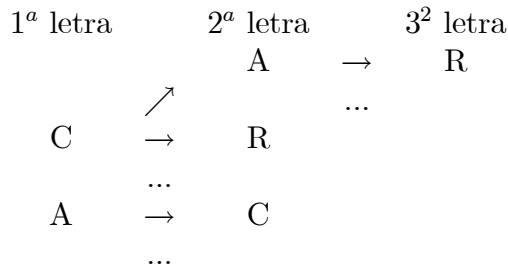


Combinatoria o reglas de conteo

En ocasiones no es sencillo el contar el número de casos favorables o el número de casos posibles. La ciencia que estudia las reglas de conteo se denomina Combinatoria.

1. Variaciones sin repetición: ¿Cuántas palabras pueden formarse escogiendo 3 letras de las que forman la palabra CARLOS? Para resolver este problema podemos simplificarlo, estudiando primero cuántas palabras de una letra se pueden formar: C,A,R,L,O,S (6), cuántas de dos letras, etc... hasta obtener una formula general. Nos pueden ser de ayuda los diagramas en forma de árbol



Así se obtiene que con sólo una letra tenemos 6 palabras distintas, con dos, $6 \cdot 5 = 30$ palabras distintas y con tres, $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, etc... ya que una vez colocada la primera letra sólo tenemos cinco opciones para la segunda y colocadas las dos primeras letras, sólo tenemos cuatro opciones para la tercera. Intente obtener el número de palabras de longitud m que pueden formarse con n letras (símbolos) diferentes. La solución es

$$V_{n,m} = n(n-1) \underbrace{\dots}_{m - \text{números}} = n(n-1)\dots(n-m+1)$$

donde la letra V proviene de **Variaciones**, que es el nombre que reciben estas formaciones caracterizadas por el hecho de que en ellas influye el orden en que se coloquen los símbolos, de forma que la palabra CAR es diferente de la palabra CRA.

2. Permutaciones sin repetición: Un caso particular de variaciones son aquellas en las que intervienen todos los símbolos ($n = m$), denominadas **Permutaciones**, cuyo número será

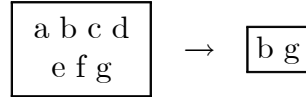
$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)\dots 1 = n!$$

donde $n!$, se lee como ene factorial y es simplemente una forma de representar la multiplicación $n(n-1)\dots 1$. Con esta notación se tiene $V_{n,m} = n!/(n-m)!$.

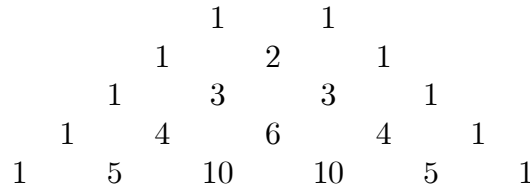
Veamos un ejemplo, ¿Cuántas palabras pueden formarse permutando (cambiando) las letras de la palabra CARLOS? La solución es:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

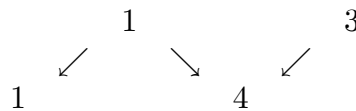
3. Combinaciones sin repetición: Existen otro tipo de problemas donde el orden no tiene importancia, por ejemplo si tenemos que escoger a dos ingenieros para trabajar en nuestra empresa de entre siete candidatos, ¿cuántas opciones diferentes tenemos? Este problema consiste en elegir un subconjunto de dos personas de un conjunto formado por los siete candidatos:



De nuevo para resolver el problema, estudiaremos primero otros más simples. Primero supongamos que tenemos un conjunto con un sólo elemento $\{a\}$, que tendrá 1 subconjunto con cero elementos (el vacío \emptyset) y otro con un elemento $\{a\}$. Si el conjunto tiene dos elementos $\{a,b\}$, tendrá 1 con cero elementos, 2 ($\{a\}$ y $\{b\}$) con un elemento, y 1 ($\{a,b\}$) con dos elementos. Para $\{a,b,c\}$ se obtienen 1,3,3,1, para $\{a,b,c,d\}$, 1,4,6,4,1, etc... Estos números pueden escribirse de la forma siguiente:



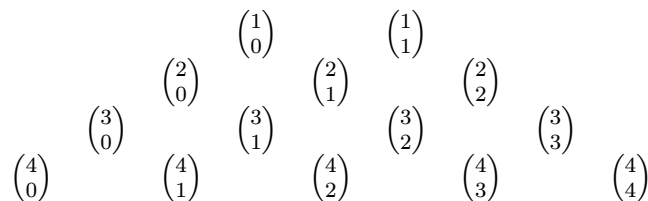
Obsérvese que los números de una fila se obtienen sumando los situados justamente encima de él.



Estos números reciben el nombre de números combinatorios y esta forma de presentarlos es conocida como el triángulo de Pascal o de Tartaglia. Puede comprobarse que el número que aparece en la fila n en la posición $m + 1$, que representaremos mediante $\binom{n}{m}$ (n sobre m), verifica

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Por ejemplo, $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Por convenio, se define $0! = 1$ para que $\binom{4}{0} = \frac{4!}{4!0!} = 1$. Es decir, el triángulo de Pascal estaría formado por



Con la notación introducida se tendría que el número de combinaciones de n elementos tomados de m en m es

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{V_{n,m}}{m!}$$

fórmula que puede deducirse teniendo en cuenta que de cada combinación $\{1,\dots,m\}$ se obtienen $m!$ variaciones permutando los símbolos entre sí (123...m, 213...m, etc...).

Los números combinatorios aparecen al calcular las diferentes potencias de un binomio, $(a + b)^1 = a + b$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, etc... y en lo que se conoce como fórmula de Newton

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Si en esta fórmula hacemos $a = 1$ y $b = 1$ se obtiene que

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

es decir, que el número de los subconjuntos (de cualquier tamaño, incluido el vacío) de un conjunto con n elementos es igual a 2^n (e igual a la suma de la fila n -ésima del triángulo de Pascal).

Por fin volveremos a nuestro problema original que consistía en elegir a dos personas entre siete candidatos, para el que tendremos

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

opciones diferentes. Si reformulamos el problema de forma que podamos elegir a los candidatos que queramos (desde ninguno, \emptyset , a todos), las opciones serán

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = (1 + 1)^7 = 2^7$$

Este problema puede resolverse de otra forma. Para el primer candidato tenemos dos opciones, elegirlo o no elegirlo, para el segundo lo mismo, etc... Así la decisión se podría escribir de la forma siguiente 0110011, donde el primer cero indica que el primer candidato no es elegido, el segundo dígito (1) indica que el segundo sí es elegido y así sucesivamente. Entonces nuestro problema sería estudiar cuántas palabras (números) de longitud 7 pueden formarse con dos símbolos (0 y 1). Formando un diagrama de árbol, como para cada posición tendremos dos opciones, en total se podrán formar 2^7 palabras distintas.

4. Variaciones con repetición: También podemos estudiar **cuántas palabras de m letras pueden formarse con las letras de CARLOS pero permitiéndose que éstas se repitan.** Comenzaremos por las palabras formadas por una sola letra para las que tendremos 6 opciones. Para las de dos letras tendremos 36, etc... y en general se tendrán 6^m , donde m indica la longitud de las palabras (m puede ser mayor que 6).

En general, con n símbolos distintos ¿Cuántas palabras de longitud m se podrán formar? Estas formaciones reciben el nombre de **Variaciones con Repetición** y su número es

$$VR_{n,m} = n^m$$

5. Permutaciones con repetición: Supongamos ahora que estamos participando en el juego de las palabras cruzadas y que **disponemos de las letras A,S,R,Q,A,A,S.** ¿Cuántas palabras podemos formar usándolas todas? El problema es equivalente

a estudiar cuántas palabras se pueden formar permutando (cambiando de orden) las letras de CASA. Si todas las letras fuesen distintas (COSA) tendríamos $P_4 = 4! = 24$ opciones. Pero al tener dos letras repetidas (A,A), cuando las permutemos obtendremos la misma palabra. De forma que de COSA y CASO, se obtiene sólo CASA. De esta forma se obtiene que con CASA se podrán formar $24/2=12$ palabras distintas. ¿Que ocurrirá con las letras CAAAS? ¿Y con CASAS? Estúdiense estos problemas hasta deducirse la siguiente fórmula general. El número de palabras de longitud n que pueden formarse con n letras, donde la primera se repite n_1 veces, la segunda n_2 , etc... se denomina Permutaciones con Repetición y su número es:

$$PR_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Usando esta formula general se obtiene que con CAAAS, pueden formarse

$$PR_{1,3,1}^5 = \frac{5!}{1!3!1!} = 20$$

palabras distintas, con CASAS,

$$PR_{1,2,2}^5 = \frac{5!}{1!2!2!} = 30,$$

y con A, S, R, Q, A, A, S,

$$PR_{3,2,1,1}^7 = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

palabras distintas.

6. Combinaciones con repetición: Por último estudiaremos las formaciones denominadas Combinaciones con Repetición. Introduciremos el problema con un ejemplo. **Supongamos que el capitán de un barco puede cargar 5 contenedores. Puede elegir entre tres mercancías diferentes: transistores, ordenadores o cintas de vídeo, habiendo en el puerto existencias suficientes de las tres ¿Cuántas opciones tiene?** [COMBINACIONES CON REPETICIÓN]. Una opción sería cargar sólo transistores {TTTTT}, otra dos de transistores y tres de ordenadores {T,T,T,O,O}, etc... Se trata de calcular el número de subconjuntos de 5 elementos que pueden formarse con los elementos de {T,O,C} permitiéndose la repetición de éstos. En general el número de combinaciones con repetición que pueden formarse con n elementos tomados de m en m es:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$$

De esta forma la solución del problema anterior sería

$$CR_{3,5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$