# Prácticas de Algebra con Mathematica (Ingeniería Industrial). Parte I.

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

# Índice General

# Capítulo 1

# PRACTICAS CON MATHEMATICA

## 1.1 Introducción a Mathematica

*Mathematica* es un programa que permite hacer cálculos matemáticos complicados con gran rapidez. Para entendernos, es como una calculadora gigante a la que no sólo podemos pedirle que haga cálculos numéricos, sino que también hace derivadas, cálculo de primitivas, representación gráfica de curvas y superficies, etcétera.

Abordaremos en esta práctica una iniciación a Mathematica partiendo desde cero, intentando poner de manifiesto su utilidad a la hora de trabajar con expresiones matemáticas complicadas, bien sean éstas numéricas o simbólicas, permitiendo hacer operaciones en poco coste de tiempo y con bastante facilidad.

Pretendemos con esta práctica introducir al alumno en el manejo de este potente programa que puede servirle de utilidad en futuros cálculos que deba realizar. Esencialmente vamos a aprender a utilizar el programa, por lo que esta práctica trata de explicar como pedirle a Mathematica que haga aquello que nosotros deseamos. Además, el programa puede utilizarse para corregir los problemas propuestos al alumno en la clase de problemas.

A pesar de la utilidad del programa, debemos hacer hincapié en el hecho de que es necesario por parte del alumno un conocimiento matemático teórico de todas las funciones y sentencias que vamos a usar. Por ejemplo, aunque una calculadora multiplica números con suma facilidad, sólo nos percatamos de su potencia en cuanto conocemos dicha operación y somos capaces de realizarla de un modo mucho más lento. Con Mathematica ocurre lo mismo. Sólo conociendo teóricamente las operaciones que Mathematica realiza nos percataremos de su utilidad.

## 1.2 Preliminares

Cuando se arranca Mathematica, aparece una pantalla blanca vacía. En ella podemos escribir aquellas operaciones que queremos que realice. Una vez tecleada la operación, hemos de pulsar las teclas *shift + enter* para obtener el resultado. Por ejemplo, supongamos que queremos hacer la operación $2+2$. Teclearemos entonces

$$2+2$$

en la pantalla. A continuación pulsamos *mayúsculas + enter* o la tecla *intro* en el teclado numérico y a continuación aparecerá en pantalla

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[1] &:= 2+2 \\ \mathrm{Out}[1] &= 4. \end{aligned}$$

Todas las operaciones realizadas por el programa cuando se pulsan las teclas mayúsculas + enter tienen asignadas un número de entrada marcado por In[·] y el mismo número de salida cuando se realiza la operación marcado por Out[·]. Podrá aparecer únicamente un nú mero de entrada, como veremos posteriormente. Al ir explicando las diferentes operaciones que Mathematica realiza, iremos escribiéndolas en la forma en que el programa lo escribe en la pantalla de ordenador.

Además de la suma se pueden realizar las siguientes operaciones algebraicas como si se tratara de una calculadora:

| | |
|---|---|
| $x+y$ | suma de números |
| $x-y$ | resta de números |
| $x/y$ | división de números |
| $x\ y$ $x*y$ | producto de números |
| $x\hat{}y$ | potencia $x^y$ |

Cuando Mathematica realiza alguna de las siguientes operaciones, por ejemplo $1/3+2/7$, operará estos números ofreciendo siempre su valor exacto, es decir, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[2] &:= 1/3+2/7 \\ \mathrm{Out}[2] &= \frac{13}{21}. \end{aligned}$$

Sin embargo, a veces nos es más útil tener el valor de este número expresado con cifras decimales. Para ello se tienen las sentencias

$$x//\mathrm{N} \ \mathrm{N}[x]$$
$$\mathrm{N}[x, n].$$

Las primeras escriben el número $x$ con seis cifras significativas, mientras que la segunda escribe dicho número con un número $n$ de cifras significativas que nosotros prefijamos (en la versión 4.0 del programa y posteriores esta última sentencia no siempre funciona del modo deseado). Por ejemplo, si escribimos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[3] &:= 1/3 + 2/7 \ //\mathrm{N} \\ \mathrm{Out}[3] &= 0.619048, \end{aligned}$$

obtendremos el resultado con 6 cifras significativas. Si por el contrario escribimos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[4] &:= N[1/3 + 2/7, 10] \\ \mathrm{Out}[4] &= 0.619047619 \end{aligned}$$

lo obtendremos con un número 10 cifras significativas.

En caso de las operaciones numéricas también tendremos una valor numérico aproximado con seis cifras significativas si en la operación escribimos algún número en forma decimal. Así, al teclear

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[5] &:= 1./3 + 2/7 \\ \mathrm{Out}[5] &= 0.619048. \end{aligned}$$

Mathematica distingue así entre operaciones algebraicas exactas y operaciones numéricas aproximadas.

### 1.2.1 Paréntesis, corchetes y llaves

Mathematica distingue entre paréntesis, corchetes y llaves. Cada uno de estos elementos realiza una labor bien diferenciada en la estructura interna del programa. A grosso modo podemos indicar las siguientes generalidades:

- Los paréntesis se usan en las operaciones algebraicas para indicar la preferencia a la hora de hacer las operaciones. Así el paréntesis de

$$\begin{aligned} \text{In}[6] &:= (1+3)/7 \\ \text{Out}[6] &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

  se usa para indicar que primero hacemos la suma 1+3 y luego dividimos entre 7. Hemos de señalar que Mathematica sigue el orden conocido de preferencia sobre las operaciones. Asi por ejemplo, si escribimos

$$\begin{aligned} \text{In}[7] &:= 1+3/7 \\ \text{Out}[7] &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

  vemos como el resultado cambia notablemente al realizarse en primer lugar la división y posteriormente la suma.

- Los corchetes $[\cdot]$ se usan para escribir el argumento de una función bien sea matemática, bien sea una operación específica del programa. Por ejemplo la función $\sin x$ se escribe Sin[x], y para escribir un número $x$ real con seis cifras significativas escribimos N[x].

- Las llaves $\{\cdot\}$ se utilizan para asignar valores numéricos a las variables, por ejemplo a la hora de calcular límites de funciones. También se usan para construir conjuntos o listas de objetos matemáticos, como por ejemplo matrices o vectores.

En general es conveniente tener claro en qué momento se han de emplear los paréntesis, los corchetes y las llaves, ya que si confundimos su uso y escribimos por ejemplo Sin{x} o Sin(x) en lugar de Sin[x], el programa nos lo hará saber mandándonos un mensaje de error de color azul.

**Actividad 1** *Realizar las siguientes operaciones con Mathematica:*

$$\textit{(a)}\ \tfrac{2.4+3^2}{4*7.2^2} \quad \textit{(b)}\ (2-3.1)^{23} \quad \textit{(c)}\ 3.75+8.987$$

$$\textit{(d)}\ (3+4*5)^{5.6} \quad \textit{(e)}\ \left(\frac{2.3*4}{2-4.5^2}\right)^{56} \quad \textit{(f)}\ 2\times 10^2+3\times 10^{-3}$$

$$\textit{(g)}\ (1+i)(3-i) \quad \textit{(h)}\ \frac{1+i}{3-i} \quad \textit{(i)}\ (1+i)^7$$

**Actividad 2** *Dar los resultados de la aplicación 1 con 15 cifras significativas.*

### 1.2.2 Errores

Puede ocurrir que al teclear una operación en Mathematica y pulsar las teclas mayúscular + enter, el programa nos devuelva una salida conteniendo frases de color azul. Esto ocurre cuando hay algún tipo de error o problema que el programa detecta. Estos errores pueden ser básicamente de dos tipos:

- Errores en la sintaxis de una sentencia. Por ejemplo al escribir $[1+2]*3$ en vez de $(1+2)*3$ o $\mathrm{N}(\pi)$ en vez de $\mathrm{N}[\pi]$.
- Errores producidos porque la expresión matemática o la operación realizada tiene algún problema, aunque esté bien escrita. Por ejemplo, si intentásemos calcular el determinante de una matriz no cuadrada.

Otras veces, el programa puede devolver un resultado erróneo aunque no nos escriba frases azules. Es decir el programa no detecta ningún error a pesar de que éste existe. Por ésto es necesario saber qué estamos esperando de la operación que hemos pedido que el programa nos haga para así criticar el resultado y valorarlo en su justa medida. No debeis nunca de olvidar que el programa calcula rápidamente, pero es tonto.

### 1.2.3 Funciones matemáticas de interés

Mathematica posee una serie de funciones matemáticas predefinidas que se escriben del siguiente modo:

| | |
|---|---|
| $\mathrm{Sqrt}[x] = \sqrt{x}$ | $\mathrm{Exp}[x] = e^x$ |
| $\mathrm{Log}[x] = \log x$ | $\mathrm{Log}[b, x] = \log_b x$ |
| $\mathrm{Sin}[x] = \sin x$ | $\mathrm{Cos}[x] = \cos x$ |
| $\mathrm{ArcSin}[x] = \arcsin x$ | $\mathrm{ArcCos}[x] = \arccos x$ |
| $\mathrm{Tan}[x] = \tan x$ | $\mathrm{ArcTan}[x] = \arctan x$ |
| $n! =$ factorial de $n$ | $\mathrm{Round}[x] =$ *parte entera de x* |
| $\mathrm{Abs}[x] = \lvert x\rvert$ | $\mathrm{FactorInteger}[n] =$ *factores primos de n* |

Es importante destacar que hemos de escribir las funciones tal y como se detalla en la anterior tabla, respetando la sintaxis totalmente. Mathematica distingue entre letras mayúsculas y minúsculas, y todas las funciones empiezan con letra mayúscula. Entonces podemos calcular

$$\begin{aligned}
\text{In}[7] &:= \text{Sqrt}[16] \\
\text{Out}[7] &= 4 \\
\text{In}[8] &:= \text{Sqrt}[2] \\
\text{Out}[8] &= \sqrt{2} \\
\text{In}[9] &:= \text{Sqrt}[2] \;//N \\
\text{Out}[9] &= 1.41421 \\
\text{In}[10] &:= \text{N}[\text{Sqrt}[7], 10] \\
\text{Out}[10] &= 2.6457513111.
\end{aligned}$$

Las constantes matemáticas más interesantes son:

$$\begin{aligned}
\text{Pi} &= \pi \simeq 3.14159 \\
\text{E} &= e \simeq 2.71828 \\
\text{Infinity} &= \infty \\
\text{I} &= i = \sqrt{-1} \\
\text{Degree} &= \textit{conversión de grados a radianes}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular el seno de 20 grados escribiríamos

$$\begin{aligned}
\text{In}[11] &:= \text{Sin}[20\ \text{Degree}] \;//\text{N} \\
\text{Out}[11] &= 0.34202.
\end{aligned}$$

Si quisiéramos mayor precisión en las anteriores constantes, debemos escribir

$$\begin{aligned}
\text{In}[12] &:= \text{N}[\text{Pi,10}] \\
\text{Out}[12] &= 3.1415926536,
\end{aligned}$$

que nos proporciona un valor del número $\pi$ con diez cifras decimales.

**Actividad 3** *Calcular los siguientes valores con 6 cifras significativas:*

$$\textit{(a)}\ \sin 30^\circ + \cos 15^\circ \quad \textit{(b)}\ \log_2 256 \quad \textit{(c)}\ e^{10!}$$

$$\textit{(d)}\ (\sin 1)^2 \quad \textit{(e)}\ \sqrt{\log 34 + e^{12}} \quad \textit{(f)}\ \left|\arcsin \tfrac{1}{2} + \tfrac{\log 2}{\sqrt{2}}\right|$$

### 1.2.4 Aprovechando cálculos anteriores

A veces es posible que tengamos que hacer una sucesión de cálculos consecutivos de manera que cada nueva operación se base en la anterior. Parece necesaria entonces una sentencia que nos remita a resultados anteriores sin tener que escribir la operación de nuevo. Dicha sentencia es %. Por ejemplo, si queremos calcular $\cos(\sin 20^\circ)$ tendríamos que calcular primero $\sin 20^\circ$, para después calcular el coseno de dicha cantidad. Esta operación podríamos hacerla del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{In}[13] &:= \text{Sin}[20\ \text{Degree}]\ //\text{N} \\ \text{Out}[13] &= 0.34202 \\ \text{In}[14] &:= \text{Cos}[\%] \\ \text{Out}[14] &= 0.942079. \end{aligned}$$

Aquí Cos[%] nos calcula el coseno del resultado obtenido en la salida 13. Para remitirnos a un resultado obtenido dos pasos antes debemos escribir %%, y para resultados obtenidos k pasos antes escribiremos k símbolos %. Para remitirnos a un resultado obtenido en la salida n podemos también escribir %n. Por ejemplo Cos[%13] también nos remite a la salida 13.

### 1.2.5 Definición de variables y funciones

Supongamos que tenemos que hacer una serie de cálculos en los cuales interviene repetidamente una constante, como por ejemplo la constante de la gravitación universal, o al estudiar valores particulares de la función $f(x) = (1.45)^x + \sin x$. Es útil entonces definir variables con estos valores y funciones nuevas para minimizar el tiempo de escritura y hacer las operaciones de forma más ágil.

Las variables pueden ser designadas por letras o por sucesiones de letras. Supongamos que queremos definir la constante de la gravitación universal $G = 6.67 \times 10^{-11}$ con Mathematica. Entonces deberíamos hacer

$$\begin{aligned} \text{In}[15] &:= G = 6.67 \times 10\hat{\ } - 11 \\ \text{Out}[15] &= 6.67 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

Si ahora tenemos dos cuerpos de masa 3 kilogramos separados a una distancia de 10 metros, la fuerza con la que se atraen dichos cuerpos se calcula

$$\text{In}[16] := G * 3\hat{\ }2/(10\hat{\ }2)$$

$$\text{Out}[16] \quad = \quad 6.003 \times 10^{-12}.$$

Para desposeer a $G$ de su valor debemos teclear

$$\text{In}[17] := G = .$$

o bien

$$\text{In}[18] := \text{Clear}[G].$$

Algunas letras están asignadas ya por defecto por Mathematica y no pueden ser utilizadas para definir variables. Una de ellas es N. Si intentásemos escribir N=2, el programa devolverá una sentencia azul de error.

A la hora de trabajar con variables en Mathematica, hemos de tener en cuenta las siguientes reglas. Si $x$ e $y$ son dos variables que hemos definido con anterioridad, entonces

- $x\ y$ representará el producto $x \cdot y$.
- $xy$ es una nueva variable formada por dos letras.
- $5x$ es el producto de 5 por $x$..
- $x\hat{}2y$ es el producto $x^2y$ y no $x^{2y}$.

Por otra parte, si en una misma línea queremos definir varias variables, o escribir varias expresiones debemos separar estas con ";". Por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{In}[19] &:= x = 1; y = 2; z = x + y \\ \text{Out}[19] &= 3. \end{aligned}$$

ha asignado el valor 1 a x, 2 a y y 3 a z, y sólo ha escrito el último valor. Si al final de la última expresión ponemos también ";" la operación no proporciona ninguna salida, es decir la expresión

$$\text{In}[20] := x = 1; y = 2; z = x + y;$$

no proporciona a continuación un Out[20] al pulsar mayúsculas + enter y asigna los mismos valores que en la sentencia anterior.

Para definir nuevas funciones hemos de usar la siguiente estructura:

$$\text{nombrefunción}[x_{1\_}, x_{2\_}, ..., x_{n\_}] := \text{expresión}.$$

El símbolo _ se usa para indicar que la letra que lo antecede es una variable de la función. Por ejemplo, para definir la función $f(x) = (1.45)^x + \sin x$ debemos escribir

$$\text{In}[21] := f[x\_] := 1.45\hat{\ }x + \text{Sin}[x].$$

Entonces si tecleamos

$$\begin{aligned} \text{In}[22] &:= f[1] \\ \text{Out}[22] &:= 3.18975. \end{aligned}$$

obtenemos el valor de dicha función en 1. Para eliminar la función debemos escribir

$$\text{In}[23] := \text{Clear}[f, x]$$

indicando tanto la variable como el nombre de la función.

## 1.3 Algebra lineal con Mathematica

Una vez introducidas ciertas generalidades sobre el programa, vamos a ver cómo podemos utilizar el éste para agilizar algunos cálculos relativos a los contenidos explicados en la parte teórica de la asignatura. Empezamos por álgebra lineal.

### 1.3.1 Vectores y matrices

Para escribir vectores de $\mathbb{K}^n$ debemos de introducir cada una de las componentes del mismo entre llaves, separándolas por comas. Así, el vector $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 5)$ de $\mathbb{R}^4$ se tecleará

$$\begin{aligned} \text{In}[23] &:= \mathbf{v} = \{1, 2, -1, 5\} \\ \text{Out}[23] &= \{1, 2, -1, 5\}. \end{aligned}$$

Las matrices se introducirán por filas como un vector de vectores. Así la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ se escribirá como

$$\begin{aligned} \text{In}[24] &:= \mathbf{M} = \{\{1, 2, -1\}, \{0, 3, 1\}\} \\ \text{Out}[24] &= \{\{1, 2, -1\}, \{0, 3, 1\}\}. \end{aligned}$$

Para visualizar la matriz del modo al que estamos acostumbrados tenemos la expresión

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{M}].$$

Así si escribimos con la anterior matriz aparecerá

$$\begin{aligned} \text{In}[25] &:= \text{MatrixForm}[\mathbf{M}] \\ \text{Out}[25] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para la matriz identidad de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tenemos asignado el nombre

$$\text{IdentityMatrix}[n],$$

y una matriz diagonal con elementos en la diagonal principal $d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}$ se puede escribir

$$\text{DiagonalMatrix}[\{d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}\}].$$

### 1.3.2 Operaciones con vectores

Dados dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y un número real $\lambda$, se definen con Mathematica las siguientes operaciones:

| | |
|---|---|
| $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ | suma de vectores |
| $\lambda * \mathbf{v}_1$ o $\lambda\mathbf{v}_1$ | multiplicaci n del vector $\mathbf{v}_1$ por $\lambda$ |
| Dot$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ | producto escalar de $\mathbf{v}_1$ por $\mathbf{v}_2$ |

Por ejemplo, si introducimos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ podemos calcular la suma de ambos, $2\mathbf{v}$ y el producto escalar de ambos vectores del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{In}[26] &:= \mathbf{v} = \{1, 2, 1\}; \mathbf{u} = \{0, 1, 0\}; \\ \text{In}[27] &:= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \text{Out}[28] &= \{1, 3, 1\} \\ \text{In}[29] &:= 2\mathbf{v} \\ \text{Out}[29] &= \{2, 4, 2\} \\ \text{In}[30] &:= \text{Dot}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ \text{Out}[30] &= 2. \end{aligned}$$

**Actividad 4** *Dados los vectores* $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$*,* $\mathbf{u} = (3, -1, 0, 2)$ *y* $\mathbf{w} = (2, 0, 0, 1)$ *calcular:*

$$\text{(a) } < \mathbf{w}, \mathbf{v} > \mathbf{u} \quad \text{(b) } \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} \quad \text{(c) } < 2\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} >$$

$$\text{(d) } \|\mathbf{w}\| \quad \text{(e) } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \text{(f) } \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

***Nota:*** *La expresión* $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ *denota el producto escalar de* $\mathbf{u}$ *por* $\mathbf{v}$*.*

### 1.3.3 Operaciones con matrices

Dadas dos matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ definidas en Mathematica, podemos realizar las siguientes operaciones con ellas, siempre que éstas puedan hacerse:

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ | suma de las matrices |
| $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ | producto de las matrices |
| $\lambda\mathbf{A}$ o $\lambda * \mathbf{A}$ | producto del número $\lambda$ por la matriz $\mathbf{A}$ |
| Transpose[$\mathbf{A}$] | traspuesta de $\mathbf{A}$ |
| Det[$\mathbf{A}$] | determinante de $\mathbf{A}$ |
| Inverse[$\mathbf{A}$] | inversa de $\mathbf{A}$ |

Si por ejemplo tenemos las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

podemos calcular su suma, producto, $\mathbf{A}^t$, $|\mathbf{A}|$ y $\mathbf{A}^{-1}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{In[31]} &:= \mathbf{A} = \{\{1, 2, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}\}; \\ \text{In[32]} &:= \mathbf{B} = \{\{2, 1, -1\}, \{0, -1, 0\}, \{1, 2, 3\}\}; \\ \text{In[33]} &:= \text{MatrixForm}[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \\ \text{Out[33]} &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{In[34]} &:= \text{MatrixForm}[\mathbf{A}.\mathbf{B}] \\
\text{Out[34]} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\text{In[35]} &:= \text{MatrixForm}[\text{Transpose}[\mathbf{A}]] \\
\text{Out[35]} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{In[36]} &:= \text{Det}[\mathbf{A}] \\
\text{Out[36]} &= -2 \\
\text{In[37]} &:= \text{MatrixForm}[\text{Inverse}[\mathbf{A}]] \\
\text{Out[37]} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**Actividad 5** *Dados las matrices* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *calcular:*

*(a)* $\mathbf{CAB}$ *(b)* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ *(c)* $(\mathbf{B}^t+\mathbf{C})$

*(d)* $\mathbf{CAB}^t\mathbf{D}^{-1}$ *(e)* $\mathbf{AD}^t\mathbf{B}^{-1}$ *(f)* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$

**Actividad 6** *Calcular el determinante de las siguientes matrices cuadradas*

*(a)* $\begin{vmatrix} 3-i & 5 & 7 & 2 \\ 2-6i & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *(b)* $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix}$ *(c)* $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

**Actividad 7** *Calcular el rango de las siguientes matrices*

*(a)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

### 1.3.4 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n$ filas por $m$ columnas, $\mathbf{x}$ es una vector columna incógnita de $n$ componentes y $\mathbf{b}$ es un vector de $m$ componentes. Para resolver sistemas de ecuaciones lineales basta con introducir la matriz $\mathbf{A}$ y el vector columna $\mathbf{b}$ y aprender las siguientes sentencias:

| | |
|---|---|
| NullSpace[$\mathbf{A}$] | proporciona una base que genera el conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ |
| LinearSolve[$\mathbf{A}, \mathbf{b}$] | Proporciona una solución particular de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ |

Como el conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_g$ donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema y $\mathbf{x}_g$ es la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, estas dos sentencias son suficientes para resolver cualquier sistema lineal que tenga solución. Si dicho sistema no tuviera solución el programa nos lo diría al intentar resolverlo y no encontrar la solución del mismo. Por ejemplo, para resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\}$$

escribiremos

$$\begin{array}{rcl} \text{In}[42] & := & \mathbf{A} = \{\{1,1,1\},\{1,2,0\}\}; \\ \text{In}[43] & := & \text{NullSpace}[\mathbf{A}] \\ \text{Out}[43] & = & \{\{-2,1,1\}\} \\ \text{In}[44] & := & \text{LinearSolve}[\mathbf{A},\{1,1\}] \\ \text{Out}[44] & = & \{1,0,0\} \end{array}$$

con lo que la solución del sistema es de la forma

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + L(-2, 1, 1),$$

y como $L(-2, 1, 1) = \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, tenemos que la solución de la ecuación será

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t, \\ y = t \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{array}\right.$$

Si el sistema fuera compatible determinado, al efectuar la operación

$$\text{NullSpace}[\mathbf{A}],$$

el progrma nos devolvería el valor del vector nulo, con lo que la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado es la que proporciona la operación LinearSolve.

**Actividad 8** *Decidir cómo son los siguientes sistemas y resolverlos cuando sea posible.*

$$(a)\ \left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x+y+4z=0 \\ x-y+2z=4 \\ 2x+y-z=14 \\ 3x+z=18 \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{l} 2x+2y-3z=2 \\ -x+5y-4z=4 \\ x+7y-7z=7 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

$$(e)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y-3z+16t=4 \\ y+2z-3t=6 \\ -x-y+z+9t=-2 \end{array}\right. \qquad (f)\ \left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{array}\right.$$

# Bibliografía

[1] Stephen Wolfram, *"The Mathematica Book"*, Wolfram Media, Cambridge University Press.

[2] E. Castillo y otros, *Mathematica*, Ed. Paraninfo.