Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Temas 4
Interpolación

1. Utiliza los polinomios interpolantes de Lagranges apropiados, de grado 1, 2, 3 y 4 para aproximar:

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
$f(x)$	0,5103757	0,5207843	0,5104147	0,4813306	0,4359160

Solución: Utilizaremos la fórmula de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

donde

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

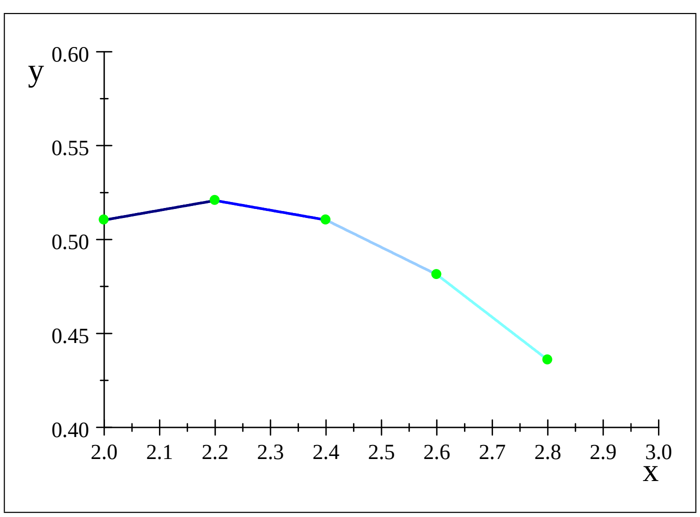
Si utilizamos polinomios de grado 1 (rectas), entonces debemos realizar una interpolación lineal a trozos entre cada dos pares de puntos, tendremos por tanto 4 polinomios de grado 1

$$P_{1,1}(x) = \tfrac{(x-2{,}2)}{(2-2{,}2)}0{,}5103757 + \tfrac{(x-2)}{(2{,}2-2)}0{,}5207843 = 5.204\,3\times 10^{-2}x + 0{,}406\,29$$

$$P_{1,2}(x) = \tfrac{(x-2{,}4)}{(2{,}2-2{,}4)}0{,}5207843 + \tfrac{(x-2{,}2)}{(2{,}4-2{,}2)}0{,}5104147 = 0{,}634\,85 - 5.184\,8\times 10^{-2}x$$

$$P_{1,3}(x) = \tfrac{(x-2{,}6)}{(2{,}4-2{,}6)}0{,}5104147 + \tfrac{(x-2{,}4)}{(2{,}6-2{,}4)}0{,}4813306 = 0{,}859\,42 - 0{,}145\,42x$$

$$P_{1,4}(x) = \tfrac{(x-2{,}8)}{(2{,}6-2{,}8)}0{,}4813306 + \tfrac{(x-2{,}6)}{(2{,}8-2{,}6)}0{,}4359160 = 1.071\,7 - 0{,}227\,07x$$



Si utilizamos polinomios de grado 2 (parábolas), entonces debemos realizar una interpolación cada 3 puntos, tendremos por tanto 2 polinomios de grado 2

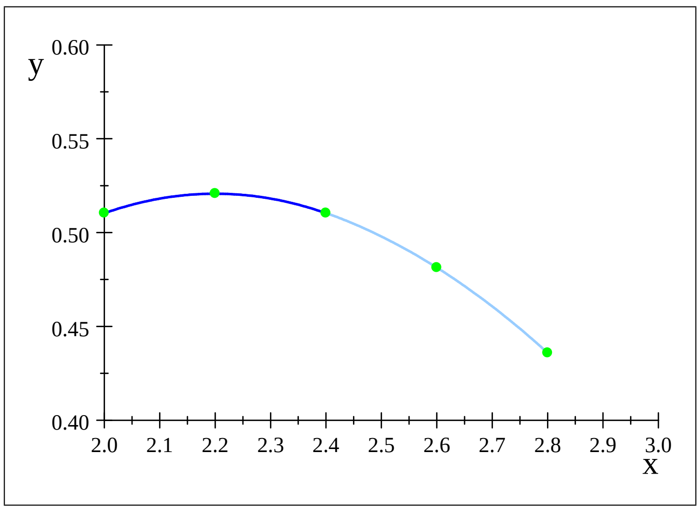
$$P_{2,1}(x) = \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}4)}{(2-2{,}2)(2-2{,}4)}0{,}5103757 + \frac{(x-2)(x-2{,}4)}{(2{,}2-2)(2{,}2-2{,}4)}0{,}5207843 + \frac{(x-2)(x-2{,}2)}{(2{,}4-2)(2{,}4-2{,}2)}0{,}5104147$$

$$= -0{,}260\,1x^2 + 1.\,144\,5x - 0{,}738\,3$$

$$P_{2,2}(x) = \frac{(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2{,}4-2{,}6)(2{,}4-2{,}8)}0{,}5104147 + \frac{(x-2{,}4)(x-2{,}8)}{(2{,}6-2{,}4)(2{,}6-2{,}8)}0{,}4813306 + \frac{(x-2{,}4)(x-2{,}6)}{(2{,}8-2{,}4)(2{,}8-2{,}6)}0{,}4359160$$

$$= -0{,}204\,13x^2 + 0{,}875\,24x - 0{,}414\,36$$

:



Para usar un polinomio interpolación de grado 3, también tendremos que usar un polinomio de grado 1, ya que para el primero necesitamos 4 puntos y tenemos 5, este podría ir al principio o al final. Si lo ponemos al principio

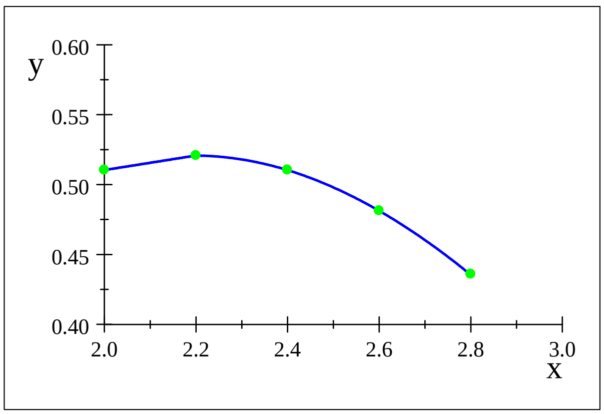
$$\begin{aligned}
P_{3,1}(x) &= \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)}{(2-2{,}2)(2-2{,}4)(2-2{,}6)}0{,}5103757 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)}{(2{,}2-2)(2{,}2-2{,}4)(2{,}2-2{,}6)}0{,}5207843 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}2)(x-2{,}6)}{(2{,}4-2)(2{,}4-2{,}2)(2{,}4-2{,}6)}0{,}5104147 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}2)(x-2{,}4)}{(2{,}6-2)(2{,}6-2{,}2)(2{,}6-2{,}4)}0{,}4813306 \\
&= 4.\,299\,4\times 10^{-2}x^3 - 0{,}543\,49x^2 + 1.\,765\,4x - 1.\,190\,5
\end{aligned}$$

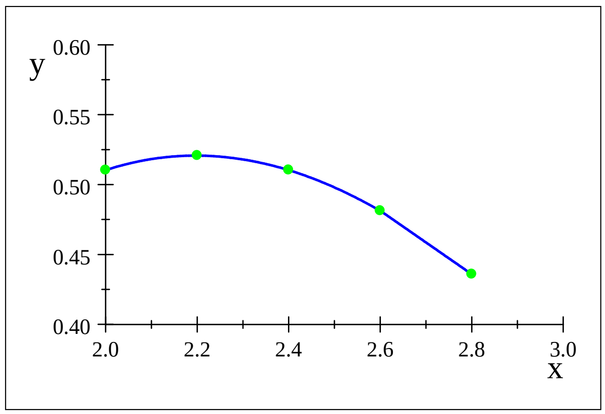
y para los nodos 2,6 y 2,8, utilizaríamos el polinomio de primer grado $P_{1,4}(x)$, que hemos calculado al principio.

Por otra parte, podemos interpolar los nodos 2 y 2,2 con $P_{1,1}(x)$ y el resto de nodos mediante el polinomio de grado 3

$$\begin{aligned}
P_{3,2}(x) &= \frac{(x-2{,}4)(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2{,}2-2{,}4)(2{,}2-2{,}6)(2{,}2-2{,}8)}0{,}5207843 \\
&\quad + \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2{,}4-2{,}2)(2{,}4-2{,}6)(2{,}4-2{,}8)}0{,}5104147 \\
&\quad + \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}8)}{(2{,}6-2{,}2)(2{,}6-2{,}4)(2{,}6-2{,}8)}0{,}4813306 \\
&\quad + \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)}{(2{,}8-2{,}2)(2{,}8-2{,}4)(2{,}8-2{,}6)}0{,}4359160 \\
&= 4.9667\times10^{-2}x^3 - 0{,}59153x^2 + 1.8805x - 1.2821
\end{aligned}$$

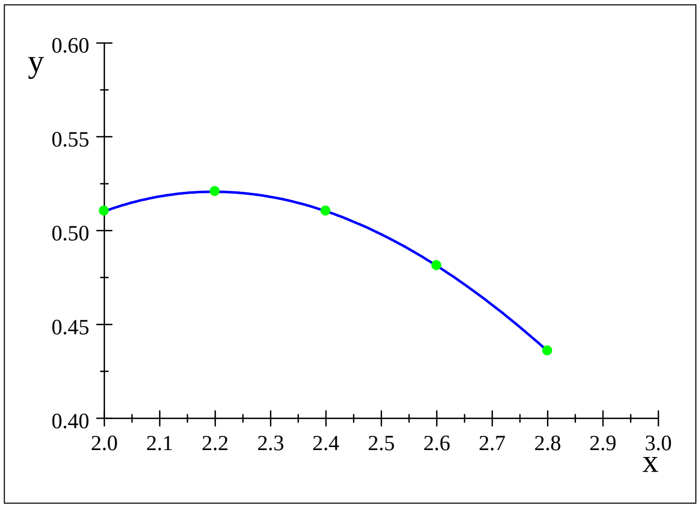
Representamos ambos opciones en la siguientes gráficas





Usamos todos los puntos para construir el polinomio interpolador de grado 4

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \frac{(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2-2{,}2)(2-2{,}4)(2-2{,}6)(2-2{,}8)}0{,}5103757 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2{,}2-2)(2{,}2-2{,}4)(2{,}2-2{,}6)(2{,}2-2{,}8)}0{,}5207843 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}2)(x-2{,}6)(x-2{,}8)}{(2{,}4-2)(2{,}4-2{,}2)(2{,}4-2{,}6)(2{,}4-2{,}8)}0{,}5104147 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}8)}{(2{,}6-2)(2{,}6-2{,}2)(2{,}6-2{,}4)(2{,}6-2{,}8)}0{,}4813306 \\
&\quad + \frac{(x-2)(x-2{,}2)(x-2{,}4)(x-2{,}6)}{(2{,}8-2)(2{,}8-2{,}2)(2{,}8-2{,}4)(2{,}8-2{,}6)}0{,}4359160 \\
&= 8.3411\times10^{-3}x^4 - 3.3745\times10^{-2}x^3 - 0{,}27957x^2 + 1.3633x - 0{,}96151
\end{aligned}$$



2. Utiliza los valores de la siguiente tabla para construir un polinomio de Lagrange de grado ≤ 2 . Encuentra una aproximación para $\operatorname{sen} 0{,}34$ y calcula una cota del error en esta aproximación:

$\operatorname{sen} 0{,}30$	$\operatorname{sen} 0{,}32$	$\operatorname{sen} 0{,}35$
$0{,}29552$	$0{,}31457$	$0{,}34290$

Agrega el valor $\operatorname{sen} 0{,}33 = 0{,}32404$ a los datos anteriores y construye un polinomio de Lagrange de grado ≤ 3. Aproxima el $\operatorname{sen} 0{,}34$ y encuentra una cota del error.

Solución: Utilizaremos el método de Newton para construir el polinomio interpolador, puesto que despúes añadiremos un punto adicional y los cálculos posteriores son menos que si usáramos el polinomio en la forma de Lagrange

$x_0 = 0{,}3 \quad f[x_0] = \boxed{0{,}29552}$

$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}31457 - 0{,}29552}{0{,}32 - 0{,}3} = \boxed{0{,}95250}$

$x = 0{,}32 \quad f[x_1] = 0{,}31457$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0{,}94433 - 0{,}9525}{0{,}35 - 0{,}30} = \boxed{-0{,}1634}$

$f[x_1, x_2] = \frac{0{,}34290 - 0{,}31457}{0{,}35 - 0{,}32} = 0{,}94433$

$x = 0{,}35 \quad f[x_2] = 0{,}34290$

El polinomio es

$$P_2(x) = 0{,}29552 + 0{,}9525(x - 0{,}3) - 0{,}1634(x - 0{,}3)(x - 0{,}32)$$

podemos obtener el error usando que $\operatorname{sen}(x)$ es una función tres veces derivable

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\theta_x)}{3!}(x - 0{,}3)(x - 0{,}32)(x - 0{,}35)$$

si derivamos 3 veces el $\operatorname{sen}(x)$ obtenemos $f'''(x) = -\cos x$ y por tanto

$$f(x) - P_2(x) = -\frac{\cos(\theta_x)}{6}(x - 0{,}3)(x - 0{,}32)(x - 0{,}35)$$

Para encontrar el valor de $\operatorname{sen} 0{,}34$ usamos el polinomo $P_2(x)$

$$P_2(x) = 0{,}29552 + 0{,}9525(0{,}34 - 0{,}3) - 0{,}1634(0{,}34 - 0{,}3)(0{,}34 - 0{,}32) = 0{,}333\,489\,28$$

y el error real sería

$$\begin{aligned} f(0{,}34) - P_2(0{,}34) &= -\frac{\cos(\theta_x)}{6}(0{,}34-0{,}3)(0{,}34-0{,}32)(0{,}34-0{,}35) \\ &= \frac{\cos(\theta_x)}{6}(-0{,}000\,008\,) \end{aligned}$$

donde $\theta_x \in [0{,}32, 0{,}35]$, teniendo en cuenta que $|\cos(x)| \leq 1$, podemos obtener una cota del error tomando valores absolutos

$$|f(0{,}34) - P_2(0{,}34)| \leq \frac{1}{6}\left(-8{,}0 \times 10^{-6}\right) = 1.\,333\,3 \times 10^{-6}$$

Notar que el error real es un poco mayor

$$|\sin(0{,}34) - 0{,}333\,489\,28| = 2.\,187\,859\,2 \times 10^{-6}$$

que puede achacarse al redondeo de las operaciones realizadas y por la representación finita de números reales en el ordenador.

Incluimos el nuevo valor

$$\operatorname{sen} 0{,}33 = 0{,}32404$$

incorporándolo al esquema de Newton

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 0{,}3 \quad f[x_0] = \boxed{0{,}29552} & & & \\
 & f[x_0,x_1] = \frac{0{,}31457-0{,}29552}{0{,}32-0{,}3} = \boxed{0{,}952\,5} & & \\
x = 0{,}32 \quad f[x_1] = 0{,}31457 & & f[x_0,x_1,x_2] = \frac{0{,}944\,33-0{,}952\,5}{0{,}35-0{,}30} = \boxed{-0{,}163\,4} & \\
 & f[x_1,x_2] = \frac{0{,}34290-0{,}31457}{0{,}35-0{,}32} = 0{,}944\,33 & & \\
x = 0{,}35 \quad f[x_2] = 0{,}34290 & & f[x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}943-0{,}94433}{0{,}33-0{,}32} = \underline{-0{,}13300} & \\
 & f[x_2,x_3] = \frac{0{,}32404-0{,}34290}{0{,}33-0{,}35} = \underline{0{,}94300} & & \\
x = 0{,}33 \quad f[x_3] = \underline{0{,}32404} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
f[x_0,x_1,x_2] = \frac{0{,}944\,33-0{,}952\,5}{0{,}35-0{,}30} = \boxed{-0{,}163\,4} & \\
 & f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{-0{,}133-(-0{,}163\,4)}{0{,}33-0{,}3} = \underline{1.\,013333} \\
f[x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}943-0{,}94433}{0{,}33-0{,}32} = \underline{-0{,}13300} &
\end{array}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + 1.\,013333\,(x-0{,}3)(x-0{,}32)(x-0{,}35)$$

y el valor del polinomio en 0,34

$$\begin{aligned} P_3(0{,}34) &= P_2(0{,}34) + 1.\,013333\,(x-0{,}3)(x-0{,}32)(x-0{,}35) \\ &= 0{,}333\,49 + 1.\,013333\,(0{,}34-0{,}3)(0{,}34-0{,}32)(0{,}34-0{,}35) \\ &= 0{,}333\,48 \end{aligned}$$

En este caso la cota de error debería ser

$$\begin{aligned}
|f(0{,}34) - P_3(0{,}34)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\theta_x)}{4!} (0{,}34-0{,}3)(0{,}34-0{,}32)(0{,}34-0{,}35)(0{,}34-0{,}33) \right| \\
&= \left| \frac{\sin(\theta_x)}{4!} (0{,}34-0{,}3)(0{,}34-0{,}32)(0{,}34-0{,}35)(0{,}34-0{,}33) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{4!} (0{,}34-0{,}3)(0{,}34-0{,}32)(0{,}34-0{,}35)(0{,}34-0{,}33) \right| \simeq -3.\,333\,3 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

De nuevo el error real será mayor por los errores de redondeo

$$|\sin(0{,}34) - 0{,}333\,48| \simeq 5.\,082\,2 \times 10^{-6}$$

notar que incluso es peor que para el caso anterior, como antes no se tienen en cuenta los errores de redondeo.

3. Sea $f(x) = 3xe^x - 2e^x$. Aproxima $f(1{,}03)$ usando el polinomio interpolante de grado ≤ 2, con $x_0 = 1, x_1 = 1{,}05, x_2 = 1{,}07$. Compara el error real con la cota del error obtenida mediante la fórmula de error.

Solución: Calcularemos el valor de la función en los nodos indicados usando la expresión $f(x) = (3x-2)e^x$, puesto que el cálculo de e^x incluye un error de redondeo, parece más adecuado realizar el cálculo menos veces

k	x_k	$f_k = f(x_k)$
0	1	2,7183
1	1,05	3.2863
2	1,07	3.5276

y el polinomio interpolador será, en forma de Lagrange

$$P_2(x) = \frac{(x-1{,}05)(x-1{,}07)}{(1-1{,}05)(1-1{,}07)} 2{,}7183 + \frac{(x-1)(x-1{,}07)}{(1{,}05-1)(1{,}05-1{,}07)} 3.2863 + \frac{(x-1)(x-1{,}05)}{(1{,}07-1)(1{,}07-1{,}05)} 3.5276$$

para 1,03, evaluamos en el polinomio

$$P_2(1{,}03) \simeq 3{,}05305$$

mientras que el valor exacto es

$$f(1{,}03) \simeq 3{,}05316$$

y siendo el error

$$|f(1{,}03) - P_2(1{,}03)| \simeq |3{,}05316 - 3{,}05305| = 0{,}000\,11 \simeq 1{,}1 \times 10^{-4}$$

Para usar la fórmula del error y como el polinomio es de grado 2, necesitamos la derivada 3 de la función

$$f'''(x) = (3x+7)e^x$$

por tanto

$$|f(x) - P_3(x)| = \left| \frac{f'''(\theta_x)}{6} (x-1)(x-1{,}05)(1{,}07) \right| = \left| \frac{(3\theta_x + 7)e^{\theta_x}}{6} (x-1)(x-1{,}05)(x-1{,}07) \right|$$

donde θ_x está en el intervalo $[1, 1{,}07]$. Como $f'''(x)$ es creciente en $[1, 1{,}07]$ el mayor valor se obtiene en el extremo superior

$$(3\theta_x + 7)\, e^{\theta_x} < (3 \cdot 1{,}07 + 7) * \exp(1{,}07) = 29.766 \simeq 30$$

y

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{30}{6}(x-1)(x-1{,}05)(1{,}07) = 5(x-1)(x-1{,}05)(x-1{,}07)$$

Para 1,03

$$|f(1{,}03) - P_3(1{,}03)| \leq |5(1{,}03-1)(1{,}03-1{,}05)(1{,}03-1{,}07)| = 0{,}00012 = 1{,}2 \times 10^{-4}$$

4. Supón que se desea construir tablas con 6 cifras para la función $\log x$, desde $x = 1$ hasta $x = 10$, de tal manera que la interpolación lineal sea exacta en 6 lugares decimales. Determina el tamaño del paso más grande posible para esa tabla.

   Solución: Queremos realizar interpolación lineal entre cada dos puntos, de forma que el error sea 10^{-6}. Sea $h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$ el tamaño de paso elegido, por tanto

$$x_{k+1} = x_k + h$$

y el error en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ vendrá dado por

$$|f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f''(\xi_k)}{2!}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right|$$

para $f(x) = \log(x)$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, por tanto

$$|f(x) - P_1(x)| = \left| -\frac{1}{2\xi_k^2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| = \frac{1}{2\xi_k^2}\left|(x - x_k)(x - x_{k+1})\right|$$

siendo $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. La función $\frac{1}{x^2}$ es decreciente en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, luego el máximo se alcanza en el extremo inferior x_k, tendremos así

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{2x_k^2}\left|(x - x_k)(x - x_{k+1})\right|$$

Por otra parte el factor $(x - x_k)(x - x_{k+1})$ es una parábola con mínimo en el punto medio del intervalo

$$x^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

y en ese punto la función vale

$$(x^* - x_k)(x^* - x_{k+1}) = \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - x_k\right)\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - x_{k+1}\right) = -\frac{1}{4}(x_{k+1} - x_k)^2$$

tomando el valor absoluto obtendremos el máximo de $|(x - x_k)(x - x_{k+1})|$, y deducimos que

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8x_k^2} = \frac{h^2}{8x_k^2}$$

Esta es la cota de error para cada intervalo, como debe servir para todos los intervalos, tomando el valor más pequeño que es $x_0 = 1$,

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8x_k^2} = \frac{h^2}{8x_k^2} \leq \frac{h^2}{8}$$

obtendremos que para cualquier x dentro del intervalo $[1,10]$ se cumple para $h=\frac{9}{n}$

$$|f(x)-P_1(x)|\leq\frac{h^2}{8}=\frac{81}{8n^2}$$

Si el error debe ser menor que 10^{-6}, entonces podemos poner

$$\frac{81}{8n^2}<10^{-6}\Leftrightarrow n^2>\frac{81\cdot 10^6}{8}\Rightarrow n>\frac{9}{2\sqrt{2}}10^3\simeq 3181{,}98$$

tomando

$$n=3182\Rightarrow h=\frac{9}{3182}=2.828\,4\times 10^{-3}$$

obtenemos el resultado buscado.

5. Utiliza el método de diferencias divididas de Newton para calcular $\sqrt{2}$ utilizando $f(x)=2^x$ y los nodos $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ y $x_4=2$. Compara con el valor exacto.

Solución:

$x_0=-2 \quad f[x_0]=0{,}25$

$f[x_0,x_1]=\frac{0{,}5-0{,}25}{-1-(-2)}=0{,}25$

$x_1=-1 \quad f[x_1]=0{,}5$

$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{0{,}5-0{,}25}{0-(-2)}=0{,}125$

$f[x_1,x_2]=\frac{1-0{,}5}{0-(-1)}=0{,}5$

$x_2=0 \quad f[x_2]=1$

$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{1-0{,}5}{1-(-1)}=0{,}25$

$f[x_2,x_3]=\frac{2-1}{1-0}=1{,}0$

$x_3=1 \quad f[x_3]=2$

$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{2-1}{2-0}=0{,}5$

$f[x_3,x_4]=\frac{4-2}{2-1}=2{,}0$

$x_4=2 \quad f[x_4]=4$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{0{,}25-0{,}125}{1-(-2)}=4.166\,7\times 10^{-2}$

$f[x_0,x_1,x_2,x_4]=\frac{8.333\,3\times 10^{-2}-4.166\,7\times 10^{-2}}{2-(-2)}=1.041\,7\times 10^{-2}$

$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{0{,}5-0{,}25}{2-(-1)}=8.333\,3\times 10^{-2}$

Siendo el polinomio interpolador de grado 4

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 0{,}25+0{,}25(x+2)+0{,}125(x+2)(x+1)\\ &\quad +4.166\,7\times 10^{-2}(x+2)(x+1)x+1.041\,7\times 10^{-2}(x+2)(x+1)x(x-1)\end{aligned}$$

y $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ sería

$$P_4\left(\frac{1}{2}\right)=1.412\,2$$

siendo el error

$$\sqrt{2}-1{,}4122=2.013\,6\times 10^{-3}$$

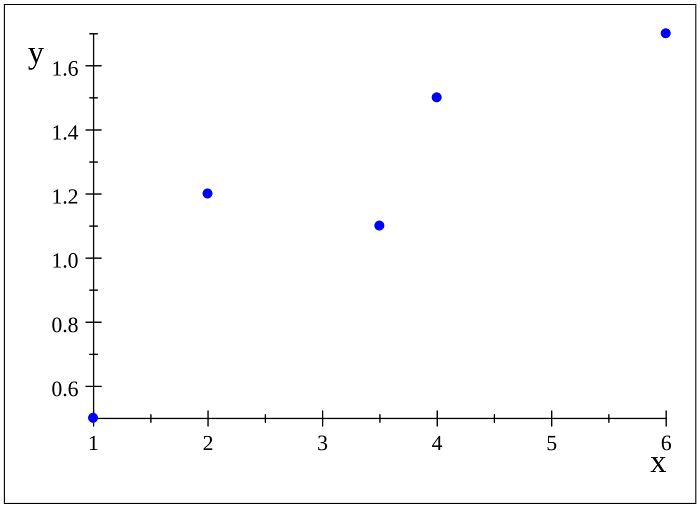
6. Para evaluar el desgaste que sufre una determinada máquina se mide éste en distintos momentos, obteniéndose la siguiente tabla

t	1	2	3,5	4	6
Desgaste	0,5	1,2	1,1	1,5	1,7

Calcula el momento o momentos de máximo desgaste con el fin de instalar un sistema de refrigeración en dicho instante.

Solución: Representemos los datos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3{,}5 & 4 & 6 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1{,}1 & 1{,}5 & 1{,}7 \end{bmatrix}^T$$



Si construimos el polinomio interpolador que pasa por los 5 puntos, que será de grado 4. Vamos a usar el método de Newton

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 1 & f[x_0] = 0{,}5 & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \frac{1{,}2-0{,}5}{2-1} = 0{,}7 & \\
x_1 = 2 & f[x_1] = 1{,}2 & & f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-6.666\,7\times10^{-2}-0{,}7}{3{,}5-1} = -0{,}306\,67 \\
 & & f[x_1,x_2] = \frac{1{,}1-1{,}2}{3{,}5-2} = -6.666\,7\times10^{-2} & \\
x_2 = 3{,}5 & f[x_2] = 1{,}1 & & f[x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}8-\left(-6.666\,7\times10^{-2}\right)}{4-2} = 0{,}433\,33 \\
 & & f[x_2,x_3] = \frac{1{,}5-1{,}1}{4-3{,}5} = 0{,}8 & \\
x_3 = 4 & f[x_3] = 1{,}5 & & f[x_2,x_3,x_4] = \frac{0{,}1-0{,}8}{6-3{,}5} = -0{,}28 \\
 & & f[x_3,x_4] = \frac{1{,}7-1{,}5}{6-4} = 0{,}1 & \\
x_4 = 6 & f[x_4] = 1{,}7 & &
\end{array}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{0{,}433\,33-(-0{,}306\,67)}{4-1} = 0{,}246\,67$$

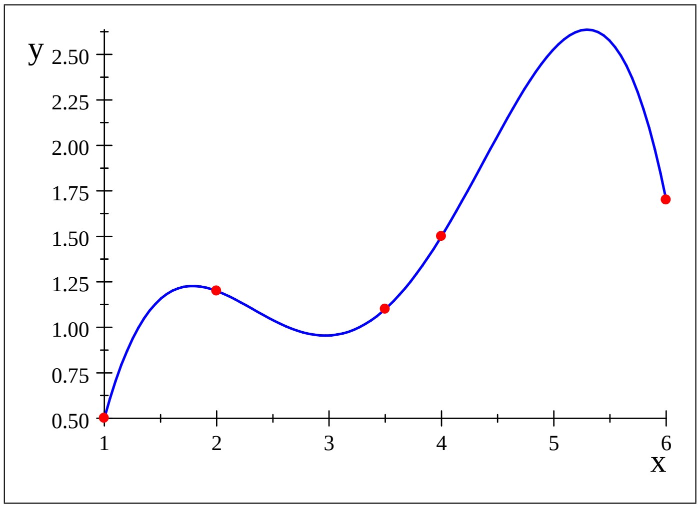
$$f[x_0,x_1,x_2,x_4] = \frac{-0{,}178\,33-0{,}246\,67}{6-1} = -0{,}085$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{-0{,}28-0{,}433\,33}{6-2} = -0{,}178\,33$$

siendo el polinomio de Newton

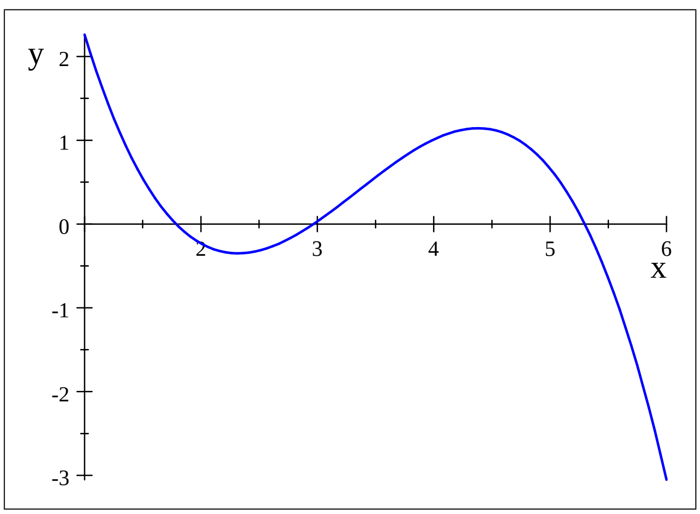
$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0{,}5 + 0{,}7(x-1) - 0{,}306\,67(x-1)(x-2) + \\
&\quad 0{,}246\,67(x-1)(x-2)(x-3{,}5) - 0{,}085(x-1)(x-2)(x-3{,}5)(x-4) \\
&= -0{,}085\,x^4 + 1.139\,2x^3 - 5.182\,5x^2 + 9.548\,4x - 4.92
\end{aligned}$$

: :



Observando el polinomio de interpolación, vemos que hay dos posibles máximos. Uno en el intervalo $[1,2]$ y otro en el intervalo $[5,6]$. Para encontrar el máximo, derivamos el polinomio de interpolación

$$\begin{aligned} P_4'(x) &= 0{,}7 - 0{,}306\,67\,(2x-3) + 0{,}246\,67\left(3x^2 - 13x + 12{,}5\right) - 0{,}085\left(4x^3 - 31.\,5x^2 + 77{,}0x - 57{,}0\right) \\ &= -0{,}34x^3 + 3.\,417\,5x^2 - 10.\,365x + 9.\,548\,4 \end{aligned}$$



Encontraremos las raíces de $P_4'(x)$ usando los métodos del tema anterior.

7. Con los datos de la siguiente tabla construye el polinomio de interpolación utilizando los métodos de Lagrange y Newton.

x	0,0	1,0	2,0	3,0
$f(x)$	1,0	4,0	15,0	40,0

Solución: Como tenemos 4 puntos el prolinomio interpolador será como mucho de grado 3. La forma de Lagrange es

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}1{,}0+\frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}4 \\
&\quad +\frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}15+\frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}40 \\
&= -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}+\frac{4x(x-2)(x-3)}{2}-\frac{15x(x-1)(x-3)}{2}+\frac{40x(x-1)(x-2)}{6} \\
&= x^3+x^2+x+1
\end{aligned}$$

Con el método de Newton:

$$\begin{array}{llll}
x_0=0 \quad f[x_0]=1 & & & \\
 & f[x_0,x_1]=\frac{4-1}{1-0}=3 & & \\
x_1=1 \quad f[x_1]=4 & & f[x_0,x_1,x_2]=\frac{11-3}{2-0}=4 & \\
 & f[x_1,x_2]=\frac{15-4}{2-1}=11 & & f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{7-4}{3-0}=1 \\
x_2=2 \quad f[x_2]=15 & & f[x_1,x_2,x_3]=\frac{25-11}{3-1}=7 & \\
 & f[x_2,x_3]=\frac{40-15}{3-2}=25 & & \\
x_3=3 \quad f[x_3]=40 & & &
\end{array}$$

y el polinomio sería

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+3(x-0)+4(x-0)(x-1)+(x-0)(x-1)(x-2) \\
&= 1+3x+4x(x-1)+x(x-1)(x-2) \\
&= x^3+x^2+x+1
\end{aligned}$$

8. Aproxima $\sqrt{3}$ usando el método del baricentro en la función $f(x)=3^x$, para los valores $x_0=-2, x_1=-1, x_2=0, x_3=1, x_4=2$

Solución: Recordemos la fórmula general usando el método del baricentro

$$P_n(x)=\frac{\frac{q_0y_0}{x-x_0}+\cdots+\frac{q_ny_n}{x-x_n}}{\frac{q_0}{x-x_0}+\cdots+\frac{q_n}{x-x_n}}$$

siendo

$$q_j=\frac{1}{L'(x_j)}$$

y

$$L(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

Calculamos los valores de $L'(x_j)$

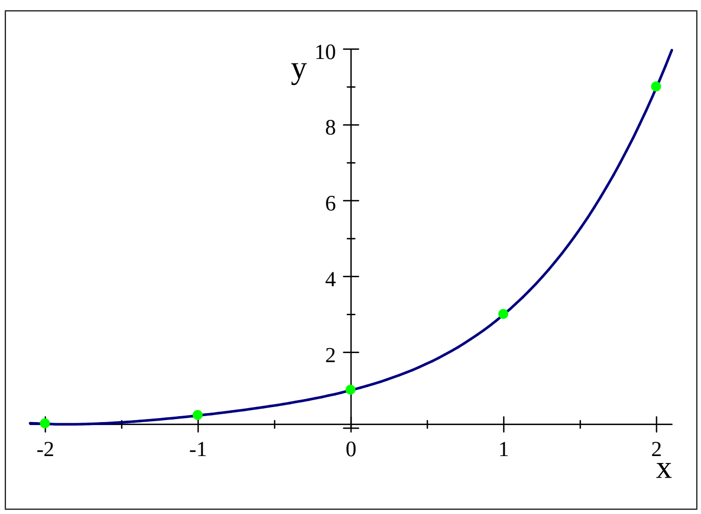
$$L'(x_j)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}(x-x_k)$$

usamos una tabla de doble entrada, en el interior están las diferencias $(x_i - x_j)$

	-2	-1	0	1	2	$L'(x_j) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{4} (x_{j-}x_k)$	$q_j = \frac{1}{L'(x_j)}$	$y_j = f(x_j) = 3^{x_j}$	$q_j y_y$
-2	$*$	-1	-2	-3	-4	24	$\frac{1}{24}$	$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{24}\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{216}$
-1	1	$*$	-1	-2	-3	-6	$-\frac{1}{6}$	$3^{-1} = \dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{18}$
0	2	1	$*$	-1	-2	4	$\frac{1}{4}$	$3^0 = 1$	$\dfrac{1}{4}1 = \dfrac{1}{4}$
1	3	2	1	$*$	-1	-6	$-\frac{1}{6}$	$3^1 = 3$	$-\dfrac{1}{6}3 = -\dfrac{1}{2}$
2	4	3	2	1	$*$	24	$\frac{1}{24}$	$3^2 = 9$	$\dfrac{1}{24}9 = \dfrac{3}{8}$

Y el polinomio es

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{\frac{1}{216(x+2)} - \frac{1}{18(x+1)} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{8(x-2)}}{\frac{1}{24(x+2)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{24(x-2)}} \\ &= \frac{2}{27}x^4 + \frac{8}{27}x^3 + \frac{16}{27}x^2 + \frac{28}{27}x + 1 \end{aligned}$$



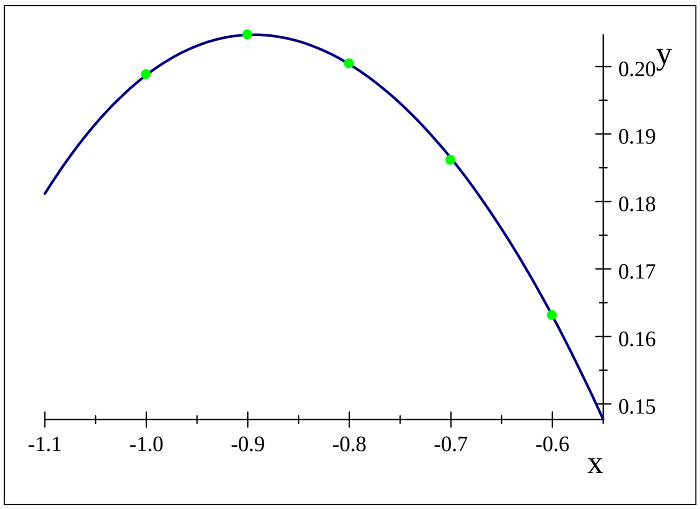
9. Utiliza el método del baricentro para aproximar $f(-0{,}78)$ para la función $f(x) = x^2 e^x \cos x$, usando $x_0 = -1, x_1 = -0{,}9, x_2 = -0{,}8, x_3 = -0{,}7, x_4 = -0{,}6$.

   Solución: Usamos una tabla de doble entrada, en el interior están las diferencias $(x_i - x_j)$

$x_i \backslash x_j$	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$L'(x_j)$	$q_j = \frac{1}{L'(x_j)}$	$y_j = x_j^2 e^{x_j} \cos x_j$	$q_j y_y$
-1	$*$	$-0{,}1$	$-0{,}2$	$-0{,}3$	$-0{,}4$	$0{,}0024$	$416{,}67$	$0{,}1988$	$82{,}819$
$-0{,}9$	$0{,}1$	$*$	$-0{,}1$	$-0{,}2$	$-0{,}3$	$-0{,}0006$	$-1666{,}67$	$0{,}2047$	$-341{,}182$
$-0{,}8$	$0{,}2$	$0{,}1$	$*$	$-0{,}1$	$-0{,}2$	$0{,}0004$	2500	$0{,}2004$	$500{,}881$
$-0{,}7$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$	$*$	$-0{,}1$	$-0{,}0006$	$-1{,}666{,}67$	$0{,}1861$	$-310{,}718$
$-0{,}6$	$0{,}3$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$	$*$	$0{,}0024$	$416{,}67$	$0{,}1631$	$67{,}943$

$$\frac{\frac{82,819}{(x+1)} - \frac{341,182}{(x+0,9)} + \frac{500,881}{(x+0,8)} - \frac{310,718}{(x+0,7)} + \frac{67,943}{(x+0,6)}}{\frac{416,67}{(x+1)} - \frac{1666,67}{(x+0,9)} + \frac{2500}{(x+0,8)} - \frac{1666,67}{(x+0,7)} + \frac{416,67}{(x+0,6)}}$$

$$= -\frac{1,0}{500,0x^2+800,0x+2.500\,3\times 10^6}\left(6,425\times 10^5x^4 + 1,878\times 10^6x^3 + 3,229\,2\times 10^6x^2 + 3,107\times 10^6x + 6,164\,3\times 10^5\right)$$



10. Calcula, usando las fórmulas de Lagrange y del baricentro, el polinomio interpolador de grado 3 para los datos

x	1	0	3	7
$f(x)$	2	0	4	7

Solución: Usamos una tabla de doble entrada, en el interior están las diferencias $(x_i - x_j)$

$\diagdown\ x_j$ / $x_i\ \diagdown$	1	0	3	7	$L'(x_j) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{4}(x_j - x_k)$	$q_j = \frac{1}{L'(x_j)}$	$y_j = f(x_j)$	$q_j y_y$
1	$*$	1	-2	-6	12	$\frac{1}{12}$	2	$\frac{1}{6}$
0	-1	$*$	-3	-7	-21	$-\frac{1}{21}$	0	0
3	2	3	$*$	-4	-24	$-\frac{1}{24}$	4	$-\frac{1}{6}$
7	6	7	4	$*$	168	$\frac{1}{168}$	7	$\frac{7}{168}$

Con Lagrange

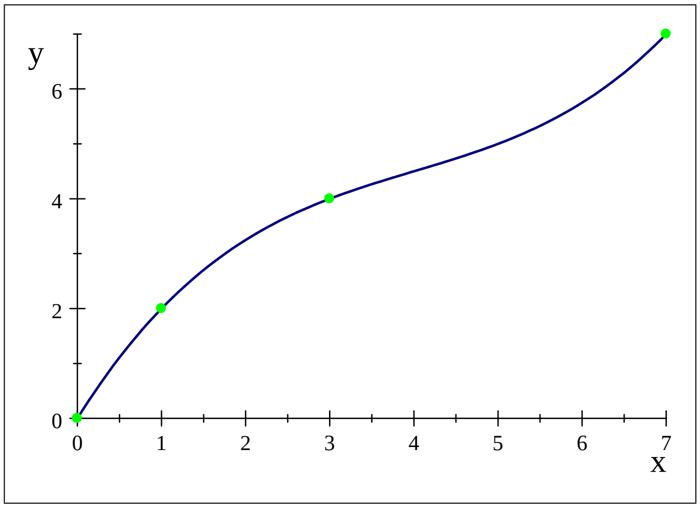
$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{x(x-3)(x-7)}{(1-0)(1-3)(1-7)}2 + \frac{(x-1)x(x-7)}{(3-1)(3-0)(3-7)}4 + \frac{(x-1)x(x-3)}{(7-1)(7-0)(7-3)}7 \\ &= \frac{x(x-3)(x-7)}{6} - \frac{(x-1)x(x-7)}{6} + \frac{(x-1)x(x-3)}{24} \end{aligned}$$

Con Baricentro

$$P_n(x) = \frac{\frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{6(x-3)} + \frac{1}{24(x-7)}}{\frac{1}{12(x-1)} - \frac{1}{21x} - \frac{1}{24(x-3)} + \frac{1}{168(x-7)}}$$

Ambos polinomios coinciden

$$P_3(x) = \frac{1}{24}x\left(x^2 - 12x + 59\right)$$

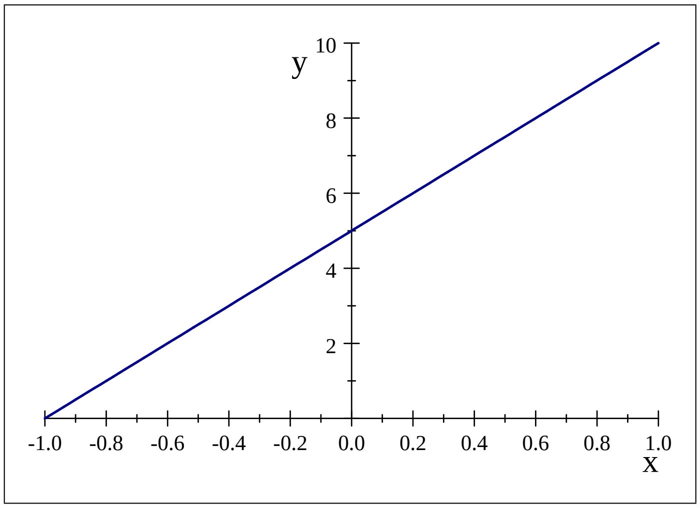


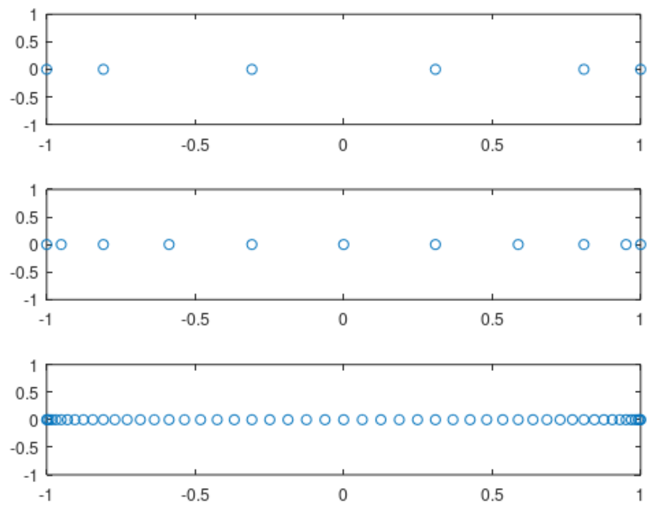
11. Consideremos la función lineal $T : [-1;1] \longrightarrow [a;b]$, definida como

$$T(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

Consideremos el caso $a = 0$ y $b = 10$. Dibuja dicha función y elabora un código en Octave para aplicar los nodos de Chebyshev $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$, $j = 0, \ldots, n$ sobre el intervalo $[0, 10]$. Ejecuta el código para $n = 5; 10; 50$ y observa cómo la densidad de los nodos es mayor en los extremos.

Solución:





Se incluye el código OCTAVE para realizar los gráficos:

```
T = T = @(x) 5*x + 5
v = [5, 10, 50];
figure(1)
j=1
for k=v
chebysev = cos((0:k)*pi/k)';
y = zeros(k+1,1);
subplot(3,1,j);
plot(chebysev,y,.o");
j=j+1;
end
```

12. Consideremos los nodos bi-dimensionales $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3, 4$, con $x_i = i$ e $y_i = i$, sobre el cuadrado $[0, 4] \times [0, 4]$. Se pide:

   a) A partir de los polinomios de Lagrange $\boldsymbol{l}_i^x(x)$ y $\boldsymbol{l}_j^y(y)$,asociados a los nodos anteriores, construye la base producto tensorial correspondiente para interpolación en el cuadrado $[0, 4] \times [0, 4]$.
   Solución:

$$\boldsymbol{l}_i^x(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{4} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

$$\boldsymbol{l}_j^y(y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{4} \frac{(y - y_k)}{(y_j - y_k)}$$

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i, y_j) \, \boldsymbol{l}_i^x(x) \, \boldsymbol{l}_j^y(y)$$

   Para este caso

$$x_i = i$$

y podemos poner

$$\boldsymbol{l}_i^x(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{4} \frac{(x-k)}{(i-k)}$$

$$\boldsymbol{l}_j^y(y) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{4} \frac{(y-k)}{(j-k)}$$

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4} f(i,j)\, \boldsymbol{l}_i^x(x)\, \boldsymbol{l}_j^y(y)$$

Notar que el sumatorio se puede expresar como

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{4} \boldsymbol{l}_j^y(y) \left(\sum_{i=0}^{4} f(i,j)\, \boldsymbol{l}_i^x(x) \right) = \sum_{j=0}^{4} \boldsymbol{l}_j^y(y)\, F(x,j)$$

$b)$ (OCTAVE) Elige 15 datos z_{ij} y calcula el polinomio interpolador que pasa por dichos datos en los nodos (x_i, y_j). Dibújalo en Octave.

$c)$ (OCTAVE) A partir de la base de B-splines $B_i(x)$ y $B_j(x)$, construye la base producto tensorial resultamente para el cuadrado y nodos anteriores. Para los mismos 15 datos z_{ij} anteriores, calcula el spline que pasa por dichos datos en los nodos (x_i, y_j). Dibújalo en Octave.

Solución: Este problema no entra en examen. No se han dado los B-Splines.
