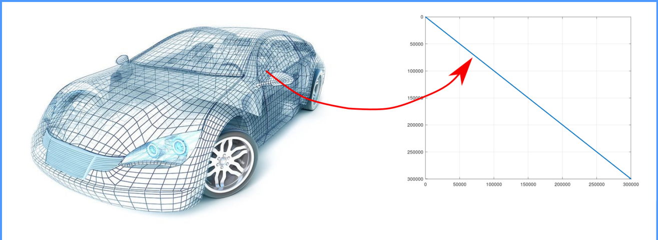
Resolución de Sistemas de Ecuaciones



Rogelio Ortigosa Martínez
Silvestre Paredes Hernández
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, UPCT

Índice

Índice

Bloque 1 (I)

- Creación de la matriz **Toeplitz**: presentamos la matriz.

Columnas

$$
\text{Filas}\quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & \;\;2 & \;\;3 & \;\;4 & \;\;5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Bloque 1 (II)

- Creación de la matriz **Toeplitz**: introducimos en Octave la primera y la última filas.

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Columnas} \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\text{Filas} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \text{Columnas} \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\text{Filas} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Bloque 1 (III)

- Creación de la matriz **Toeplitz**: introducimos el resto de filas intermedias que contienen el vector fila $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Filas}\quad\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\overset{\text{Columnas}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$\text{Filas}\quad\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\overset{\text{Columnas}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$\text{Filas}\quad\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\overset{\text{Columnas}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Bloque 1 (IV)

- Programación en Octave:

```
%-----------------------------------------
%-----------------------------------------
% Esta función crea la matriz de Toeplitz
% vista en teoría de cualquier tamaño en
% formato full
%-----------------------------------------
%-----------------------------------------
function K  =  MyToeplitz(n)

K        =  zeros(n); % Crea matriz cuadrada nxn
%------------------------------
% Introducimos primera fila
%------------------------------
K(1,1)   =  2;
K(1,2)   =  -1;
%------------------------------
% Introducimos última fila
%------------------------------
K(n,n)   =  2;
K(n,n-1) =  -1;
%------------------------------
% Introducimos filas intermedias
%------------------------------
for i=2:n-1
    K(i,i-1)  =  -1;
    K(i,i)    =  2;
    K(i,i+1)  =  -1;
end
end
```

Bloque 1 (V)

- Creación de la matriz **Toeplitz** en formato **sparse**

$$
\begin{array}{c c}
 & \text{Columnas} \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\text{Filas} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{FilaIndex} &= [[1 \quad 1]\ [2 \quad 2 \quad 2]\ [3 \quad 3 \quad 3]\ [4 \quad 4 \quad 4]\ [5 \quad 5]] \\
\textbf{ColumnIndex} &= [[1 \quad 2]\ [1 \quad 2 \quad 3]\ [2 \quad 3 \quad 4]\ [3 \quad 4 \quad 5]\ [4 \quad 5]] \\
\textbf{Data} &= [[2 \quad -1]\ [-1 \quad 2 \quad -1]\ [-1 \quad 2 \quad -1]\ [-1 \quad 2 \quad -1]\ [-1 \quad 2]] \\
\textbf{Index} &= [[1 \quad 2]\ [3 \quad 4 \quad 5]\ [6 \quad 7 \quad 8]\ [9 \quad 10 \quad 11]\ [12 \quad 13]]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{1} \quad \boxed{2 + 3 \cdot (2-2) + 1} \quad \boxed{2 + 3 \cdot (3-2) + 1} \qquad \boxed{2 + 3 \cdot (5-2) + 1}
$$

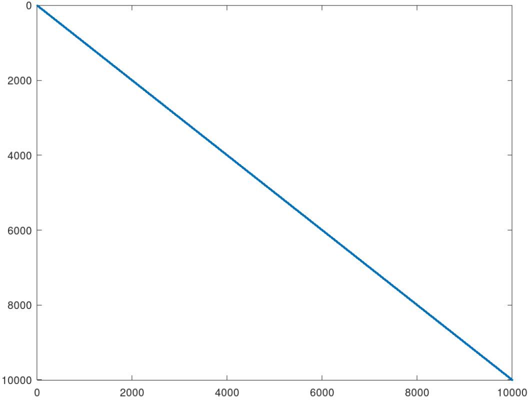
Bloque 1 (VI)

- Programación en Octave:

```
%-------------------------------------------
% This function creates the Toeplitz matriz in sparse format
%-------------------------------------------
function K  =  MyToeplitzSparse(n)

RowIndex     =  zeros(3*(n-2) + 4,1);  % Inicializamos Fila index
ColumnIndex  =  zeros(3*(n-2) + 4,1);  % Inicializamos Columna index
Data         =  zeros(3*(n-2) + 4,1);  % Inicializamos vector de datos

RowIndex(1:2)                        =  [1;1]; % Introducimos Fila index para
                                               % los dos primeros términos
ColumnIndex(1:2)                     =  [1;2]; % Introducimos Columna indexpara
                                               % los dos primeros términos
RowIndex(2+3*(n-2)+1:2+3*(n-2)+2)    =  [n;n]; % Introducimos Fila index para
                                               % los dos últimos términos
ColumnIndex(2+3*(n-2)+1:2+3*(n-2)+2) =  [n-1;n];% Introducimos Columna indexpara
                                               % los dos últimos términos
Data(1:2)                            =  [2;-1]; % Introducimos datos para
                                                % los dos primeros términos
Data(2+3*(n-2)+1:2+3*(n-2)+2)        =  [-1;2]; % Introducimos datos para
                                               % los dos últimos términos
for inode=2:n-1
  RowIndex(2+3*(inode-2)+1)  =  inode;
  RowIndex(2+3*(inode-2)+2)  =  inode;
  RowIndex(2+3*(inode-2)+3)  =  inode;

  ColumnIndex(2+3*(inode-2)+1)  =  inode-1;
  ColumnIndex(2+3*(inode-2)+2)  =  inode;
  ColumnIndex(2+3*(inode-2)+3)  =  inode+1;

  Data(2+3*(inode-2)+1)     =  -1;
  Data(2+3*(inode-2)+2)     =  2;
  Data(2+3*(inode-2)+3)     =  -1;
end

K  =  sparse(RowIndex,ColumnIndex,Data,n,n);
end
```

Bloque 1 (VII)

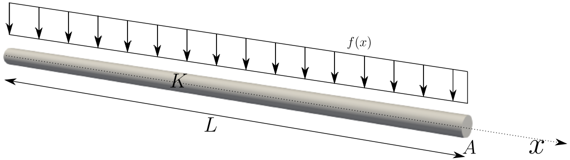
- Vemos la matriz sparse mediante el comando **spy**:



Índice

Bloque 2 (I)

- **Problema físico**:



- Deformación elástica de cuerda

$K \equiv$ Constante elástica de la cuerda
$A \equiv$ Área de la cuerda
$f \equiv$ fuerza por unidad de longitud
$u \equiv$ desplazamiento vertical de la cuerda

- Transmisión del calor en barra

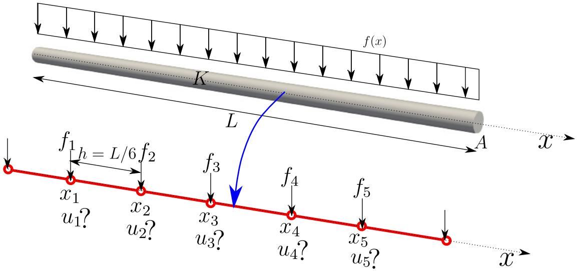
$K \equiv$ Conductividad térmica de la barra
$A \equiv$ Área de la barra
$f \equiv$ flujo de calor por unidad de longitud
$u \equiv$ temperature a lo largo de la barra

- **Modelo matemático**: problema de condiciones de contorno

$$\begin{aligned} -KA\frac{d^2u(x)}{dx^2} &= f(x) \qquad \text{en } x \in [0, L] \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{aligned}$$

Bloque 2 (II)

- Del problema físico a su versión discreta:



- Vector que aproxima la solución $\boldsymbol{u}$ y vector $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{bmatrix}^T; \qquad u_i \approx u(x_i)$$

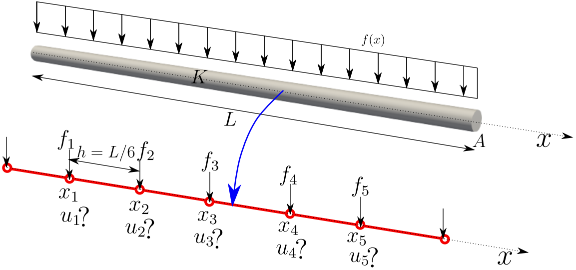
$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{bmatrix}^T; \qquad f_i = f(x_i)$$

- Aproximación de la derivada segunda:

$$\boxed{\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} \approx \frac{d^2u_i}{dx^2} = \frac{-1}{h^2}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right)}$$

Bloque 2 (III)

- Del problema físico a su versión discreta:



- **Modelo discreto**: forma discreta del problema de condiciones de contorno

$$KA \begin{bmatrix} -\frac{d^2u_1}{dx^2} \\ -\frac{d^2u_2}{dx^2} \\ -\frac{d^2u_3}{dx^2} \\ -\frac{d^2u_4}{dx^2} \\ -\frac{d^2u_5}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = 0 \qquad u_6 = 0$$

Bloque 2 (IV)

- **Modelo discreto**: forma discreta del problema de condiciones de contorno

$$\frac{KA}{h^2}\begin{bmatrix} -\cancel{u_0}^{\,0} + 2u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 \\ -u_2 + 2u_3 - u_4 \\ -u_3 + 2u_4 - u_5 \\ -u_4 + 2u_5 - \cancel{u_6}^{\,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

- **Modelo discreto**: sistema de ecuaciones asociado

$$\frac{KA}{h^2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Toeplitz } \boldsymbol{K}_5}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

- **Modelo discreto**: forma compacta del sistema de ecuaciones asociado

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}; \qquad \boldsymbol{K} = \frac{KA}{h^2}\boldsymbol{K}_5$$

Índice

Bloque 3 (I)

- Problema particular: **modelo matemático**

$$\boxed{\begin{aligned} -KA\frac{d^2u}{dx^2} &= -2; \qquad KA = 1 \\ u(0) &= 0; \\ u(1) &= 0; \end{aligned}}$$

- **Modelo discreto**: sistema de ecuaciones asociado (para $n = 5$)

$$\frac{1}{h^2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Toeplitz } \boldsymbol{K_5}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

Bloque 3 (II)

- Rutina de comparación de tiempos para distintos tamaños de la matriz K_n

```
n              =  [5;10;15;20;100;200];  %  número de nodos de la discretización
h              =  1./(n+1);  %  espacio entre nodos
%-------------------------------------------------------------------------------
% Solución basada en solver directo
%-------------------------------------------------------------------------------
tdirect  =  zeros(length(n),1);
for isize=1:length(n)
fprintf('%d\n',isize)
tic;
for i=1:1e3
K              =  (1/h(isize)^2)*MyToeplitzSparseTest(n(isize));
f              =  -2*ones(n(isize),1);
xdirect        =  K\f;
end
tdirect(isize)=toc;  %  tiempo empleado en resolver 1e3 veces el problema
%                       mediante solver directo de Octave para cada tamaño isize
end

%-------------------------------------------------------------------------------
% Solución basada en inversa de la matriz
%-------------------------------------------------------------------------------
tinverse  =  zeros(length(n),1);
for isize=1:length(n)
fprintf('%d\n',isize)
tic;
for i=1:1e3
K              =  (1/h(isize)^2)*MyToeplitzSparseTest(n(isize));
f              =  -2*ones(n(isize),1);
xdirect        =  inv(K)*f;
end
tinverse(isize)=toc; %  tiempo empleado en resolver 1e3 veces el problema
%                       mediante cálculo de la inversa para cada tamaño isize
end
```

Bloque 3 (III)

- Comparativa de tiempos

Tiempo (s) en resolver $Ku = f$, 10^3 veces		
Tamaño de la matriz (n)	Solver directo Octave	Cálculo de inversa (**inv**)
5	0.2094	0.1946
10	0.3079	0.3387
15	0.4426	0.4887
20	0.5796	0.6560
100	2.6784	5.9666
200	**5.3042**	**27.7764**

Índice

Bloque 4 (I)

- Problema particular: **modelo matemático**

$$\boxed{\begin{aligned} -KA\frac{d^2u}{dx^2} &= -2; \qquad KA = 1 \\ u(0) &= 0; \\ u(1) &= 0; \end{aligned}}$$

- **Modelo discreto**: sistema de ecuaciones asociado (para $n = 5$)

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Toeplitz } \boldsymbol{K_5}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

- **El modelo discreto aproxima perfectamente al modelo continuo**: en ausencia de errores de redondeo se tiene que $u_i = u(x_i),\ i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con

$$\boxed{u(x) = x^2 - x}$$

Bloque 4 (II)

- Rutina de cálculo de los errores relativos a medida que el tamaño de K crece

```
clc;
clear all;

sizes               =  [1e1];
sizes               =  [4+1;1e2+1;1e3+1;1e4+1;1e5+1];
condK               =  zeros(length(sizes),1);
error               =  zeros(length(sizes),1);
for isize=1:length(sizes)
    fprintf('%d\n',isize)
    n               =  sizes(isize);
    h               =  1/(n+1);
    K               =  (1/h^2)*MyToeplitzSparseTest(n);
    f               =  -2*ones(n,1);
    %V(ceil(n/2))   =  1;
    %condK(isize)   =  cond(K(2:end-1,2:end-1));
    %-----------------------------------
    % Número de condición de matriz K de acuerdo a teoría
    %-----------------------------------
    condK(isize)    =  4/pi^2*(n+1)^2;
    %-----------------------------------
    % Error relativo de en la solución
    %-----------------------------------
    xapprox         =  K\f;
    x               =  (linspace(0,1,n+2))';
    x(1)            =  [];
    x(end)          =  [];
    xexact          =  x.*(x-1);
    error(isize)    =  norm(xapprox - xexact)/norm(xexact);
endfor
```

Bloque 4 (III)

- Vector de soluciones exactas $\boldsymbol{u}^{exact}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{exact} &= \begin{bmatrix} u(x_1) & u(x_2) & \dots & u(x_n) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1 & x_2^2 - x_2 & \dots & x_n^2 - x_n \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 - \frac{1}{n+1} & \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 - \frac{2}{n+1} & \dots & \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \frac{n}{n+1} \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

- Vector de soluciones aproximadas $\boldsymbol{u}$. Resultado de resolver $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, con

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T$$

- La teoría predice que

$$\boxed{\frac{||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{exact}||}{||\boldsymbol{u}^{exact}||} \leq c(\boldsymbol{K}) \quad \underbrace{\frac{||\Delta \boldsymbol{f}||}{||\boldsymbol{f}||}}_{\varepsilon = 2.22 \times 10^{-16}}}$$

- Es decir, deberíamos perder en principio $\log_{10}(c(\boldsymbol{K}))$ cifras decimales

Bloque 4 (IV)

- Errores relativos para n creciente predichos por la teoría

$\frac{\|\|u-u^{exact}\|\|}{\|\|u^{exact}\|\|}$ **para distintos tamaños** n		
Tamaño de la matriz (n)	$c(K) \approx \frac{4}{\pi^2}(n+1)^2$	Cifras perdidas $\approx \log_{10}(c(K))$
5	1.459025044449664e+01	1
101	4.216582378459529e+03	3
1001	4.069074946465668e+05	5
10001	4.054468646745683e+07	7
100001	4.053009461208477e+09	9

- Comparativa de errores relativos calculados en el ordenador

$\frac{\|\|u-u^{exact}\|\|}{\|\|u^{exact}\|\|}$ **para distintos tamaños** n		
Tamaño de la matriz (n)	$\frac{\|\|u-u^{exact}\|\|}{\|\|u^{exact}\|\|}$	Cifras perdidas
5	2.059203177870142e-16	0
101	2.242319130407547e-15	1
1001	1.963243496754310e-13	3
10001	5.225827692633837e-12	4
100001	3.373038250463008e-10	6