512103005 - Cálculo Numérico - Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
24 de enero de 2021
Segundo Parcial - Duración: 120 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI/NIE:

Firma:

TIPO EXAMEN:
☐ PRIMER PARCIAL ☒ SEGUNDO PARCIAL ☐ PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS:

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz o en color rojo. Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico ser puntuada con un 0, recuerda que puedes utilizar todo los folios que necesites.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba ser motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE: Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyabn todos los cálculos realizados serán puntuados con** 0.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.

A. SEGUNDO PARCIAL

1. Considera la siguiente integral

$$I = \int_1^3 x \ln x \, dx$$

Sabemos que la solución exacta de la integral anterior, haciendo integración por partes, es

$$I = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_1^3 = 2.94376$$

Se pide:

a) (**0.75 puntos**) Considera una partición del intervalo $[1, 3]$ en 4 sub-intervalos de igual tamaño. Obtén una aproximación numérica de la integral I utilizando la regla del trapecio compuesta.

b) (**0.75 puntos**) Para la misma partición que en el apartado anterior, obtén una aproximación numérica de I utilizando la regla de Simpson compuesta.

c) (**0.25 puntos**) Calcula el error absoluto de los resultados obtenidos en los apartados a) y b). Justifica debidamente por qué el resultado obtenido en el apartado b) conduce a una mejor aproximación que el obtenido en a).

c) (**1 puntos**) Considera una partición del intervalo $[1, 3]$ en 2 sub-intervalos de igual tamaño. Utiliza, en cada sub-intervalo, una regla de cuadratura de Gauss que permita integrar de forma exacta polinomios de grado 3. Para ello, selecciona de forma justificada, la regla de cuadratura de entre las proporcionadas en Tabla 1.

ξ	w
-0.5773	1
0.5773	1

ξ	w
-0.7746	5/9
0	8/9
0.7746	5/9

ξ	w
-0.8611	0.3478
-0.3399	0.6521
0.3399	0.6521
0.8611	0.3478

Table 1: Regla de cuadratura para 2, 3 y 4 puntos de Gauss. Localización de los nodos de Gauss ξ y pesos correspondientes w.

2. Considera el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} &y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = -(t+1); \qquad t \geq 0 \\ &y(0) = 0 \\ &y'(0) = 0 \end{aligned}$$

a) (**0.25 puntos**) Transforma el problema de condiciones iniciales asociado a la ecuación diferencial anterior (de segundo orden) en un problema de condiciones iniciales asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

b) (**1.5 puntos**) Obtén una aproximación numérica de la solución $y(t)$ en el intervalo $[0, 4]$ considerando 2 sub-intervalos de igual tamaño. Para ello, utiliza el método de Euler explícito (Forward-Euler).

c) (**0.25 puntos**) Determina de forma justificada si la discretización considerada en *b*) conduce a una aproximación estable.

d) (**1.5 puntos**) Para la misma partición de $[0, 4]$ que en el apartado *b*), obtén una solución numérica utilizando el método de Euler implícito (Backward-Euler).

e) (**0.25 puntos**) ¿La solución obtenida en *d*) es estable? Razona tu respuesta. Podríamos utilizar cualquier discretización para Backward-Euler si además de estabilidad buscamos precisión de la solución aproximada? Relaciona tu respuesta con la velocidad de convergencia de Backward-Euler.

3. Dada la ecuación en derivadas parciales con condiciones iniciales y de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \qquad x \in [0, 6]; \qquad t \geq 0 \\ &u(0) = 0 \\ &u(6) = 1 \\ &u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 1 \end{aligned}$$

Considera una discretización de $x \in [0, 6]$ en 3 sub-intervalos equi-espaciados. Considera 2 intervalos de tiempo equi-espaciados separados por Δt.

a) (**0.25 puntos**) Determina el valor de Δt para que la discretización resultante sea estable si utilizáramos el método explícito de Euler (Forward-Euler).

b) (**1.5 puntos**) Calcula el resultado numérico del problema utilizando Forward-Euler con el valor de Δt que te resulte más cómodo, siempre y cuando verifique la condición de estabilidad en *a*).

c) (**1.75 puntos**) Calcula una solución numérica por medio de Backward-Euler, utilizando la misma discretización espacial que en el apartado *b*) pero con un Δt tal que el número de Courant sea 1, para los instantes de tiempo $t = \Delta t$ y $t = 2\Delta t$.