Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Tema 5
Integración numérica

1. Considera el intervalo $x \in [0, 3]$ y una partición del mismo en 4 subintervalos de igual tamaño. Para la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}^3 x$, se pide:

   a) Utiliza las reglas de Trapecio y Simpson compuestas para obtener una aproximación numérica de $I = \int_0^3 f(x)\, dx$. Justifica debidamente cuál de las dos aproximaciones esperas que sea más exacta.

   b) Utiliza una cuadratura de Gauss tal que garantice la integración exacta de un polinomio de grado 5. En la siguiente tabla se indican los nodos (ξ) y pesos (w) de los métodos de cuadratura de Gauss correspondientes a 1, 2, 3 y 4 nodos.

w	ξ
0	2

w	ξ
1	−0,5773
1	0,5773

w	ξ
5/9	−0,7746
8/9	0
5/9	0,7746

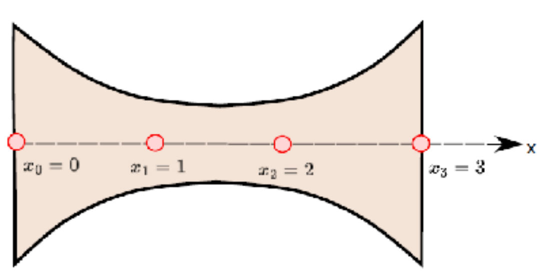
w	ξ
0,3478	−0,8611
0,6521	−0,3399
0,6521	0,3399
0,3478	0,8611

   Usa OCTAVE para encontrar el valor de la integral si utilizas este método de cuadratura en cada subintervalo de la partición inicial.

2. Dada la función x^7, utiliza una regla de cuadratura de Gauss que integre de forma exacta la integral $\int_1^7 f(x)\, dx$. Justifica tu elección de la regla de cuadratura.

3. En un túnel de viento (véase Figura 1), se han tomado las siguientes mediciones a través de sensores (círculos en la Figura) de la velocidad del aire inyectado v en función de la coordenada x del túnel:

x (m)	v (m/s)
0	0,5
1	1,0
2	1,2
3	1,0



a) Calcula la velocidad media en el túnel, sabiendo que esta se obtiene de la siguiente forma:

$$\overline{v} = \frac{\int_0^3 v\,(x)\,dx}{3}$$

Para ello tienes total libertad a la hora de escoger el método de integración numérica que tú prefieras.

b) La presión en el fuido $p(x)$ es $p(x) = \frac{1}{2}\rho v^2\,(x)$, siendo ρ la densidad del aire. Tomando $\rho = 1{,}29(kg/m3)$, obtén la presión media en el túnel:

$$\overline{p} = \frac{\int_0^3 p\,(x)\,dx}{3}$$

De nuevo, tienes total libertad a la hora de escoger el método de integración numérica que estimes oportuno.

c) Calcula v y p utilizando una regla de cuadratura de Gauss de 3 puntos.

4. Dado el rectángulo $[1,3] \times [2,5]$ y la función $f(x,y) = x^3 \sin y$, calcula una aproximación numérica de

$$I = \int_1^3 \int_2^5 f\,(x,y)\,dxdy$$

utilizando una regla de cuadratura de Gauss con 2 nodos en cada dirección.

5. Considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Además, considera una discretización del intervalo $[0,1]$ en 4 subintervalos de igual tamaño. Evalúa $f(x)$ en cada uno de los nodos $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ creados. Se pide:

   a) Calcula una aproximación de $f'\,(x)$ en $x = 0{,}5$ utilizando: (a) diferencias finitas progresivas; (b) diferencias finitas regresivas; (c) diferencias finitas centradas.

   b) Compara el resultado obtenido con el exacto y justifica los resultados obtenidos en términos de precisión relacionándolos con el error de discretización cometido en cada uno de las 3 aproximaciones consideradas.

   c) Repite los dos pasos anteriores para el caso $x = 0{,}25$.

   d) Calcula una aproximación numérica de $f''\,(x)$ en $x = 0{,}5$ y en $x = 0{,}25$ por medio de diferencias finitas centradas.

6. Una barra representada por el intervalo $x \in [0,L]$ (con $L = 3$) ha sido sometida a un esfuerzo de tracción. Como consecuencia de la aplicación de dicha fuerza, hemos monitorizado el desplazamiento u de los puntos $x = [0, 0{,}75, 1{,}5, 2{,}25, 3]$, siendo $u = [0, 0{,}0063, 0{,}025, 0{,}056, 0{,}1]$. En cada la tensión el material se calcula como sigue

$$\sigma = E\frac{du\,(x)}{dx}$$

donde E es el módulo de Young del material. Considera el caso del acero, con $E = 210(GPa)$.

   a) Calcula la tensión en los 5 puntos seleccionados mediante el método más preciso posible (siempre que se pueda usar). Puedes usar: (a) diferencias finitas centradas; (b) diferencias finitas progresivas; (c) diferencias finitas regresivas.

   b) Calcula una aproximación numérica de $\frac{d^2u(x)}{dx^2}$ en $x = 0{,}75$.

7. Considera la función $f(x,y) = x^3 \operatorname{sen} y$. Considera el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y una discretización del mismo en 4 subintervalos en cada dirección x e y. Se pide:

   a) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   b) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   c) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   d) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   e) Con los resultados obtenidos, determina el gradiente y el laplaciano de $f(x,y)$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Recuerda que ambos se calculan como sigue:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y}\right];\ \Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial y^2}$$

   f) Con el valor de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$ calculado anteriormente utilizando diferencias finitas centradas, calcula $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ en $(0{,}5, 0{,}75)$, utilizando para ello diferencias finitas centradas para la derivación con respecto de y también.

8. Considera el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y una discretización del mismo en 4 subintervalos en cada dirección x e y. Es decir, considera los vectores

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [0, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1]$$

$$y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5] = [0, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1]$$

   En cada nodo (x,y) conocemos la temperatura $u\,(x,y)$, siendo sus valores los recogidos en la siguiente tabla:

	$x_1 = 0$	$x_2 = 0{,}25$	$x_3 = 0{,}5$	$x_4 = 0{,}75$	$x_5 = 1$
$y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$y_2 = 0{,}25$	0	0,5	0,7071	0,5	0
$y_3 = 0{,}5$	0	0,7071	1	0,7071	0
$y_4 = 0{,}75$	0	0,5	0,7071	0,5	0
$y_5 = 1$	0	0	0	0	0

   a) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   b) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   c) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

   d) Calcula una aproximación numérica de $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ en $(x,y) = (0{,}5, 0{,}75)$. Utiliza diferencias finitas: centradas, progresivas y regresivas.

e) Con los resultados obtenidos, determina el gradiente y el laplaciano de $f(x, y)$ en $(x, y) = (0{,}5, 0{,}75)$.

f) Con el valor de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ en $(x, y) = (0{,}5, 0{,}75)$ calculado anteriormente utilizando diferencias finitas centradas, calcula $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ en $(0{,}5, 0{,}75)$, utilizando para ello diferencias finitas centradas para la derivación con respecto de y también.

©Silvestre Paredes Hernández®