Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Soluciones a los problemas del tema 7
Ecuaciones diferenciales
Introducción a las EDO. Ecuaciones de orden 1

1. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y' = \dfrac{3x^2}{y}$ (b) $y' = 4xy^2$ (c) $y' = 3x^2y$

(d) $y^2y' = e^x$ (e) $y' = y\,(y-1)$ (f) $y' = \dfrac{y}{x}$

(g) $y' + 2y = 4$ (h) $y' + 3y = e^{-3x}$ (i) $y' + (2\tan x)\,y = \operatorname{sen} x$

(j) $y' + \dfrac{2y}{x} = 2\cos x$ (k) $y' + ax^2y = bx^2$ (l) $y' + a\dfrac{y}{x} = x^2$

(m) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$ (n) $y'\cos x + y\operatorname{sen} x = 1$ (o) $y' - \dfrac{2ax}{1+x^2}y = 2x; \quad a \neq 0, 1$

(p) $\left(\operatorname{sen}^2 x - y\right)dx = \tan x\ dy$ (q) $y' = y - \ln x + \frac{1}{x}$

Solución: Se indica el tipo en cada caso. Notar que se expresa $y' = \dfrac{dy}{dx}$

a) Variables separadas

$$y' = \frac{3x^2}{y} \Leftrightarrow ydy = 3x^2dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = x^3 + C \Leftrightarrow y^2 = x^3 + 2C$$

La solución en forma implícita es

$$2x^3 - y^2 + K = 0$$

tomando $K = 2C$.

b) Variables separadas

$$y' = 4xy^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}dy = 4xdx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2x^2+C}$$

c) Variables separadas

$$y' = 3x^2y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = 3x^2dx \Leftrightarrow \ln|y| = x^3 + C \Leftrightarrow y = e^{x^3+C} = Be^{x^3}$$

d) Variables separadas

$$y^2y' = e^x \Leftrightarrow y^2dy = e^xdx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = e^x + C \Leftrightarrow y^3 = 3e^x + 3C = 3e^x + K$$

y la solución es

$$y = \sqrt[3]{3e^x+K} = (3e^x+K)^{1/3}$$

e) Variables separadas

$$y' = y\,(y-1) \Leftrightarrow \frac{1}{y\,(y-1)}dy = dx$$

La integral de la izquierda la realizamos mediante descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{y\,(y-1)}dy = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}\right) dy = A\ln|y| + B\ln|y-1|$$

Calculamos los valores A y B

$$\frac{1}{y\,(y-1)} = \frac{A}{y}+\frac{B}{y-1} = \frac{A\,(y-1)+By}{y\,(y-1)} \Leftrightarrow A\,(y-1)+By = 1 \Leftrightarrow (A+B)\,y-A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

por tanto

$$\int \frac{1}{y\,(y-1)}dy = -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

por tanto

$$\frac{1}{y\,(y-1)}dy = dx \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C$$

y tomando logaritmos

$$\frac{y-1}{y} = e^{x+C} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{y} = Be^{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1-Be^{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-Be^{x}}$$

f) Variables separadas

$$y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Leftrightarrow y = Bx$$

g) Lineal no homogénea

$$y' + 2y = 4$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + 2y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -2dx \Leftrightarrow \ln(y) = -2x + C \Leftrightarrow y = Be^{-2x}$$

y hacemos variación de constantes

$$y\,(x) = B\,(x)\,e^{-2x} \Rightarrow y'\,(x) = B'\,(x)\,e^{-2x} - 2B\,(x)\,e^{-2x}$$

y sustituyendo en la EDO homo génea

$$y' + 2y = 4 \Rightarrow \left(B'\,(x)\,e^{-2x} - 2B\,(x)\,e^{-2x}\right) + 2B\,(x)\,e^{-2x} = 4 \Rightarrow B'\,(x)\,e^{-2x} = 4$$

de donde

$$B'\,(x) = 4e^{2x}$$

e integrando

$$B\,(x) = \int 4e^{2x}dx = 2e^{2x} + C$$

luego la solución buscada es

$$y\,(x) = B\,(x)\,e^{-2x} = \left(2e^{2x}+C\right)e^{-2x} = 2 + Ce^{-2x}$$

h) Lineal no homogénea

$$y' + 3y = e^{-3x}$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + 3y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -3dx \Leftrightarrow \ln(y) = -3x + C \Leftrightarrow y = Be^{-3x}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)\, e^{-3x} \Rightarrow y'(x) = B'(x)\, e^{-3x} - 3B(x)\, e^{-3x}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$y' + 3y = e^{-3x} \Rightarrow \left(B'(x)\, e^{-3x} - 3B(x)\, e^{-3x}\right) + 3B(x)\, e^{-2x} = e^{-3x} \Rightarrow B'(x)\, e^{-3x} = e^{-3x}$$

de donde

$$B'(x) = 1$$

e integrando

$$B(x) = \int dx = x + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x)\, e^{-3x} = (x + C)\, e^{-3x}$$

i) Lineal no homogénea

$$y' + (2\tan x)\, y = \operatorname{sen} x$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + (2\tan x)\, y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + (2\tan x)\, y = 0 \Leftrightarrow y' = -(2\tan x)\, y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx \Leftrightarrow \ln(y) = 2\ln(\cos x) + C \Leftrightarrow y = B\cos^2 x$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)\cos^2 x \Rightarrow y'(x) = B'(x)\cos^2 x - 2B(x)\operatorname{sen} x\cos x$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\begin{aligned} y' + (2\tan x)\, y &= \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \left(B'(x)\cos^2 x - 2B(x)\operatorname{sen} x\cos x\right) + 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}B\cos^2 x &= \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ B'(x)\cos^2 x &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

de donde

$$B'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

e integrando

$$B(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x)\cos^2 x = \left(\frac{1}{\cos x} + C\right)\cos^2 x \Rightarrow y(x) = C\cos^2 x + \cos x$$

j) Lineal no homogéna

$$y' + \frac{2y}{x} = 2\cos x$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + \frac{2y}{x} = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + \frac{2y}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \ln(y) = -2\ln x + C \Leftrightarrow y = B\frac{1}{x^2}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(x) = B'(x)\frac{1}{x^2} - 2B(x)\frac{1}{x^3}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\begin{aligned}
\left(B'(x)\frac{1}{x^2} - 2B(x)\frac{1}{x^3}\right) + \frac{2}{x}\left(B(x)\frac{1}{x^2}\right) &= 2\cos x \Rightarrow \\
B'(x)\frac{1}{x^2} &= 2\cos x \Rightarrow B'(x) = 2x^2\cos x
\end{aligned}$$

e integrando por partes $u = 2x^2$ y $dv = \cos x dx$, de donde $du = 4x$ y $v = \operatorname{sen} x$

$$B(x) = \int 2x^2 \cos x dx = 2x^2 \operatorname{sen} x - \int 4x \operatorname{sen} x dx$$

y volvemos a integrar por partes $u = 4x$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$, de donde $du = 4dx$ y $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}
B(x) &= 2x^2 \operatorname{sen} x - \left(-4x\cos x + 4\int \cos x dx\right) \\
&= 2x^2 \operatorname{sen} x + 4x\cos x - 4\operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

luego la solución buscada es

$$\begin{aligned}
y(x) &= B(x)\frac{1}{x^2} = \left(2x^2 \operatorname{sen} x + 4x\cos x - 4\operatorname{sen} x + C\right)\frac{1}{x^2} \Rightarrow \\
y(x) &= \frac{2x^2 \operatorname{sen} x + 4x\cos x - 4\operatorname{sen} x + C}{x^2}
\end{aligned}$$

k) Ecuación lineal de primer orden no homogénea con coeficientes variables

$$y' + ax^2 y = bx^2$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + ax^2 y = 0$$

que es de variables separadas. Si $a \neq 0$

$$y' + ax^2 y = 0 \Leftrightarrow y' = -ax^2 y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -ax^2 \Leftrightarrow \ln(y) = -\frac{ax^3}{3} + C \Leftrightarrow y = Be^{-ax^3/3}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)\, e^{-ax^3/3} \Rightarrow y'(x) = B'(x)\, e^{-ax^3/3} - B(x)\, ax^2 e^{-ax^3/3}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\begin{aligned}
\left(B'(x)\, e^{-ax^3/3} - B(x)\, ax^2 e^{-ax^3/3}\right) + ax^2 \left(B(x)\, e^{-ax^3/3}\right) &= bx^2 \Rightarrow \\
B'(x)\, e^{-ax^3/3} &= bx^2 \Rightarrow \\
B'(x) &= bx^2 e^{ax^3/3}
\end{aligned}$$

e integrando

$$B(x) = \int bx^2 e^{ax^3/3} dx = \frac{b}{a} e^{ax^3/3} + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x)\, e^{-ax^3/3} = \left(\frac{b}{a} e^{ax^3/3} + C\right) e^{-ax^3/3} \Rightarrow y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax^3/3}$$

Si $a = 0$

$$y' + ax^2 y = bx^2 \Rightarrow y' = bx^2 \Rightarrow y = \frac{bx^3}{3} + C$$

l)

$$y' + a\frac{y}{x} = x^2$$

Ecuación lineal de primer orden no homogénea con coeficientes variables

$$y' + a\frac{y}{x} = x^2$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + a\frac{y}{x} = 0$$

que es de variables separadas. Si $a \neq 0$

$$y' + a\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -a\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{a}{x} \Leftrightarrow \ln(y) = -a \ln x + C \Leftrightarrow y = B\frac{1}{x^a},$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)\frac{1}{x^a} \Rightarrow y'(x) = B'(x)\frac{1}{x^a} - aB(x)\frac{1}{x^{a+1}},$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\left(B'(x)\frac{1}{x^a} - aB(x)\frac{1}{x^{a+1}}\right) + \frac{a}{x}\left(B(x)\frac{1}{x^a}\right) = x^2 \Rightarrow B'(x)\frac{1}{x^a} = x^2 \Rightarrow B'(x) = x^{2+a}$$

e integrando

$$B(x) = \int x^{2+a}dx = \begin{cases} a \neq -3 \Rightarrow \frac{x^{3+\alpha}}{3+a} + C \\ \\ a = -3 \Rightarrow \ln(x) + C \end{cases}$$

luego la solución buscada es en función de a

$$y(x) = B(x)\frac{1}{x^a} = \begin{cases} a \neq -3 \Rightarrow \left(\frac{x^{3+\alpha}}{3+a} + C\right)\frac{1}{x^a} \\ \\ a = -3 \Rightarrow (\ln(x) + C)\frac{1}{x^a} \end{cases}$$

Si $a = 0$

$$y' + a\frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow y' = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + C$$

Pendientes de resolver (m,n,o,p,q)

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' = \dfrac{y+2}{x-3} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2-1}{2y+1} \\ \\ y(0) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x} \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2xyy' = -\left(x^2+y^2\right) \\ \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} xy^3y' = x^4 + y^4 \\ \\ y(2) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' = 3x^2y + x^2 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y' + y = e^{-x} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solución:

a) Variables separadas

$$y' = \frac{y+2}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{y+2}y' = \frac{1}{x-3}$$

integrando

$$\ln(y+2) = \ln(x-3) + C \Rightarrow (y+2) = A(x-3) \Rightarrow y(x) = Ax - (3A+2)$$

Aplicamos la condición inicial

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = -(3A + 2) = 1 \Leftrightarrow A = -1$$

y la solución es

$$y(x) = -x + 1.$$

b) Variables separadas

$$y' = e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow y' e^{-y} = e^x$$

integrando

$$-e^{-y} = e^x + C \Rightarrow e^{-y} = A - e^x$$

tomando logaritmos

$$-y = \ln(A - e^x) \Rightarrow y(x) = -\ln(A - e^x) = \ln \frac{1}{A - e^x}$$

Aplicamos condición inicial

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \ln \frac{1}{A-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{A-1} = 1 \Leftrightarrow A = 2$$

La solución es

$$y(x) = \ln \frac{1}{2 - e^x}$$

c) Variables separadas

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2y + 1} \Leftrightarrow (2y + 1) y' = x^2 - 1$$

e integrando

$$y^2 + y = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = -1$

$$y(0)^2 + y(0) = \frac{0^3}{3} - 0 + C \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 = C \Leftrightarrow C = 0$$

y la solución buscada es

$$y^2 + y = \frac{x^3}{3} - x$$

d) Si expresamos la edo como

$$y' = \frac{x + y}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow y' - \frac{1}{x} y = 1$$

que es una edo lineal que resolvemos por el método de variación de las constantes. Primero la edo homogénea

$$y' - \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{x} y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

e integrando

$$\ln(y) = \ln(x) + C \Leftrightarrow y_h(x) = Ax$$

Para encontrar la solución de la no homogénea, hacemos variar la constante A

$$y(x) = A(x)\,x \Rightarrow y'(x) = A'(x)\,x + A(x)$$

y sustituyendo en la EDO

$$y' - \frac{1}{x}y = 1 \Leftrightarrow \left(A'(x)\,x + A(x)\right) - \frac{1}{x}\left(A(x)\,x\right) = 1 \Leftrightarrow A'(x)\,x = 1 \Leftrightarrow A'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \ln(x) + C$$

La solución buscada es

$$y(x) = A(x)\,x = (\ln(x) + C)\,x$$

Aplicando la condición inicial $y(1) = 2$

$$y(1) = (\ln(1) + C) \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

y la solución buscada es

$$y(x) = x\,(\ln(x) + 2)$$

e) La EDO se puede poner como

$$2xydy = -\left(x^2 + y^2\right)dx \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$$

que es una EDO exacta, ya que si $M(x, y) = x^2 + y^2$ y $N(x, y) = 2xy$ entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$. Luego existe $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

Integrando respecto de x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int M(x, y)\,dx = \int \left(x^2 + y^2\right)dx$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + g(y)$$

y usando la otra ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow 2xy + g'(y) = 2xy \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

y la función $f(x, y)$ es

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + C$$

La solución $y(x)$ debe cumplir

$$f(x, y) = K \Rightarrow \frac{x^3}{3} + y^2x + C = K \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + y^2x = (K - C)$$

y usando la condición inicial $y(1) = 0$

$$\frac{1^3}{3} + y(1) \cdot 1 = (K - C) \Leftrightarrow (K - C) = -\frac{1}{3}$$

luego la solución buscada cumple

$$\frac{x^3}{3} + y^2x + \frac{1}{3} = 0$$

f) Si expresamos la EDO como

$$xy^3y' = x^4 + y^4 \Leftrightarrow xy^3\frac{dy}{dx} = x^4 + y^4 \Leftrightarrow \left(x^4 + y^4\right)dx - xy^3dy = 0$$

comprobamos que es homogénea

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^4 + y^4 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 + (\lambda y)^4 = \lambda^4\left(x^4 + y^4\right) = \lambda^4 M(x,y) \\ N(x,y) &= -xy^3 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x(\lambda y)^3 = \lambda^4\left(-xy^3\right) = \lambda^4 N(x,y) \end{aligned}$$

por tanto son homogéneas del mismo grado y hacemos el cambio

$$y = xv \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} \left(x^4 + (xv)^4\right)dx - x(xv)^3(vdx + xdv) &= 0 \\ x^4\left(1 + v^4\right)dx - x^4\left(v^4dx + xv^3dv\right) &= 0 \\ x^4dx - x^5v^3dv &= 0 \end{aligned}$$

dividiendo por x^4

$$dx - xv^3dv = 0$$

que es una ecuación en variables separables

$$dx - xv^3dv = 0 \Longleftrightarrow dx = xv^3dv \Longleftrightarrow \frac{1}{x}dx = v^3dv \Longleftrightarrow \ln x + C = \frac{v^4}{4}$$

y deshaciendo el cambio con $v = y/x$

$$\ln x + C = \frac{v^4}{4} \Rightarrow \ln x + C = \frac{y^4}{4x^4} \Rightarrow y^4 - 4x^4(\ln x + C) = 0$$

y usando la condición inicial $y(2) = 0$

$$y(2)^4 - 4 \cdot 2^4(\ln 2 + C) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$$

y la solución buscada es

$$y^4 - x^4(\ln x - \ln 2) = 0 \Leftrightarrow y^4 - 4x^4\ln\frac{x}{2} = 0.$$

Pendientes de resolver: g y *h.*

3. El proceso químico formado por dos pasos consecutivos de primer orden

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

se modela matemáticamente por medio de las dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k_1[A] \\ \\ \dfrac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B] \end{cases}$$

Supongamos que las concentraciones iniciales son $[A]_0 = a$, $[B]_0 = [C]_0 = 0$, y que las concentraciones en el tiempo t son $[A] = a - x(t)$, $[B] = y(t)$ y $[C] = x(t) - y(t)$. Calcula las concentraciones en el tiempo t para los casos: (i) $k_1 = 1$, $k_2 = 10$, (ii) $k_1 = k_2 = 1$, y (iii) $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}1$. Representa gráficamente las soluciones obtenidas en los tres casos para $0 \leq t \leq 10$.

Solución: El sistema se transforma en

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{d\left(a-x\left(t\right)\right)}{dt}=-k_1\left(a-x\left(t\right)\right)\\[2ex] \dfrac{dy\left(t\right)}{dt}=k_1\left(a-x\left(t\right)\right)-k_2y\left(t\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}x'=k_1\left(a-x\right)\\[2ex] y'=k_1a-k_1x-k_2y\end{array}\right\}$$

La primera ecuación del sistema es una ecuación de variables separadas

$$\frac{dx}{dt}=k_1\left(a-x\right)\Rightarrow\frac{1}{a-x}dx=k_1dt$$

e integrando

$$-\ln\left(a-x\right)=k_1t+c_1\Leftrightarrow\ln\left(a-x\right)=-\left(k_1t+c_1\right)\Leftrightarrow\left(a-x\right)=e^{-\left(k_1t+c_1\right)}$$

luego la solución general es

$$x\left(t\right)=a-e^{-\left(k_1t+c_1\right)}=a-c_2e^{-k_1t}$$

donde hemos tomado $c_2 = e^{-c_1}$. Se debe cumplir la condición inicial

$$\left[A\right]\left(0\right)=a\Rightarrow a-x\left(0\right)=a\Rightarrow x\left(0\right)=0$$

y por tanto

$$x\left(0\right)=a-c_2=0\Rightarrow c_2=a$$

y la solución es

$$x\left(t\right)=a\left(1-e^{-k_1t}\right)\Rightarrow\left[A\right]=a-x\left(t\right)=ae^{-k_1t}=\left[A\right]_0e^{-k_1t}.$$

Una vez conocida la función $x(t)$, sustituimos en la segunda ecuación

$$y'=k_1a-k_1a\left(1-e^{-k_1t}\right)-k_2y=k_1ae^{-k_1t}-k_2y$$

que es una edo lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea. Resolvemos la ecuación homogénea

$$y'=-k_2y$$

que es de variables separables como antes

$$\frac{y'}{y}=-k_2\Rightarrow\ln\left(y\right)=-k_2t+c_3\Rightarrow y_h=c_4e^{-k_2t}$$

donde $c_4 = e^{c_3}$ con c_3 constante. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea podemos utilizar variación de constantes

$$y\left(t\right)=c_4\left(t\right)e^{-k_2t}$$

de este modo

$$y'\left(t\right)=c_4'\left(t\right)e^{-k_2t}-k_2c_4\left(t\right)e^{-k_2t}$$

y sustituyendo en la EDO

$$y' = k_1ae^{-k_1t} - k_2y \Rightarrow \left(c_4'(t)\,e^{-k_2t} - k_2c_4(t)\,e^{-k_2t}\right) = k_1ae^{-k_1t} - k_2c_4(t)\,e^{-k_2t}$$

simplificando

$$c_4'(t)\,e^{-k_2t} = k_1ae^{-k_1t} \Rightarrow c_4'(t) = k_1ae^{(k_2-k_1)t}$$

Para calcular $c_4(t)$ tenemos que integrar la expresión anterior, pero esta integral depende de si $k_2 = k_1$ o $k_2 \neq k_1$

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow c_4'(t) = k_1a \Rightarrow c_4(t) = k_1at + c_5 \\ \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow c_4'(t) = k_1ae^{(k_2-k_1)t} \Rightarrow c_4(t) = \frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t} + c_5 \end{cases}$$

y el valor de $y(t)$ dependerá de si k_1 y k_2 son iguales

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow y(t) = c_4(t)\,e^{-k_2t} = (k_1at + c_5)\,e^{-k_2t} \\ \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow y(t) = c_4(t)\,e^{-k_2t} = \left(\frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t} + c_5\right)e^{-k_2t} \end{cases}$$

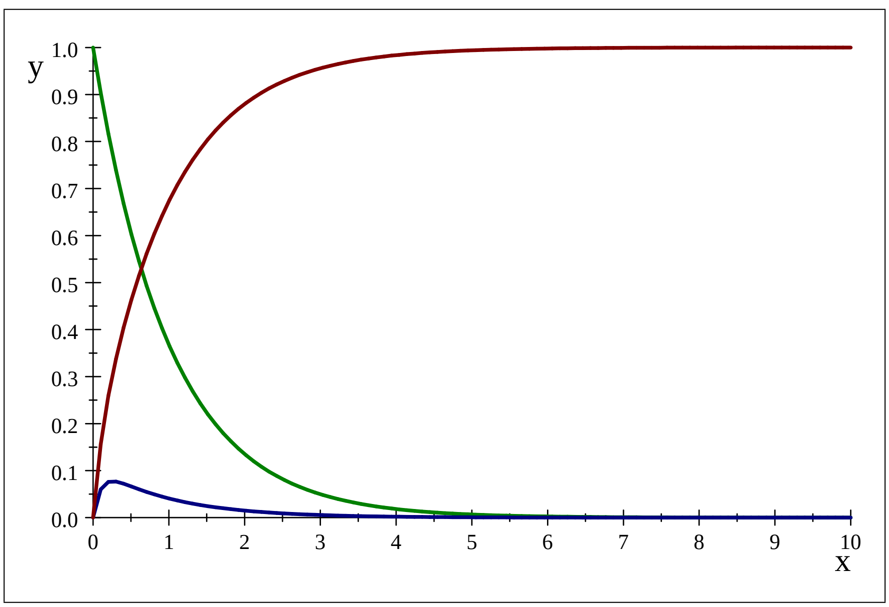
y aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ en cada caso

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow y(0) = b \Rightarrow y(t) = (k_1at)\,e^{-k_1t} \\ \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow y(0) = \frac{k_1a}{k_2-k_1} + c_5 \Rightarrow y(t) = \left(\frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t} - \frac{k_1a}{k_2-k_1}\right)e^{-k_2t} = \frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}\right) \end{cases}$$

Las representaciones gráficas para cada caso son

a) $k_1 = 1$ y $k_2 = 10$. Como $k_1 \neq k_2$

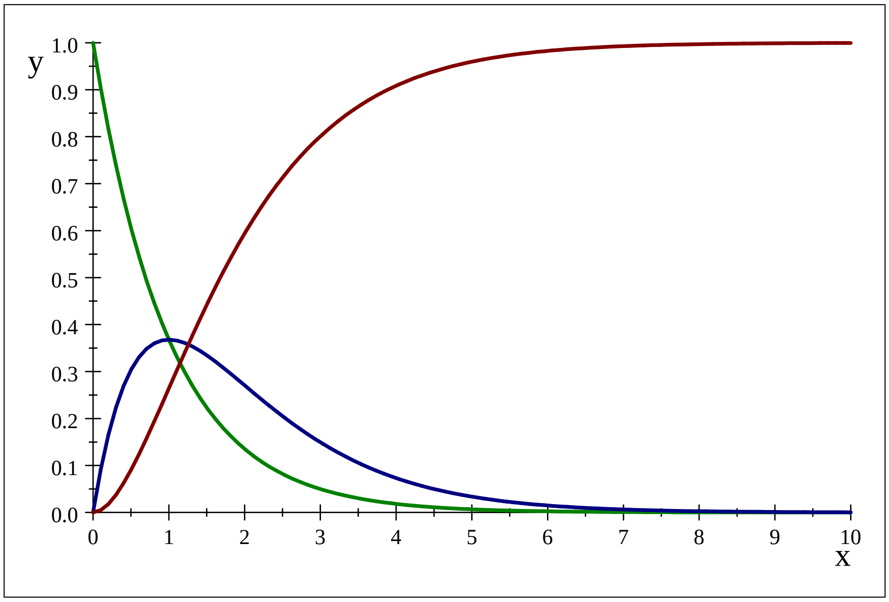
$$\begin{aligned} [A] &= ae^{-k_1t} \Rightarrow [A] = ae^{-t} \\ [B] &= \frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}\right) \Rightarrow [B] = \frac{a}{9}\left(e^{-t} - e^{-10t}\right) \\ [C] &= a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a\left(1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t}\right) \end{aligned}$$



Comparar concentraciones $[A]$ en azul, $[B]$ en verde y $[C]$ en rojo para el caso $k_1 = 1$ y $k_2 = 10$.

b) $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$. Como $k_1 = k_2$

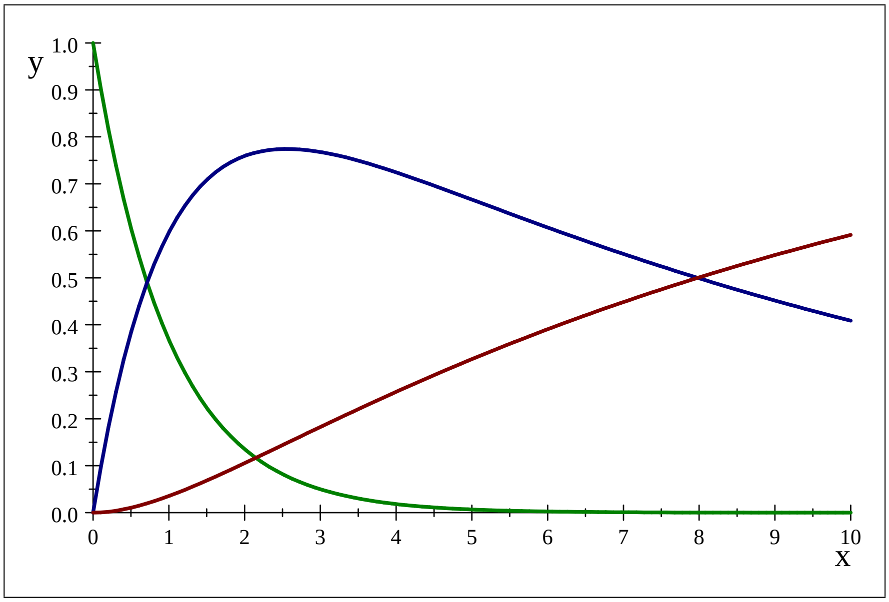
$$\begin{aligned}[A] &= ae^{-k_1 t} \Rightarrow [A] = ae^{-t}\\ [B] &= (k_1 a t)\, e^{-k_1 t} \Rightarrow [B] = ate^{-t}\\ [C] &= a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a\left(1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t}\right)\end{aligned}$$



Comparar concentraciones $[A]$ en azul, $[B]$ en verde y $[C]$ en rojo, para el caso $k_1 = k_2 = 1$.

c) $k_1 = 1$ y $k_2 = 0{,}1 = \frac{1}{10}$. Como $k_1 \neq k_2$

$$\begin{aligned}[A] &= ae^{-k_1 t} \Rightarrow [A] = ae^{-t}\\ [B] &= \frac{k_1 a}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) \Rightarrow [B] = \frac{-10}{9}\left(e^{-t} - e^{-t/10}\right)\\ [C] &= a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a\left(1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t}\right)\end{aligned}$$



Comparar concentraciones $[A]$ en azul, $[B]$ en verde y $[C]$ en rojo para el caso $k_1 = 1$ y $k_2 = 10$.

4. El proceso químico formado por tres pasos consecutivos de primer orden

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \xrightarrow{k_3} D$$

está modelado matemáticamente por medio del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,(a-x)}{dt} = -k_1\,(a-x) \\[2ex] \dfrac{d\,(y)}{dt} = k_1\,(a-x) - k_2 y \\[2ex] \dfrac{d\,(z)}{dt} = k_2 y - k_3 z \\[2ex] x\,(0) = y\,(0) = z\,(0) = 0 \end{cases}$$

donde $(a-x)$, y, z son las concentraciones de A, B, y C, respectivamente, en el tiempo t. Supongamos que $k_1 \neq k_2$, $k_1 \neq k_3$ y $k_2 \neq k_3$. Calcula C como función de t.

Solución: Podemos proceder como en el caso anterior con resolviendo la primera ecuación, después la segunda y finalmente la tercera de forma recursiva. Las dos primeras ecuaciones son las del problema anterior, luego como $k_1 \neq k_2$ las soluciones son

$$x\,(t) = a\left(1 - e^{-k_1 t}\right) \Rightarrow [A] = a e^{-k_1 t}$$

$$y\,(t) = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) \Rightarrow [B] = y\,(t)$$

Nos queda por resolver la última ecuación

$$\frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) - k_3 z$$

que es una ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea. Resolvemos la ecuación homogénea

$$z' = -k_3 z$$

que es de variables separables como antes

$$\frac{z'}{z} = -k_3 \Rightarrow \ln(z) = -k_3 t + c_1 \Rightarrow z_h = c_2 e^{-k_3 t}$$

donde $c_2 = e^{c_1}$ con c_1 constante. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea podemos utilizar variación de constantes

$$z(t) = c_2(t)\, e^{-k_3 t}$$

de este modo

$$z'(t) = c_2'(t)\, e^{-k_3 t} - k_3 c_2(t)\, e^{-k_3 t}$$

y sustituyendo en la EDO

$$\begin{aligned} z' &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) - k_3 z \Rightarrow \\ c_2'(t)\, e^{-k_3 t} - k_3 c_2(t)\, e^{-k_3 t} &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) - k_3 c_2(t)\, e^{-k_3 t} \end{aligned}$$

simplificando

$$c_2'(t)\, e^{-k_3 t} = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

y multiplicando por $e^{-k_3 t}$

$$c_2'(t) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) e^{k_3 t} = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(e^{(k_3 - k_1)t} - e^{(k_3 - k_2)t}\right)$$

y como $k_1 \neq k_3$ y $k_2 \neq k_3$ integramos directamente

$$c_2(t) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(\frac{1}{k_3 - k_1} e^{(k_3 - k_1)t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{(k_3 - k_2)t}\right) + c_3$$

y $z(t)$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_2(t)\, e^{-k_3 t} = \left(\frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(\frac{1}{k_3 - k_1} e^{(k_3 - k_1)t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{(k_3 - k_2)t}\right) + c_3\right) e^{-k_3 t} \\ &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(\frac{1}{k_3 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{-k_2 t}\right) + c_3 e^{-k_3 t} \end{aligned}$$

como $z(0) = 0$

$$z(0) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(\frac{1}{k_3 - k_1} - \frac{1}{k_3 - k_2}\right) + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{k_1 k_2 a}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)}\left(\frac{1}{k_3 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{-k_2 t}\right) + \frac{k_1 k_2 a}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} e^{-k_3 3t} \\ &= a k_1 k_2 \left(\frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} - \frac{e^{-k_2 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 3t}}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}\right) \\ &= a k_1 k_2 \left(\frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t}}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 3t}}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}\right) \end{aligned}$$

5. Consideremos un circuito eléctrico tipo RL formado por una resistencia y una bobina. Las leyes de Ohm y Kirchhoff establecen que la intensidad I de corriente eléctrica que circula por el circuito en el tiempo t obedece la ecuación
$$L\frac{dI}{dt}+RI=E$$
donde las constantes L y R representan la inductancia y la resistencia, y E es la fuerza electromotriz generada por el generador o la batería. En el caso de corriente continua $E=E_0$, constante. Resuelve el siguiente problema e interpreta físicamente la solución obtenida:
$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt}+RI=E_0, \quad t>0 \\ \\ I(0)=0. \end{cases}$$
Solución: Es un PVI donde la ecuación diferencial ordinaria es lineal de orden 1
$$L\frac{dI}{dt}+RI=0 \Leftrightarrow L\frac{dI}{dt}=-RI \Leftrightarrow \frac{1}{I}dI=-\frac{R}{L}dt \Leftrightarrow \ln I=-\frac{R}{L}t+C \Leftrightarrow I_h=Be^{-Rt/L}$$
donde se ha puesto $B=e^C$. La solución de la no homogénea se hará por variación de constantes
$$I\left(t\right)=B\left(t\right)e^{-Rt/L} \Rightarrow I'\left(t\right)=B'\left(t\right)e^{-Rt/L}-\frac{R}{L}B\left(t\right)e^{-Rt/L}$$
y sustituyendo en la EDO homogénea
$$L\left(B'\left(t\right)e^{-Rt/L}-\frac{R}{L}B\left(t\right)e^{-Rt/L}\right)+R\left(B\left(t\right)e^{-Rt/L}\right)=E_0 \Rightarrow LB'\left(t\right)e^{-Rt/L}=E_0 \Rightarrow B'\left(t\right)=\frac{E_0}{L}e^{Rt/L}$$
e integrando
$$B\left(t\right)=\int\frac{E_0}{L}e^{Rt/L}dt=\frac{E_0}{R}e^{Rt/L}+C$$
luego la solución buscada es
$$I\left(t\right)=B\left(t\right)e^{-Rt/L}=\left(\frac{E_0}{R}e^{Rt/L}+C\right)e^{-Rt/L}=\frac{E_0}{R}+Ce^{-Rt/L}$$
Usando la condición inicial $I\left(0\right)=0$, obtenemos
$$I\left(0\right)=\frac{E_0}{R}+C=0 \Rightarrow C=-\frac{E_0}{R}$$
y la solución es
$$I\left(t\right)=\frac{E_0}{R}+Ce^{-Rt/L}=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$
Tomando $t\to\infty$
$$\lim_{t\to\infty}I\left(t\right)=0.$$

6. Para un circuito tipo RC formado por una resistencia y un condensador, la intensidad de corriente I satisface la ecuación diferencial
$$L\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE}{dt}$$
donde la constante C representa la capacitancia del condensador. Resuelve la ecuación anterior para la condición inicial $I(0)=0$ en los casos: (i) $E=E_0$, constante, y (ii) $E(t)=E_0\operatorname{sen}(\omega t)$.

Solución:

i.) Si $E = E_0$ es constante, entonces $\frac{dE}{dt} = 0$ y la edo queda como

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

que es de variables separadas

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \Leftrightarrow L\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{C} \Leftrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{LC} \Leftrightarrow \ln I = -\frac{1}{LC}t + k$$

y por tanto

$$I(t) = Ke^{-t/LC}$$

Usando la condición inicial $I(0) = 0$

$$I(0) = K \Rightarrow K = 0$$

y la solución es

$$I(t) = 0$$

ii.) Si $E = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, entonces

$$\frac{dE}{dt} = E_0\omega\cos(\omega t)$$

y la ecuación es no homogénea

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E_0\omega\cos(\omega t)$$

La solución de la homogénea la hemos obtenido en el apartado anterior

$$I_h(t) = Ke^{-t/LC}$$

Si usamos el método de variación de las constantes obtendremos la solución de la no homogénea

$$I(t) = K(t)e^{-t/LC} \Rightarrow I'(t) = K'(t)e^{-t/LC} - \frac{1}{LC}K(t)e^{-t/LC}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$L\left(K'(t)e^{-t/LC} - \frac{1}{LC}K(t)e^{-t/LC}\right) + \frac{1}{C}K(t)e^{-t/LC} = E_0\omega\cos(\omega t)$$

simplificando

$$LK'(t)e^{-t/LC} = E_0\omega\cos(\omega t) \Rightarrow K'(t) = \frac{E_0\omega}{L}e^{t/LC}\cos(\omega t)$$

e integrando

$$K(t) = \int \frac{E_0\omega}{L}e^{t/LC}\cos(\omega t)\,dt = \frac{E_0\omega}{L}\int e^{t/LC}\cos(\omega t)\,dt$$

Aplicando integración por partes (dos veces):

$$K(t) = E_0C\omega\frac{e^{t/LC}\left(CL\omega\operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)\right)}{1 + (\omega LC)^2} + A$$

con A constante de integración. La función $I(t)$ será

$$I(t) = K(t)\, e^{-t/LC} = \left(E_0 C\omega \frac{(CL\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t))}{1 + (\omega LC)^2} + Ae^{-t/LC} \right)$$

Usando la condición inicial $I(0) = 0$, obtenemos

$$I(0) = \left(E_0 C\omega \frac{1}{1 + (\omega LC)^2} + A \right) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E_0 C\omega}{1 + (\omega LC)^2}$$

y la solución final será

$$\begin{aligned} I(t) &= \left(E_0 C\omega \frac{(CL\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t))}{1 + (\omega LC)^2} - \frac{E_0 C\omega}{1 + (\omega LC)^2} e^{-t/LC} \right) \\ &= \frac{E_0 C\omega}{1 + (\omega LC)^2} \left(CL\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t) - e^{-t/LC} \right) \\ &= \frac{E_0 C\omega}{1 + (\omega LC)^2} \left(CL\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t) \right) - \frac{E_0 C\omega}{1 + (\omega LC)^2} e^{-t/LC} \end{aligned}$$