EJERCICIOS PROPUESTOS PRÁCTICA 1

Ejercicio 1 Crea tu propia función en Octave que permita multiplicar dos matrices o vectores. Recuerda que para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, la matriz resultante del producto es $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, y los elementos de la misma se obtienen como sigue

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}; \qquad 1 \leq i \leq n; \qquad 1 \leq j \leq p.$$

Los requisitos de la función son los siguientes:

- Antes de calcular el producto, debes incorporar una comprobación en la función, en concreto, debes comprobar que ambas matrices pueden multiplicarse. Es decir, que el número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ y el número de filas de la matriz $\boldsymbol{B}$ debe ser el mismo. Si no es así, el programa debe devolver el siguiente error: Las matrices no pueden multiplicarse. Compruebe el tamaño de las mismas.
- Debes inicializar la matriz $\boldsymbol{C}$ con el comando **zeros** teniendo en cuenta su tamaño.
- Los elementos C_{ij} de la matriz $\boldsymbol{C}$ deben crearse utilizando bucles **for**.

Ejercicio 2 Sobre la matriz $\boldsymbol{K}_n$ (ver la función que permite calcularla, ejercicio 6 de la hoja de ejercicios resueltos) se pide:

- Para tamaños $n = \{4, 10, 100\}$ calcula el número de condición de la matriz $\boldsymbol{K}_n$ utilizando el comando **cond**.
- Comprueba que efectivamente, los números de condición obtenidos anteriormente son bastante similares a $\frac{4}{\pi^2}(n+1)^2$.
- La matriz de rigidez (tipo Toeplitz) $\boldsymbol{K}_n$ es simétrica. Compruébalo para $n = 4$ en Octave. Para ello calcula su traspuesta $\boldsymbol{K}_4^T$ y resta ambas matrices, obteniendo la matriz $\boldsymbol{B}$, es decir $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}_4 - \boldsymbol{K}_4^T$. A continuación calcula el segundo invariante de la matriz $\boldsymbol{B} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $I_{\boldsymbol{B}}$, definido como:

  $$I_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}.$$

  Comprueba que efectivamente $I_{\boldsymbol{B}} = 0$. Utiliza el comando **trace** de Octave o tu propia función **MyTrace.m** para calcular la traza. Para tu información, el segundo invariante se puede expresar como:

  $$I_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} B_{ij}^2$$

  Por lo tanto, como se trata de la suma de elementos de $\boldsymbol{B}$ al cuadrado, si el resultado es cero es porque todos los términos de $\boldsymbol{B}$ son cero, y por tanto, $\boldsymbol{K}_4$ simétrica.

- El segundo invariante $I_{\boldsymbol{B}}$ es la norma de Frobenius de la matriz $\boldsymbol{B}$ elevado al cuadrado. Comprueba que el resultado de calcular $\sqrt{I_{\boldsymbol{B}}}$ devuelve lo mismo que la aplicación del comando **norm** usando 'fro' como segundo argumento (comprueba con la ayuda de Octave el comando **norm**).

- Para $n = 4$ calcula sus autovalores y autovectores (usa convenientemente el comando **eig** de Octave). Comprueba:

  - Que todos los autovalores son positivos.
  - Calcula el determinante de $\boldsymbol{K}_4$ usando el comando **det** de Octave. Comprueba que el resultado es el mismo que el producto de los autovalores de $\boldsymbol{K}_4$. Calcula el producto con un bucle **for**.
  - Que el cociente entre el mayor autovalor y el menor coincide con el resultado arrojado por el comando **cond** en el primer apartado.
  - Que todos los autovectores son ortogonales entre sí. Es decir, dados los 4 autovalores $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_4\}$, comprueba que $\boldsymbol{V}_i \cdot \boldsymbol{V}_j = 0$, para todo $i \neq j$.
  - Comprueba que se verifica el teorema de descomposición espectral para la matriz $\boldsymbol{K}_4$. Es decir, crea mediante un bucle **for** la siguiente matriz $\boldsymbol{B}$

    $$\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i^T$$

    Posteriormente comprueba que la diferencia entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{K}_4$ es nula.