2 \leq t \leq 3$	$y(2) = 1$	$h = 0{,}5$	$y(t) = t + \frac{1}{1-t}$
c) $y' = 1 + \frac{y}{t}$	$1 \leq t \leq 2$	$y(1) = 2$	$h = 0{,}25$	$y(t) = t\ln t + 2t$
d) $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t$	$0 \leq t \leq 1$	$y(0) = 1$	$h = 0{,}25$	$y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$