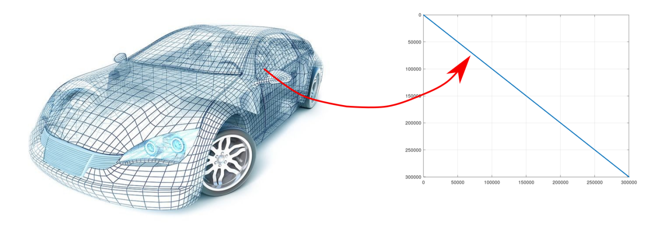
Derivación e integración numérica



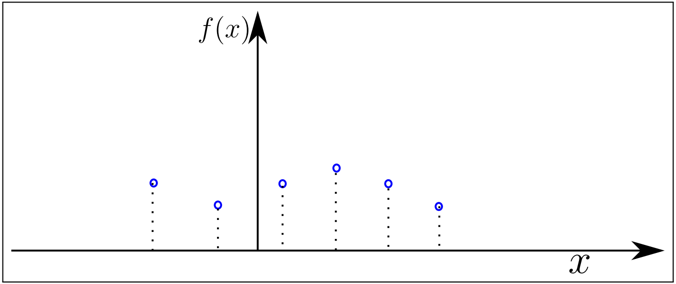
Rogelio Ortigosa Martínez
Silvestre Paredes Hernández
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, UPCT

Índice

Índice

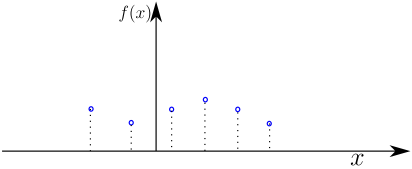
Bloque 1 (I)

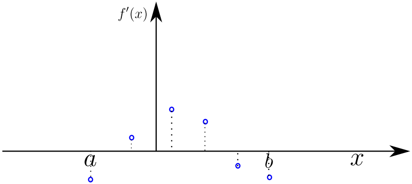
- **Datos:** partimos de $\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{x} \in [a, b]$. $x_k \neq x_j$ si $j \neq k$.
- **Datos:** conocemos también $\boldsymbol{f} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$.



Bloque 1 (II)

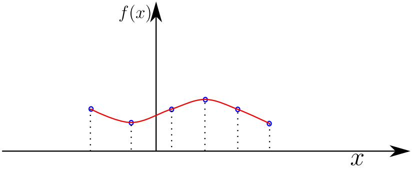
- **Encontrar** vector que contiene a la aproximación de la derivada de $f(x)$, es decir, encontrar $\boldsymbol{y}' = \{y_0', y_1', \ldots, y_n'\}$

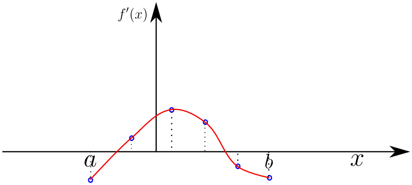




Bloque 1 (III)

- **Encontrar** vector que contiene a la aproximación de la derivada de $f(x)$, es decir, encontrar $\boldsymbol{y}' = \{y'_0, y'_1, \ldots, y'_N\}$





Bloque 1 (IV). Fórmulas de dos puntos

- **Fórmula diferencias hacia adelante (forward-difference)**

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}; \qquad h>0}$$

- **Fórmula diferencias hacia atrás (backward-difference)**

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}; \qquad h>0}$$

Bloque 1 (V). Fórmulas de tres puntos

- **Fórmula para nodos intermedios**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}; \qquad h > 0$$

- **Fórmula para nodos extremos** h>0
  Extremo inferior

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$$

Extremo superior

$$f'(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{2h}$$

Bloque 1 (V). Fórmulas de cinco puntos

- **Fórmula para nodos intermedios** h>0

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - 8f(x_0+2h)}{12h}$$

- **Fórmula para nodos extremos**
  Extremo superior

$$f'(x_0) = \frac{-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)}{12h}$$

Extremo inferior

$$f'(x_0) = \frac{25f(x_0) - 48f(x_0-h) + 36f(x_0-2h) - 16f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)}{12h}$$

Bloque 1 (VI). Nodos de Chebyshev

- **Datos:** partimos de $\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{x} \in [-1, 1]$. Los $\boldsymbol{x}_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$ son los nodos de Chebyshev en el intervalo $[-1, 1]$
- **Datos:** conocemos también $\boldsymbol{f} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, los valores de la función en los nodos de Chebyshev.
- **Objetivo:** Conocer $\boldsymbol{f'} = \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$, los valores de la derivada de la función en los nodos de Chebyshev.
- **Procedimiento:** Construir $P_n(x)$, el polinomio de interpolación de grado $\leq n$ y evaluamos $w_j = P_n'(x_j)$. Por linealidad, obtendremos una matriz, $\vec{D}$.
- $\boldsymbol{D}_n$ es la **matriz de derivación numérica**

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \boldsymbol{D}_n \boldsymbol{v}}$$

Bloque 1 (VII-A). Matriz de derivación

- $n = 1$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

- $n = 2$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Bloque 1 (VII-B). Matriz de derivación

- **Caso general:**

$$(D_n)_{00} = \frac{2n^2+1}{6}$$

$$(D_n)_{nn} = -\frac{2n^2+1}{6}$$

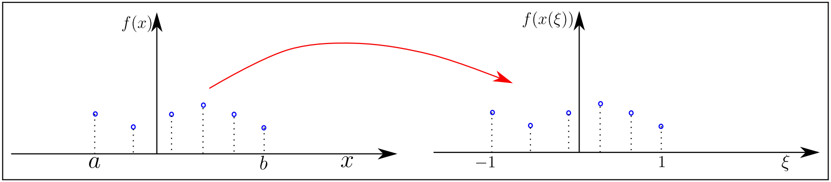
$$(D_n)_{jj} = -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)} \qquad i = 1, 2 \ldots, n-1$$

$$(D_n)_{ij} = \frac{c_i}{c_j}\frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)} \qquad i \neq j \qquad i = 1, 2 \ldots, n-1$$

$$c_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 0 \text{ o } i = n \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Bloque 1 (VII)

- Caso en el que $\boldsymbol{x} \in [a, b]$ con $a \neq -1$ y $b \neq 1$



- Transformación lineal entre $\xi \in [-1, 1]$ y $x \in [a, b]$

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)\xi + \left(\frac{b+a}{2}\right); \qquad J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{b-a}{2}$$

- Simple regla de la cadena

$$\boldsymbol{f}' = \underbrace{(\boldsymbol{D}_{N-1}\boldsymbol{y})}_{\partial f \partial \xi} \underbrace{\left(\frac{1}{J}\right)}_{\partial \xi / \partial x}$$

Índice

Trapecio

- Regla del **trapecio múltiple**:

 1. Dividir $[a, b]$ en n subintervalos:

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx$$

 2. La **aproximación numérica** de cada I_k se denota $I_{k,n}$ ($I_{k,n} \approx I_k$), y se calcula como:

$$I_{k,n} = \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right) \big(f(x_k) + f(x_{k+1}) \big)$$

 2. Para **puntos equidistantes** de cada $h = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$:

$$I = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

Simpson 1/3

- Regla de **Simpson 1/3 múltiple**:

1. Dividir $[a, b]$ en $n = 2m$ subintervalos:

$$I = \sum_{k=0}^{m-1} I_k = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\, dx$$

2. La **aproximación numérica** de cada I_k se denota $I_{k,n}$ ($I_{k,n} \approx I_k$), y se calcula como:

$$I_{k,n} = \left(\frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}\right) \Big(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\Big)$$

3. Para **puntos equidistantes** con $h = \frac{b-a}{2m}$:

$$I = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2k})\right)$$

Gauss

- Regla **Gauss**:

1. Elegir n el número de subintervalos en $[a, b]$ y calcular los pesos w_k y nodos ξ_k, usando para ello la función **gauss.m**.
2. Transformación en el intervalo $[a, b]$:

$$x(\xi) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\xi + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$x_k = x\left(\xi_k\right)$$

3. Cambio de variable en integración:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x(\xi))\,\frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi}\,d\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\,d\xi$$

4. La **aproximación numérica** de I se denota por I_n, y se calcula como:

$$I_n = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

Clenshaw-Curtis

- Regla **Clenshaw-Curtis**:

  1. El mismo esquema que para la cuadratura de Gauss, usando en este caso los pesos w_k y nodos χ, usando para ello la función **clencurt.m**.

Funciones de 1 variable

- **quad**: Cuadratura gaussiana.
  q = quad(f,a,b,tol);
  [q,ier,nfun,err] = quad(f,a,b,tol);
- **quadv**: Regla de Simpson adaptativa.
  q = quadv(f,a,b);
  [q,nfun] = quad(f,a,b,tol,trace);
- **quadcc**: Regla de Clenshaw-Curtis.
  q = quadcc(f,a,b);
  [q,err,nr_points] = quad(f,a,b,tol);
- **integral**:
  q = integral(f,a,b);
  q = integral(f,a,b,prop,val,...); prop: "AbsTol", "RelTol"
- **trapz**: Regla del trapecio.
  q = trapz(y); q = trapz(x,y);
- **Integrales dobles**:
  dblquad(f,xa,xb,ya,yb); quad2d(f,xa,xb,ya,yb); integral2(f,xa,xb,ya,yb);
- **Integrales triples**:
  triplequad(f,xa,xb,ya,yb,za,zb); integral3(f,xa,xb,ya,yb,za,zb);